Pri poljetanju aviona njegova akceleracija (1) je konstantna: $a(t) = a_0$; (2) raste linearno s vremenom: $a(t) = a_1 t$. Avion kreće iz mirovanja: $v(0) = 0$.

a) Skicirajte graf ovisnosti brzine aviona o vremenu.
b) Ako je za poljetanje potrebno postići brzinu v_{max}, koliko mora biti dugačka pista?

1) Za konstantnu akceleraciju:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a_0$$

Prvi korak iz definicije akceleracije, drugi iz zadatka. Treba dobiti brzinu, množimo sve s dt:

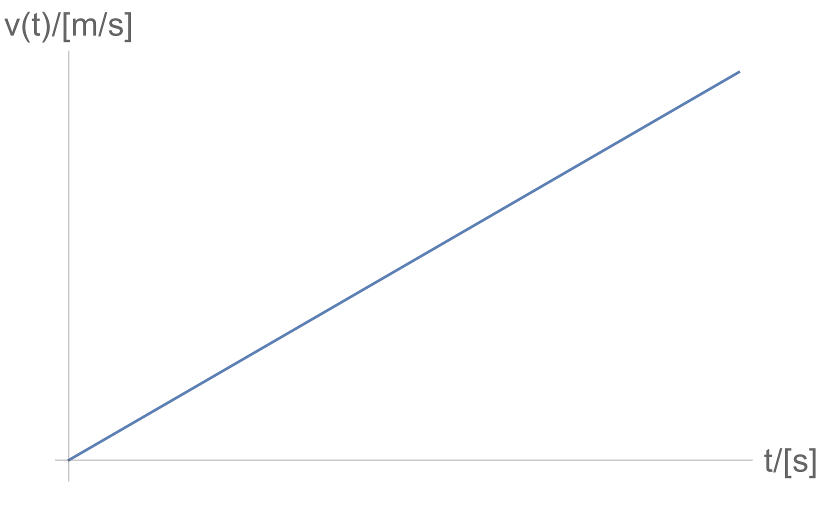
$$\mathrm{d}v = a_0 \mathrm{d}t$$

Varijable su separirane, pa možemo sve integrirati. Uz početni uvijet iz zadatka $v(0) = 0$:

$$\int_0^v \mathrm{d}v' = a_0 \int_0^t \mathrm{d}t'$$

$$v(t) = a_0 t$$

a) Skiciramo graf te funkcije:



b) Izrazimo brzinu:

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = a_0 t$$

Gdje je drugi korak rezultat koji smo već dobili. Definiramo stazu tako da je $s(0) = 0$ i integriramo po vremenu kao i prije:

$$\int_0^s \mathrm{d}s' = a_0 \int_0^t t' \mathrm{d}t'$$

$$s = \frac{a_0}{2} t^2$$

Označimo s d duljinu staze i s t_{max} vrijeme da avion postigne zadanu brzinu v_{max}. Tada je :

$$s(t_{max}) = d$$

$$v(t_{max}) = v_{max}$$

Uvrštavanjem vremena t_{max} u formule za brzinu i put dobivamo:

$$d = \frac{a_0}{2} t_{max}^2$$

$$v_{max} = a_0 t_{max}$$

Iz druge jednadžbe izrazimo vrijeme i uvrštavamo u prvu:

$$d = \frac{v_{max}^2}{2a_0}$$

2) Za akceleraciju koja linearno raste:

NB! - a_1 nema dimenziju akceleracije:

$$[a_1] = \frac{[L]}{[T]^3}$$

Diskusija je analogna prvom slučaju, samo se uvrsti drugačiji izraz za akceleraciju u integrale:

$$\int_0^v \mathrm{d}v' = a_1 \int_0^t t' \mathrm{d}t'$$

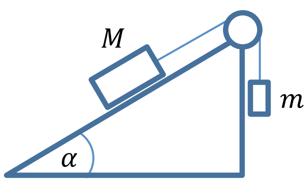
$$\int_0^s \mathrm{d}s' = \frac{a_1}{2}\int_0^t t'^2 \mathrm{d}t'$$

Integrali ovog oblika se rješavaju po formuli:

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad \forall n \neq -1$$

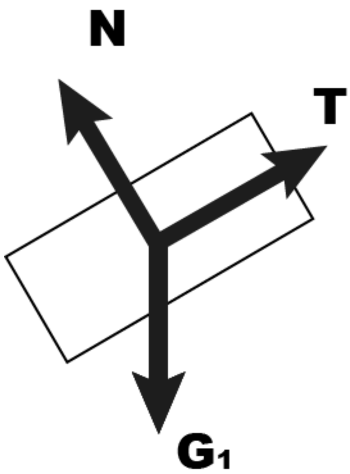
Ostatak riješite sami.

