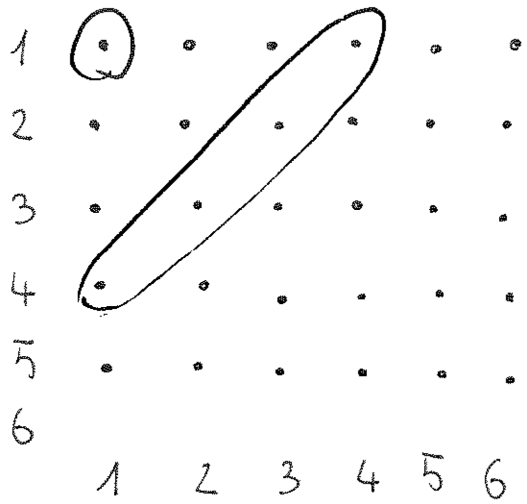
VJEROJATNOST

1. Kolika je vjerojatnost kod bacanje dvije kocke da:
   A) Zbroj brojeva bude 5.
   B) Pojave se dvije jedinice.

MOGUĆE ISHODE MOŽEMO NACRTATI NA 2D GRAFU



SVI MOGUĆI ISHODI SU:

$6 \times 6 = 36$

A) Slučaj zbroj bude 5 su označeni crvenom bojom

$\Rightarrow$ skup sadrži 4 elementa

Vjerojatnost događaja A je $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

B) Gledamo sad slučajeve označene zelenom bojom

Znači $P(B) = \frac{1}{36}$

2. Dokazati da za svaki $n > k$ vrijedi:

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$$

Za $n > k$ vrijedi

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1} \quad ?$$

$$\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{n-k}{k+1} =$$

$$= \frac{n-k}{(k+1)!} \cdot \frac{n!}{(n-k)\,(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{(k+1)!\,[n-(k+1)]!} = \binom{n}{k+1}$$

3. Izračunajte da li postoji n takav da vrijedi:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1048576$$

Možemo koristiti newton binom i pisati

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

↑

vrijedi za svaki a i b

slučaj $a = b = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \implies 2^n = 1048576$$

$$\implies n = \log_2(1048576)$$

$$= \frac{\log_{10}(1048576)}{\log 2} = 20$$

$$\implies n = 20$$

---

napomena (pogledati)

$$\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{elementi Pascalovog trokuta}} a^{n-k} b^k$$

			1					$n=0$
		1		1				$n=1$
	1		2		1			$n=2$
1		3		3		1		$n=3$

⋮

4. U kutiji se nalazi 100 čavala od kojih je 10 neispravno. Kolika je vjerojatnost da su od tri nasumično uzeta 3 čavla:

A) Sva tri su ispravna.

B) 2 su dobra a jedan neispravan.

A) broj svi mogući ishoda je $\binom{100}{3}$

Ishod da čavli ..su svi ispravni $\binom{90}{3}$

$$P(A) = \frac{\binom{90}{3}}{\binom{100}{3}} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{90 \cdot 89 \cdot 88} = 0.72$$

B)

dva ispravna

$$P(B) = \frac{10 \binom{90}{2}}{\binom{100}{3}} = \frac{10 \cdot 90 \cdot 89 \cdot 3}{10 \cdot 99 \cdot 98} = 0.24$$

4

neispravan

5. Jedan ispit sastoji se od 10 pitanja, za svako pitanje postoji samo jedan točni odgovor od 4 moguća. Kolika je vjerojatnost, ukoliko se slučajno odaberu odgovori na sva pitanja, da barem 2 budu točna.

4^{10} svi mogući ishodi

3^{10} ne točni odgovori

$10 \cdot 3^{9}$ samo jedan točan odgovor

$$\Rightarrow \quad P = \frac{4^{10} - 3^{10} - 10 \cdot 3^{9}}{4^{10}} = 1 - 0.056 - 0.187$$

$$= 0.756 = 75.6\%$$

koristi se izraz za komplementarnu vjerojatnost

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

barem dva budu točna

svi netočni + samo jedan točan

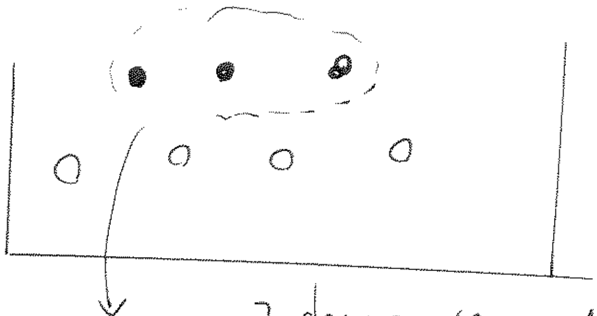
6. Koja je vjerojatnost da 7 kuglica raspodijelimo u 7 ćelija tako da:
   A) U svakoj ćeli bude po jedna.
   B) U jednoj budu dvije kuglice, u jednoj niti jedna a u ostalih pet po jedna.
   C) U dvije budu dvije kuglice, u dvije ni ti jedna a u ostale tri po jedna.

A) $$P(A) = \frac{P^7}{\overline{V}_7^{\,7}} = \frac{7!}{7^7} = \frac{5040}{823543} = 0.00612$$

B) $$P(B) = \frac{P^5 \cdot P^7_{5,1,1} \cdot K^7_2}{\overline{V}_7^{\,7}} = 0.129$$

c) $$P(c) = \frac{P^7_{3,2,2} \, K^7_2 \, K^5_2 \cdot P_3}{\overline{V}_7^{\,7}} = 0.32129$$

7. U jednoj posudi nalaze se 4 bijele i 3 crne kuglice. Uzme se uzorak od 3 kuglice. Neka je *x* broj bijelih kuglica a *P(x)* vjerojatnost da uzorak sadrži *x* bijelih kuglica.
   A) Nađite *P(x)*.
   B) Izračunajte *P(x)* za *x* = 0, 1, 2, 3.



druga crna uz uvjet da je prva crna

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = P(0) = 1/35$$

treća crna znajući da su druge dvije crne

prva crna

Tako slijede dalje

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot 3 = P(1)$$ tri moguća mjesta

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot 3 = P(2) = 18/35$$

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = P(3) = 4/35$$

$$\left.\begin{matrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \\ P(3) \end{matrix}\right\} \quad P(x) = \frac{\binom{3}{3-x}\binom{4}{x}}{35}$$

možemo zaključiti da prate ovu funkciju