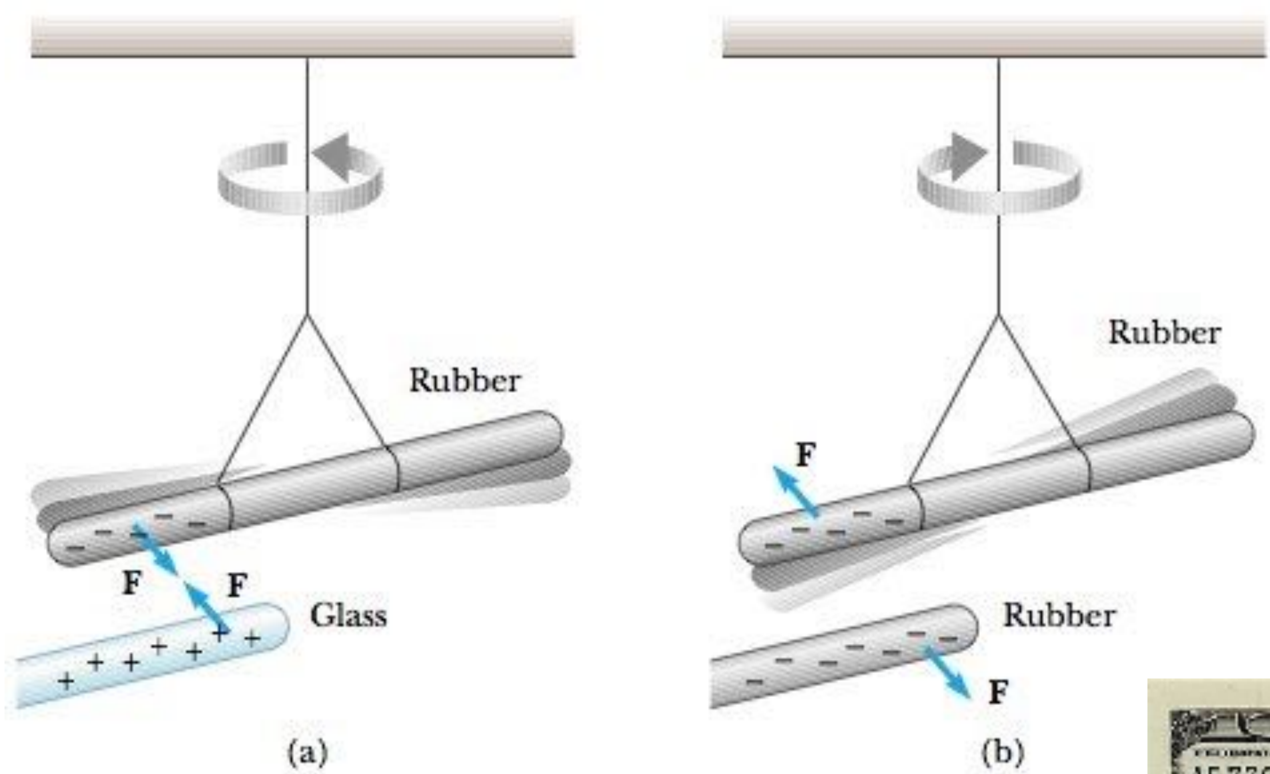
ELEKTRIČNA POLJA
GAUSSOV ZAKON
ELEKTRIČNI POTENCIJAL

Svojstva električnih naboja

- Benjamin Franklin (1706-1790) nizom eksperimenata pokazao je postojanje dvije vrste naboja: pozitivan i negativan
- pozitivan naboj posjeduju protoni, a negativan elektroni
- istoimeni naboji (++, --) se međusobno odbijaju, a raznoimeni (-+) se privlače