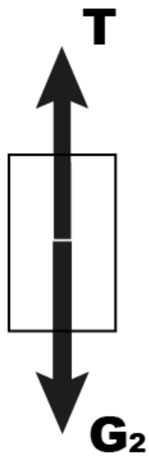
1. Preko koloture bez mase su uz pomoć nerastezljive niti bez mase obješena dva utega. Lakši uteg, mase m, slobodno visi, dok se teži, mase M, nalazi na nepomičnoj kosini nagiba α po kojoj može klizati bez trenja. U trenutku $t = 0$ sustav miruje.
   a) Skicirajte dijagrame sila za oba utega i odredite iznos sile napetosti niti.
   b) Napišite jednadžbu gibanja za jedan od utega i odredite kut nagiba α_c pri kojem sustav miruje u svakom trenutku $t > 0$.
   c) Provjerite da je ukupna energija sustava očuvana za bilo koji kut nagiba $\alpha \in [0, {}^{\pi}/_{2}]$ i bilo koje vrevrijeme $t > 0$.



Nit se ne rasteže, što znaći da pomak jednog utega za neki $\mathrm{d}x_1$ nužno znaći i pomak drugog utega za $\mathrm{d}x_2 = -\mathrm{d}x_1$. To također znaći i da je napetost niti i na jednom i na drugom utegu ista.

a) dijagrami sila





Ovdje su $\vec{G}_1$ i $\vec{G}_2$ gravitacijske sile koje odgovaraju prvom i drugom utegu, $\vec{T}$ je sila napetosti niti (jednaka je za oba utega zbog uvjeta da je nit čvrsta), a $\vec{N}$ reakcija podloge (kosine) na prvi uteg.

b) Uvjet stabilnosti

Napišimo prvo jednadžbe gibanja za utege. Koristimo dijagrame iz a) dijela zadatka. Za prvi uteg postavimo koordinatni sustav tako da je x-os paralelna s kosinom, a y-os okomita na nju (rotiramo ga za kut α). Ovo pojednostavljuje račun jer nema gibanja okomito na podlogu. Jednadžba gibanja u smjeru podloge je:

$$M\ddot{x}_1 = T - G_1 \sin\alpha$$

Za drugi uteg postavimo 1D koordinatni sustav u smjeru niti i dobivamo:

$$m\ddot{x}_2 = T - G_2$$

Ovaj sustav ima 3 nepoznanice, što znači da nam treba još jedna jednadžba da bi postojalo jedinstveno rješenje. Sjetimo se uvjeta da se nit ne rasteže: $\mathrm{d}x_2 = -\mathrm{d}x_1$.

Definirajmo diferencijani pomak $\mathrm{d}s$ tako da je pozitivan u smjeru težeg utega, tj. niz kosinu (uvjerite se da je taj izbor prizvoljan, tj. da su konačna rješenja b) i c) zadatka jednaka i ako ga definiramo u suprotnom smjeru):

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}x_2 = -\mathrm{d}x_1$$

Uzimanjem druge derivacije i uvrštavanjem u jednadžbe gibanja dobivamo sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$-m\ddot{s} = T - Mg\sin\alpha$$

$$m\ddot{s} = T - mg$$

Ovdje smo odmah uvrstili i izraz za gravitacijsku silu. S obzirom da nas napetost niti T ne zanima, možemo ga se riješiti iz jednadžbi tako da od druge jednadžbe oduzmemo prvu. dobivamo:

$$M\ddot{s} + m\ddot{s} = Mg\sin\alpha - mg$$

Sad se lako vidi da je jednadžba gibanja za pomak niz kosinu

$$\ddot{s} = g\frac{M\sin\alpha - m}{M + m}$$

Ako uvrstimo $\alpha = \pi/2$ dobivamo poznati rezultat za dva utega obješena preko koloture.

