Primjeri zadataka – drugi kolokvij

1. Na oprugu konstante k i relaksirane duljine d obješen je uteg mase m.
   a) Nacrtajte dijagram sila i napišite jednadžbu gibanja za uteg.
   b) Odredite visinu na kojoj uteg miruje u svakom trenutku $t > 0$ ako miruje u trenutku $t = 0$.
   c) Pokažite da za početni uvijet $y(0) = y_0$ i $\dot{y}(0) = 0$, jednadžba gibanja za položaj utega ima oscilatorno rješenje oblika $A\cos\omega t$, te odredite amplitudu i kutnu frekvenciju.
   d) Pokažite da promjena količine gibanja utega dolazi od impulsa sila koje djeluju na uteg.

Rješenje:

Sile koje djeluju na sustav su gravitacijska sila $\vec{G} = -mg\hat{y}$ (uvijek prema dolje) i elastična sila opruge $\vec{F}_{el} = -k(y-d)\hat{y}$ čiji smjer ovisi o tome je li visina utega veća ili manja od točke gdje je opruga relaksirana (tj. je li opruga rastegnuta ili sabijena). Skicu nacrtajte sami.

Odabir koordinatnog sustava je proizvoljan, pa ćemo postaviti y-os tako da je ishodište u točki u kojoj je opruga relaksirana, tj. $d = 0$. Sustav je jednodimenzionalan, pa možemo izostaviti jedinićne vektore. Jednadžba gibanja je tada, po 2. Newtonovom zakonu,

$$m\ddot{y} = -mg - ky$$

odnosno:

$$\ddot{y} = -g - \frac{k}{m}y$$

Ako sustav miruje u početnom trenutku, tj. ako $\dot{y}(0) = 0$, dovoljno je pokazati da se brzina ne mijenja da bismo dobili stacionarno rješenje. Brzina se ne mijenja ako je akceleracija u svakom trenutku nula, pa uvrštavamo taj uvijet u jednadžbu gibanja da bismo dobili točku stabilnosti:

$$-g - \frac{k}{m}y_{eq} = 0$$

$$y_{eq} = -\frac{mg}{k}$$

NB – Ovo je dobro mjesto za provjeriti predznake. Ako na opuštenu objesimo uteg, očekujemo da će se kraj opruge spustiti, tj. znamo da moramo dobiti $y_{eq} < 0$. Sve konstante u gornjem izrazu su pozitivno definirane, tako da smo zaista i dobili y_{eq} koji je negativan.

Jednadžba gibanja se može svesti na formu koju je lakše riješiti ako uvedemo transformaciju koordinata oblika $y = x + y_{eq}$, gdje x predstavlja pomak od točke ravnoteže. S obzirom da je y_{eq} konstanta, $\ddot{y} = \ddot{x}$. Uvrštavanjem dobivamo jednadžbu gibanja za pomak iz ravnoteže:

$$\ddot{x} = -g - \frac{k}{m}\left(x - y_{eq}\right)$$

Korištenjem definicije $y_{eq} = -mg/k$ dobivamo lako riješivu formu

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

Znamo da su x i y samo pomaknuti za neku konstantu, pa ako pretpostavimo oscilatorno rješenje za y oblika, očekujemo da će i rješenje za x biti oscilatorno. Pokušat ćemo sa $x(t) = A\cos\omega t$. Deriviramo $x(t)$ dva puta:

$$\dot{x}(t) = -\omega A\sin\omega t$$
$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A\cos\omega t$$

Zatim uvrštavamo $x(t)\ i\ \ddot{x}(t)$ u jednadžbu gibanja:

$$-\omega^2 A\cos\omega t = -\frac{k}{m}A\cos\omega t$$

Pokratimo $A\cos\omega t$ s obje strane, te korjenujemo da dobijemo izraz za kutnu frekvenciju:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Da bismo dobili amplitudu, koristimo početni uvijet $y(0) = y_0$. Znamo da je $x(t) = y(t) - y_{eq}$, pa je za $t = 0$:

$$A\cos\omega\cdot 0 = y(0) - y_{eq}$$
$$A = y_0 - y_{eq}$$

Sad imamo potpuno rješenje za $x(t)$:

$$x(t) = \left(y_0 - y_{eq}\right)\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

Pa je rješenje za $y(t)$ jednostavno dobiti:

$$y(t) = y_{eq} + \left(y_0 - y_{eq}\right) \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

Količina gibanja u $t = 0$ se dobiva iz početnog uvjeta:

$$\vec{p}(0) = m\dot{y}(0)\hat{y} = 0$$

Nakon nekog vremena t, uteg je dobio impuls

$$\vec{I}(t) = \int_0^t \vec{F} \mathrm{d}t'$$

Treba pokazati da je

$$\vec{p}(t) - \vec{p}(0) = \vec{I}(t)$$

Ponovno koristimo činjenicu da je sustav jednodimenzionalan, te računamo samo s iznosima. Iznos ukupne sile koja djeluje na uteg je $F = -mg - ky$, te u taj izraz prvo uvrstimo izraze za $y(t)\ i\ y_{eq}$:

$$F = -mg - k\left(-\frac{mg}{k} + A \cos \omega t\right)$$
$$F = -k\ A \cos \omega t$$

Ovdje smo se prije računanja impulsa riješili doprinosa od gravitacijske sile, što će nam olakšati danji račun. Sad deriviramo y i uvrštavamo u izraz za količinu gibanja, te izjednačavamo s integralom sile po vremenu:

$$-m\omega A \sin \omega t = -k\ A \int_0^t \cos \omega t' \,\mathrm{d}t'$$

Pokratimo amplitude i minuse s obje strane, te koristimo izraz za kutnu frekvenciju:

$$m \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t = k\ \int_0^t \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t' \,\mathrm{d}t'$$

Integral dobivamo iz tablica: $\int \cos \omega t \,\mathrm{d}t = (\sin \omega t)/\omega$, a $\sin 0 = 0$, pa na kraju imamo:

$$m\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t = k\frac{\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Gdje je očito da se svi članovi mogu pokratiti.