Električni naboj je očuvan u svakom izoliranom sustavu

Svojstva električnih naboja

- 1909. Milikan je pokazao da je električni naboj kvantiziran, odnosno da se sastoji od diskretnih vrijednosti
- $q = N \cdot e$ $N = 1, 2, 3, 4....$
- naboj elektrona: -e, naboj protona: +e, naboj neutrona: 0

Naboj elektrona: $e = 1.60219 \times 10^{-19}$ C

Podjela tvari prema električnim svojstvima

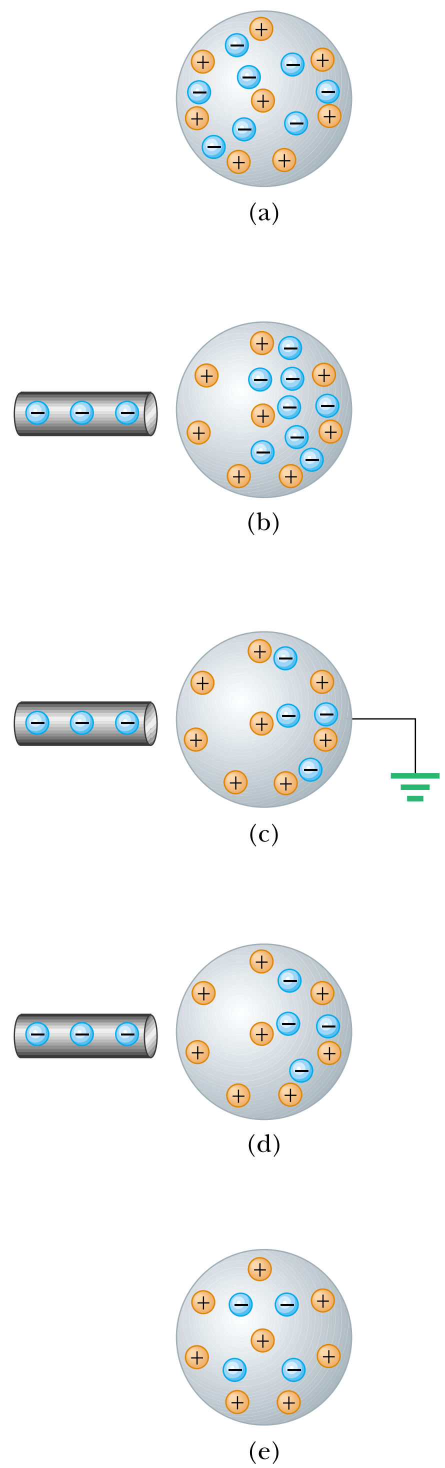
vodiči

izolatori

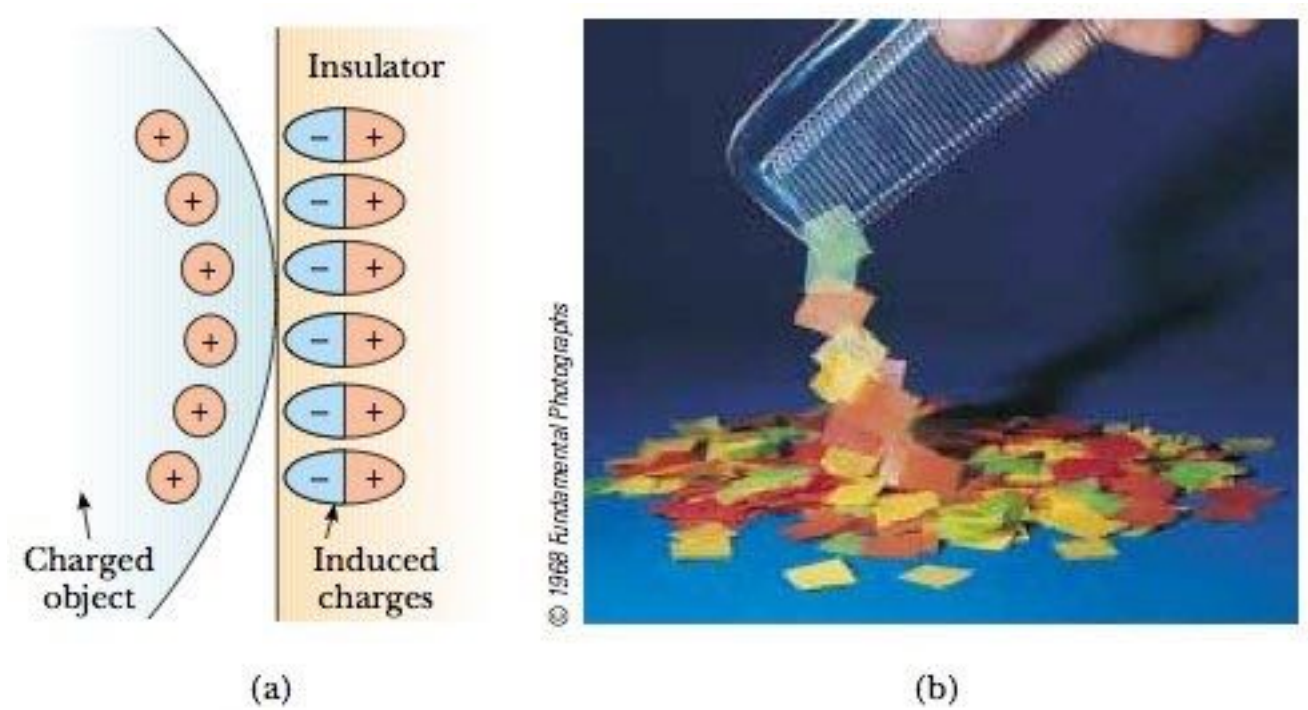
- električni vodiči posjeduju određeni dio slobodnih elektrona koji se mogu gibati kroz materijal
- kod električnih izolatora svi elektroni su vezani za atome koji se nalaze na fiksnim položajima

Električno nabijanje indukcijom

Nabijanje vodiča indukcijom:



Nabijanje izolatora indukcijom:



