RASPODIJELE

1. Novčić se baca 10 puta. Je li je veća vjerojatnost da se dobije 10 puta slika ili 4 puta glava a 6 slika?

2. Kocku bacimo ukupno 6 puta. Kolika je vjerojatnost da se broj 1 pojavi četiri puta?

3. Od ukupno 300 proizvoda 30 ih je oštećeno. Kupac slučajnim odabirom uzima 4 proizvoda.
   a) Odredite vjerojatnost da su od ta 4 proizvoda ukupno *x* oštećena.
   b) Odredite očekivanje i varijancu za *x*, koristeći opće formule za *E*(*x*) i *V*(*x*) the globalne formule za hipergeometrijsku raspodjelu, te usporedite rezultat.
   c) Nađite očekivanje i varijancu binomine raspodjele za varijablu *x*.
   (Rj. E(x)=0.4, V(x)=0.36)

4. Broj kvarova u telefonskoj centrali u godinu dana može se prikazati Poissonovom raspodjelom, gdje je $\lambda=3$. Kolika je vjerojatnost da se u godinu dana dogode tri kvara?
   (Rj. 0.024)

5. Poznato je da na jednom bankomatu u Zagrebu 4 osobe od 5 koje ga koriste podižu novce.

a) Ako se slučajno odabere 10 osoba (s ponavljanjem) koje su koristile bankomat, izračunajte vjerojatnost da je ukupni broj korisnika bankomata veći od 9.
b) Ukoliko je od 6 slučajno odabranih osoba (sponavljanjem) barem 3 podizalo novce, kolika je vjerojatnost da je ukupni broj osoba koje su dizale novce veći od 4?
   (Rj. a) 0.375, 0.67)

10 slika $\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

S S S S S S S S S S

4 glava
6 slika

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} & = \\ S\,S\,S\,S\,S\,S\,S\,S\,S\,S & = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \\ S\,S\,S\,S\,S\,S\,G\,G\,G\,G & = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \\ G\,S\,S\,G\,S\,G\,S\,G\,S\,S & = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \\ \cdots & \vdots \\ \cdots & \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow P\binom{4G}{6S} = \binom{10}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 210\left(\frac{1}{2}\right)^{10} >>> p(10S) = \left(\frac{1}{2}\right.$$

2. 1 1 1 1 x x

x 1 1 x 1 1

$\cdots\cdots$

$\vdots$

$$P\binom{4 \times 1}{} = \binom{6}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^{4}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{2 \to 6-4}$$

$$\stackrel{!}{=} \binom{n}{k} p^{k} q^{n-k} \quad !$$

bernullieva raspodjela

3. A) 270 dobrih

30 oštećeno

0 0 0 0 $\underbrace{}_{x}$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{\binom{30}{x}\binom{270}{4-x}}{\binom{300}{4}}$$ (vidi zadatak br. 7)

B) $E(x) = \sum_{x \in D} x \, p(x)$

$$V(x) = \frac{\sum (x-\mu)^2}{n} = \sum_{x \in D} (x-\mu)^2 p(x)$$

$$E(x) = 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + 3\,p(3) + 4 \cdot p(4)$$

$$= \frac{\binom{30}{1}\binom{270}{3}}{\binom{300}{4}} + 2 \cdot \frac{\binom{30}{2}\binom{270}{2}}{\binom{300}{4}} + 3 \cdot \frac{\binom{30}{3}\binom{270}{1}}{\binom{300}{4}} + 4 \cdot \frac{\binom{30}{4}\binom{27}{0}}{\binom{300}{4}}$$

$$= 0.29 + 2 \cdot 0.05 + 3 \cdot 0.0033 + 4 \cdot 0.00008 = 0.4$$

$$V(x) = \sum_{x \in D} (x - 0.4)\, p(x) = (0 - 0.4) \cdot \frac{\binom{270}{4}}{\binom{300}{4}} + \ldots$$

$$= 0.16 \cdot 0.65 + 0.36 \cdot 0.29 + 2.56 \cdot 0.05 + 6.76 \cdot 003$$

$$+ 12.96 \cdot 0.00008 = 0.36$$

b) hipergeometriska raspodijela vrijedi

$$H(N, M, n, x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$n \to$ izabrani

$x \to$ broj oštećenih od n izabrani

$M \to$ ukupni broj oštećeni

$N \to$ ukupni broj elemenata (proizvoda)

$$E(x) = n \cdot \frac{M}{N} = 30 \cdot \frac{4}{300} = 0.4$$

$$V(x) = n \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-M}{N-1}\right) = \dots\dots = 0.36$$

c) Za binomnu raspodjelu vrijedi

$$B(n, x) = \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x}$$ $\to$ broj oštećenih

$$E(x) = np = 4 \cdot 0.1 = 0.4$$

$$V(x) = npq = 4 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 0.36$$

4) $P(x,\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ poissonova raspodjela

$\Rightarrow E(x) = \lambda$

$V(x) = \lambda$

$\Rightarrow$ kvarovi prate tu raspodjelu sa $\lambda = 3$

Znači

$$P(X=3) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{3^3}{3!} e^{-3} = \frac{27 \cdot 0.0497}{6} = 0.224$$

5) Vjerojatnost da osoba je digla novce $p = \frac{4}{5} = 0.8$

X broj osoba koja je digla novce

$p = 0.8$

$q = 0.2$ $\quad X \sim Bin(n=10;\ p=0.8)$

i $n = 10$

$\Rightarrow$

A) $P(X \geq 9) = P(X=9) + P(X=10)$

$$= \binom{10}{9} \cdot 0.8^9 \cdot 0.2^1 + \binom{10}{10} 0{,}8^{10}$$

$$= 0.268 + 0.107 = 0.375$$

b) Želimo izračunati

$$P(X>4 \mid X\geq 3) = \frac{P(X>4)}{P(X\geq 3)}$$

$$X \sim Bin(n=6\ ;\ p=0.8)$$

$$P(X\geq 3) = 1 - P(X<3) =$$
$$= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$$
$$= 1 - \binom{6}{0} 0.2^6 - \binom{6}{1} 0.8^1 \cdot 0.2^5 - \binom{6}{5} 0.8^2 \cdot 0.2^4 =$$
$$= 1 - 0.000064 - 0.00153 - 0.01536 =$$
$$= 0.983$$

$$P(X>4) = P(X=5) + P(X=6)$$
$$= \binom{6}{5} 0.8^5 \cdot 0.2^1 + \binom{6}{6} 0.8^6 \cdot 0.2^0$$
$$= 0.393 + 0.262 = 0.65$$

Dakle, dobije se

$$P(X>4 \mid X\geq 3) = \frac{P(X>4)}{P(X\geq 3)} = \frac{0.65}{0.983} = 0.67$$