Zanima nas uvijet pri kojem će sustav mirovati, tj. $\dot{s}(t) = 0,\ \forall t > 0$. Iz zadatka znamo da je početna brzina $\dot{s}(0) = 0$, pa je dovoljno pokazati da se ona ne mijenja, odnosno da je $\ddot{s} = 0$. Iz jednadžbe gibanja se vidi da je taj uvjet zadovoljen ako brojnik s desne strane iščezava, što daje uvjet na kut (ako su mase poznate):

$$\alpha_c = \arcsin\frac{m}{M}$$

c) Očuvanje energije

Pretpostavimo da je nagib kosine takav da teži uteg prevagne (sami riješite za suprotni slučaj), tj. da je gibanje niz kosinu.

Definiramo potencijal tako da je $U\big(s(0)\big) = 0$ (u početnom položaju je potencijalna energija nula; to je prirodan izbor, ali je u stvarnosti potpuno svejedno).

Potencijal je definiran kao:

$$\mathrm{d}U = -\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$$

Sila reakcije podloge je uvijek okomita na pomak niz kosinu, pa njihov skalarni produkt iščezava. Sile napetosti niti djeluju u suprotnim smjerovima, pa se njihovi doprinosi ponište. Jedini doprinosi potencijalu su gravitacijske sile na prvi i drugi uteg. One su definirane kao:

$$\vec{G}_1 = M\vec{g}, \qquad \vec{G}_2 = m\vec{g}$$

gdje je $\vec{g} = -g\hat{y}$.

Sada treba samo ispravno napisati pomake utega u tom koordinatnom sustavu.

$$\mathrm{d}\vec{s}_1 = -\mathrm{d}s\cos\alpha\,\hat{x} - \mathrm{d}s\sin\alpha\,\hat{y}$$

$$\mathrm{d}\vec{s}_2 = \mathrm{d}s\hat{y}$$

Ovdje je ds diferencijalni pomak niz kosinu definiran u b) dijelu zadatka. Sad možemo izračunati doprinose potencijalu od oba utega:

$$\mathrm{d}U = -\vec{G}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{s}_1 -= -\vec{G}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{s}_2$$

$$\mathrm{d}U = Mg\hat{y} \cdot (-\cos\alpha\,\hat{x} - \sin\alpha\,\hat{y})\,\mathrm{d}s + mg\hat{y} \cdot \hat{y}\,\mathrm{d}s$$

Znamo vektorske umnoške jediničnih vektora: $\hat{y} \cdot \hat{y} = 1$ i $\hat{y} \cdot \hat{x} = 0$, pa možemo integrirati da dobijemo ukupni potencijal ako se utezi pomaknu za bilo koji $s(t)$:

$$U\big(s(t)\big) = g(-M\sin\alpha + m)s(t)$$

Sad još treba izračunati kinetičku energiju. Oba utega se gibaju zajedno, što znaći da je njihova kinetička energija jednaka kinetičkoj energiji tijela mase $M + m$ koje se giba brzinom $\dot{s}(t)$:

$$E_k\big(\dot{s}(t)\big) = \frac{(M+m)}{2}\big(\dot{s}(t)\big)^2$$

Zakon o očuvanju energije vrijedi ako je ukupna energija nakon bilo kojeg vremena t jednaka početnoj energiji.

Ukupna energija u $t = 0$ mora biti jednaka ukupnoj energiji u bilo kojem drugom trenutku t:

$$U\big(s(0)\big) + E_k\big(\dot{s}(0)\big) = U\big(s(t)\big) + E_k\big(\dot{s}(t)\big)$$

U zadatku je zadano da tijelo miruje u $t = 0$, pa je $E_k\big(\dot{s}(0)\big) = 0$. Sad je očito zašto je $U\big(s(0)\big) = 0$ bio dobar izbor za potencijal jer se gornja jednadžba svodi na:

$$U\big(s(t)\big) + E_k\big(\dot{s}(t)\big) = 0$$

odnosno:

$$E_k\big(\dot{s}(t)\big) = -U\big(s(t)\big)$$

$$\frac{(M+m)}{2}\big(\dot{s}(t)\big)^2 = g(M\sin\alpha - m)s(t)$$

Sad još samo trebe izračunati položaj i brzinu. Vratimo se na jednadžbu gibanja:

$$\ddot{s} = g\frac{M\sin\alpha - m}{M+m}$$

S desne strane se nalaze mase, nagib kosine i gravitacijska akceleracija, što su sve konstante. Dakle, računamo položaj i brzinu sustava s konstantnom akceleracijom, što je već izvedeno u prethodnom primjeru:

$$\dot{s}(t) = g\frac{M\sin\alpha - m}{M+m}t$$

$$s(t) = g\frac{M\sin\alpha - m}{M+m}\frac{t^2}{2}$$

Uvrstimo u izraz za energiju i dobivamo:

$$\frac{(M+m)}{2}\left(g\frac{M\sin\alpha - m}{M+m}t\right)^2 = g(M\sin\alpha - m)g\frac{M\sin\alpha - m}{M+m}\frac{t^2}{2}$$