COULOMBOV ZAKON

Charles Coulomb (1736-1806) izmjerio je silu između nabijenih tijela, upotrebom torzijske vage koju je osobno konstruirao

Coulombova opažanja:
1. električna sila je inverzno proporcionalna udaljenosti među tijelima, i usmjerena duž linije koja ih povezuje
2. električna sila je proporcionalna umnošku naboja q_1 i q_2 koje nose tijela
3. električna sila je privlačna ukoliko naboji raznoimeni a odbojna ukoliko su naboji istoimeni
4. električna sila je konzervativna

Coulombov zakon za dva točkasta naboja:

$$F_e = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

$k_e = 8.9875 \times 10^9 \ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$

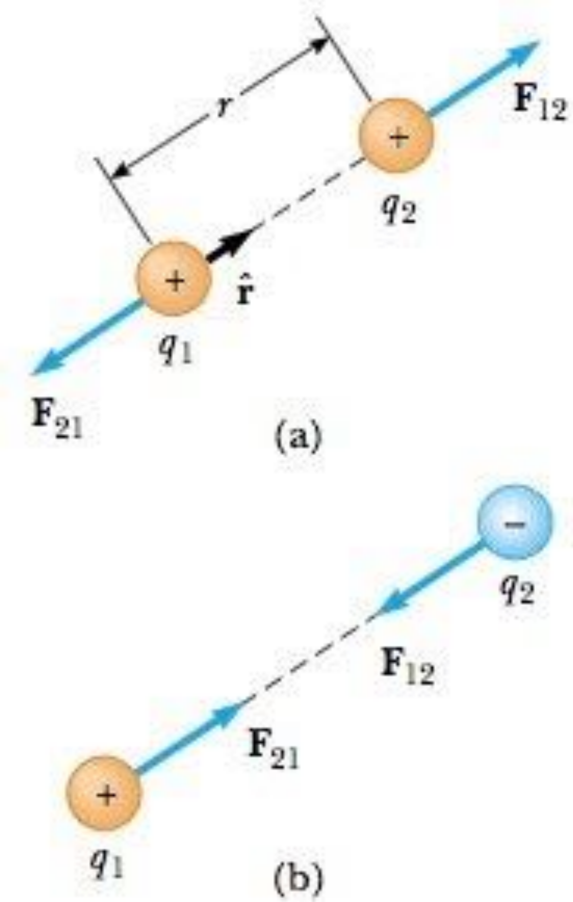
$$k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

