

RASPODIJELE

1. Broj meteora koji se sudare s jednim satelitom tijekom svoje orbite može se opisati Poissonovom raspodjelom, s varijablom parametra λ .
Satelitu treba 1 dan da okruži zemlju u tom razdoblju sudari se sa tri meteorita.
Kolika je vjerojatnost da je broj meteora sudare se sa satelitom ≤ 3 , kad satelit 5 puta okruži zemlju.
2. Ako prosječno 10 ljudi uđe u supermarket svakih 15 minuta, pod pretpostavkom da su ispunjeni uvjeti Poissonove raspodjele, kolika je vjerojatnost da ćete točno promatrati 5 dolazaka u 15 minuta? Kolika je vjerojatnost 1 ulaska u 3 minute?
3. Diskretna varijabla X ima slijedeće vrijednosti 4, x , 2 sa relativnim vjerojatnostima $1/2$, $1/3$ i $1/6$. Odredite moguće vrijednost od x , znajući da $\sigma(x)=5$.
4. Zadana je gustoća vjerojatnosti $f(x) = a \cdot \exp(-x/10)$ gdje varijabla x poprima vrijednost od 0 do beskonačnosti. Odredite konstantnu a .
5. Zadana je gustoća vjerojatnosti $f(x) = ax \cdot \exp(-ax)$ gdje varijabla x poprima vrijednost od 0 do beskonačnosti. Odredite konstantnu a .

1. $\bar{E}(x) = \lambda = 3$

$X \sim \text{Poisson}(\lambda = 3)$ u jedname domu

$W \sim \text{Poisson}(\lambda = 15)$ u 5 domu

$$P(W \leq 3) = P(W=0) + P(W=1) + P(W=2) + P(W=3)$$

$$= \frac{e^{-15} 15^0}{0!} + \frac{e^{-15} 15^1}{1!} + \frac{e^{-15} 15^2}{2!} + \frac{e^{-15} 15^3}{3!}$$

$$= 0.0002$$

2. $p(5) = \frac{10^5 e^{-10}}{5!} = 0.037$

1 uloz u 3 minute \rightarrow

$$\frac{10}{15} \times 3 (\text{minute}) = 2$$

$$\Rightarrow p(1) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 0.270$$

3. Možemo napisati za $E(x)$ i $V(x)$

$$E(x) = 4 \cdot \frac{1}{2} + x \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7+x}{3}$$

$$V(x) = \frac{1}{2} \left(4 - \frac{7+x}{3} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{7+x}{3} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(2 - \frac{7+x}{3} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{5-x}{3} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2x-7}{3} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{-1-x}{3} \right)^2 =$$

$$= \frac{2x^2 - 14x + 29}{9}$$

Znamo da $\sigma(x)^2 = V(x) = 25$

$$\Rightarrow 2x^2 - 14x + 29 = 25$$

Rješenja jednačine su $\begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 14 \end{cases}$

oboje se mogu prihvatiti

4. $\int_0^{\infty} f(x) dx = 1 \rightarrow$ normalizacija kontinuirana slučajne variable

$$\int_0^{\infty} a e^{-x/10} dx = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-x/10} dx}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x/10} dx = -10 e^{-x/10} \Big|_0^{\infty} = -10(0-1) = 10$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{10} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{10} e^{-x/10}$$

$$\int_0^{\infty} a x e^{-ax} = 1 \rightarrow \text{moramo riješiti da se nađe } a$$

$$a \int_0^{\infty} x e^{-ax} dx = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\int_0^{\infty} x e^{-ax} dx}$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax} dx = \frac{x e^{-ax}}{-a} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-ax} dx = *$$

parcijalna

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \frac{e^{-ax}}{-a} \Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{e^0}{-a} = 0 + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

$$* = \frac{x e^{-ax}}{-a} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{a} \frac{1}{a} = \infty \cdot 0 + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2}$$

$$\beta) E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) = a^2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax} dx = \frac{2}{a}$$