Ako podijelimo cijelu jednadžbu s $(M+m)$, lako se vidi da su lijeva i desna strana jednake za bilo koje vrijeme t.

QED

Napomena

Ovo je bio vrlo kompliciran i nepraktičan način rješavanja ovog problema za koji sam se odlučio samo zato jer je univerzalan (vrijedi za bilo koji potencijal).

U slučaju ovako jednostavnog potencijala, cijeli zadatak se može riješiti u par koraka. Promjena potencijalne energije ovisi samo o razlici visine u početnom i konačnom položaju, npr.

$$\Delta U_1 = Mg\Delta h_1$$

Ako je, ponovno, nagib takav da teži uteg pretegne, on će izgubiti potencijalnu energiju (jer se spustio), a razlika će se "potrošiti" na dizanje drugog utega i ubrzavanje cijelog sustava (tj. kinetičku energiju):

$$Mg\Delta h_1 = mg\Delta h_2 + \frac{(M+m)v^2}{2}$$

Kako je teži uteg na kosini, njegova razlika visine je (vidi sliku):

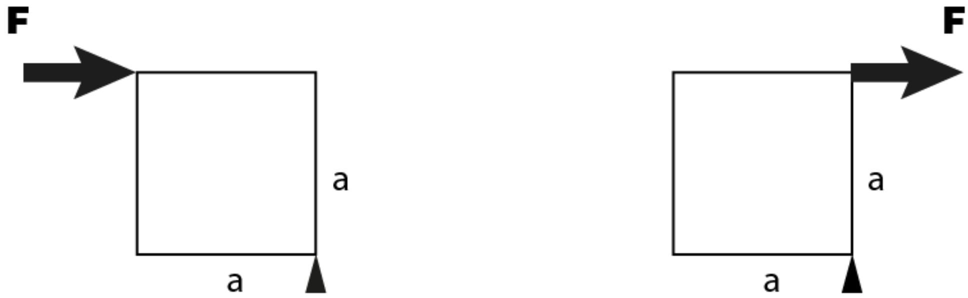
$$\Delta h_1 = s\sin\alpha$$

Ostalo je lako:

$$\Delta h_2 = s, \qquad v = \dot{s}$$

Ako se uvrste izrazi za položaj i brzinu, ponovno se sve pokrati.

Dva radnika pokušavaju prevrnuti kutije. Jedan gura, a drugi vuće kutiju (vidi sliku).



Ako su kutije oblika kocke i sve imaju istu masu, koji radnik treba proizvesti manju silu?

Rješenje:

Tražimo granični slučaj, tj. slučaj kad je sila točno tolika da kutija ne rotira i ne dodiruje podlogu (ako je sila premala, kutija neće rotirati u suprotnom smjeru jer joj podloga ne dopušta). Beskonačno malo povećanje sile će u tom trenutku dovesti do rotiranja kutije, što znaći da je to minimalna potrebna sila (analogno prošlom zadatku gdje je α_c bio minimalni nagib potreban da gravitacijska sila jednog ili drugog utega pretegne).