ε_0 - permitivnost vakuuma
$\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}$

Naboj elektrona: $e = 1.60219 \times 10^{-19}$ C

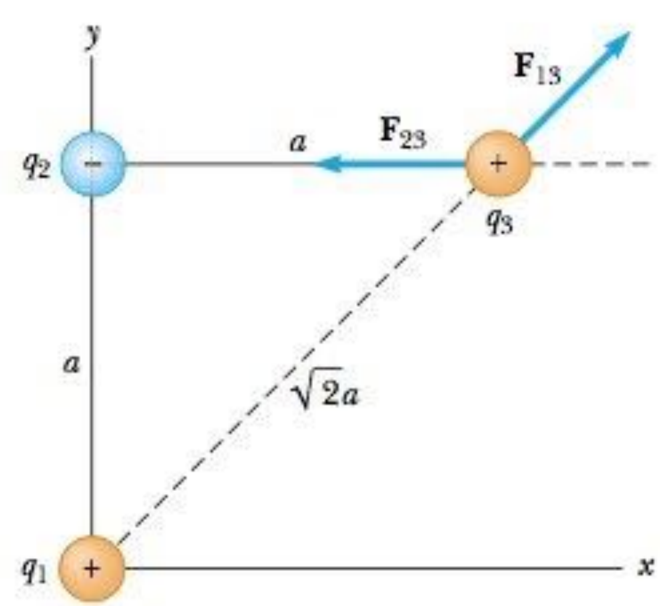
Coulombov zakon

Charge and Mass of the Electron, Proton, and Neutron		
Particle	Charge (C)	Mass (kg)
Electron (e)	$-1.602\,191\,7 \times 10^{-19}$	$9.109\,5 \times 10^{-31}$
Proton (p)	$+1.602\,191\,7 \times 10^{-19}$	$1.672\,61 \times 10^{-27}$
Neutron (n)	0	$1.674\,92 \times 10^{-27}$



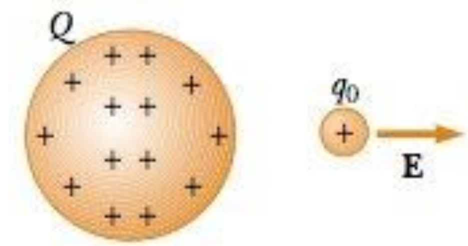
$$\vec{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

Primjer:
rezultatna sila na treći naboj



Električno polje

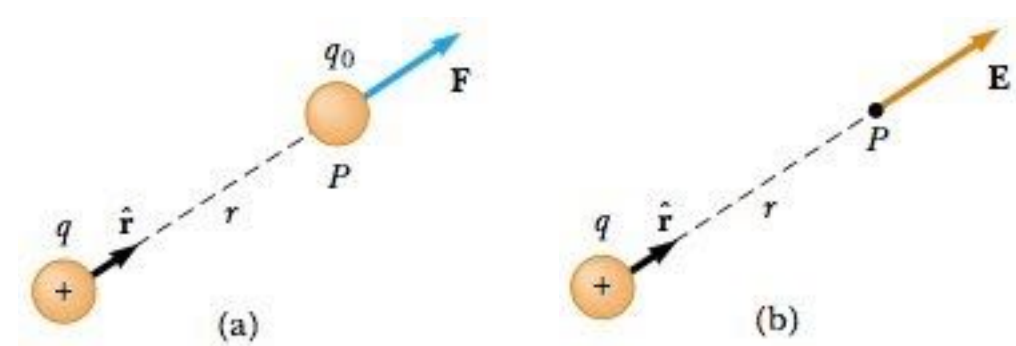
- električno polje postoji u blizini svakog nabijenog predmeta
- analogija s gravitacijskim poljem ($g = F_g / m$)
- kada drugi nabijeni predmet - testni naboj - ulazi u polje, na njega djeluje električna sila