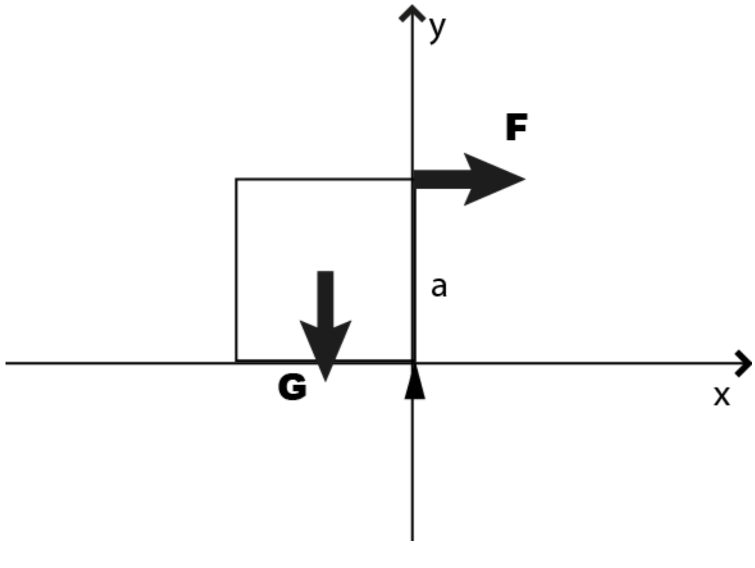
Tražimo uvijet da kutija ne rotira, tj.

$$\vec{\alpha} = 0$$

Dovoljno je da ukupni moment na kutiju isčezava:

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Pogledajmo drugi slučaj jer je jednostavniji. Postavit ćemo koordinatni sustav u centar rotacije, kako je obično praksa:



Jedine sile koje proizvode moment su gravitacijska sila kutije (koja djeluje iz centra mase) i sila kojom radnik vuče. Reakcija podloge na donju stranu kutije iščezava jer je to uvijet koji smo si postavili, a reakcija brida u ishodištu nema krak pa također iščezava. Jednadžba za iznos minimalne sile glasi:

$$\vec{r}_F \times \vec{F} + \vec{r}_G \times \vec{G} = 0$$

Da bismo izračunali vektorske umnoške, treba ispravno rastaviti sve vektore na komponente (vidi sliku!):

$$\vec{r}_F = a\hat{y}$$

$$\vec{F} = F\hat{x}$$

$$\vec{r}_G = -\frac{a}{2}\hat{x} - \frac{a}{2}\hat{y}$$

$$\vec{G} = -mg\hat{y}$$

Uvrštavamo ovako zapisane vektore natrag u jednadžbu za momente

$$(a\hat{y}) \times (F\hat{x}) + \left(-\frac{a}{2}\hat{x} - \frac{a}{2}\hat{y}\right) \times (-mg\hat{y}) = 0$$

i koristimo svojstvo distributivnosti:

$$Fa(\hat{y} \times \hat{x}) = \frac{mga}{2}(-\hat{x} \times \hat{y} - \hat{y} \times \hat{y})$$

Skalarni produkti jediničnih vektora su poznati:

$$\hat{x} \times \hat{y} = -\hat{y} \times \hat{x} = \hat{z}$$

$$\hat{y} \times \hat{y}$$

Te se dobiva da je potrebna sila jednaka polovici težine kutije:

$$F = \frac{mg}{2}$$

Pogledajmo sad radnika koji gura. Moment gravitacijske sile ostaje isti, kao i vektor sile, a položaj hvatišta je:

$$\vec{r}_F = -a\hat{x} - a\hat{y}$$

Pa je jednadžba za momente:

$$(-a\hat{x} - a\hat{y}) \times F\hat{y} = -\frac{mga}{2}$$

što se na kraju opet svodi na

$$F = \frac{mg}{2}$$

Minimalna potrebna sila za prevrnuti kutiju je jednaka u oba slučaja!

Vektori brzine i akceleracije:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}, \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{s}}{\mathrm{d}t}$$

Kutno gibanje:

$$\vec{\alpha} = \frac{a_T}{r}\hat{z}, \qquad \vec{\omega} = \frac{v_T}{r}\hat{z}, \qquad l = r\vartheta$$

$$\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}, \qquad \vec{\omega} = \frac{d\vec{\vartheta}}{\mathrm{d}t}$$

Sila:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}\,, \qquad \vec{F}_{A\rightarrow B} = -\vec{F}_{B\rightarrow A}$$

$$F_{trenje} = \mu N, \qquad F_{gravitacija} = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = mg, \qquad \vec{a}_{centripetalna} \equiv \frac{{v_T}^2}{r}(-\hat{r})$$

Moment sile:

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$$

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

Energija i rad:

$$U(s) = -\int_{s_o}^{s} F(s')\mathrm{d}s'\,, \qquad E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

$$\sum_i \Delta E_i = \int \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

Impuls i količina gibanja:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\sum_i \Delta\vec{p}_i = \int \vec{F}dt$$

Kutna količina gibanja:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$