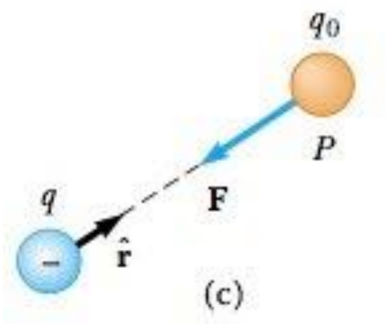
Vektor električnog polja **E** u nekoj točki prostora definiran je kao električna sila **F**$_e$ koja djeluje na pozitivan testni naboj q_0 koji se nalazi u toj točki, podijeljen s testnim nabojem:

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}_e}{q_0} \quad \left[\frac{N}{C}\right]$$

Također možemo pisati: $\vec{F}_e = q\vec{E}$

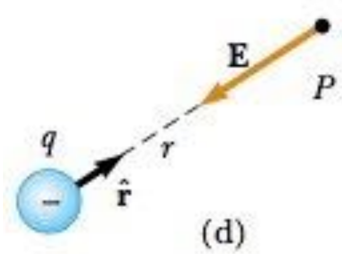


Električno polje



Električno polje točkastog naboja:

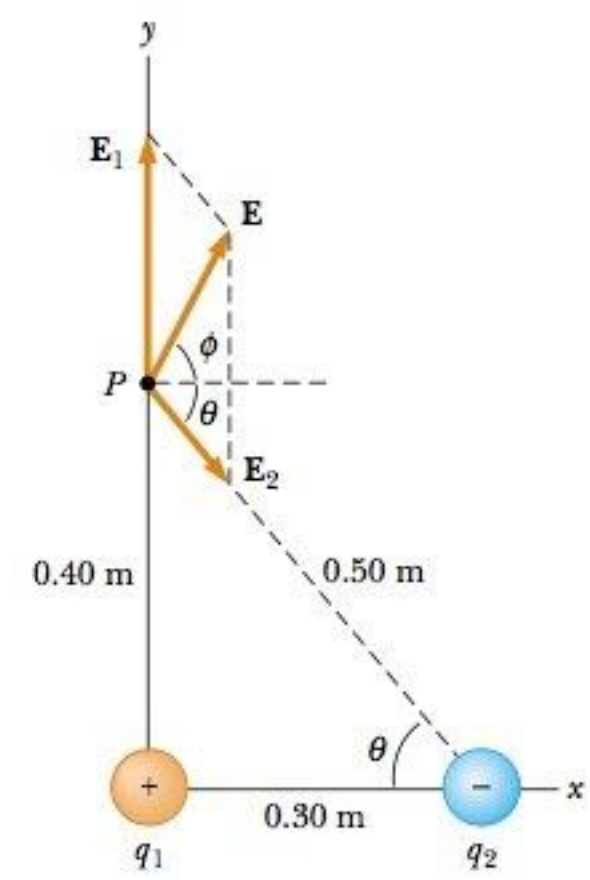
$$\vec{F}_e = k_e \frac{q q_0}{r^2} \hat{r}, \quad \vec{E} = \vec{F}_e / q_0$$



$$\boxed{\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r}}$$

U bilo kojoj točki *P*, ukupno električno polje zbog skupine točkastih naboja jednako je vektorskom zbroju električnih polja svih naboja.

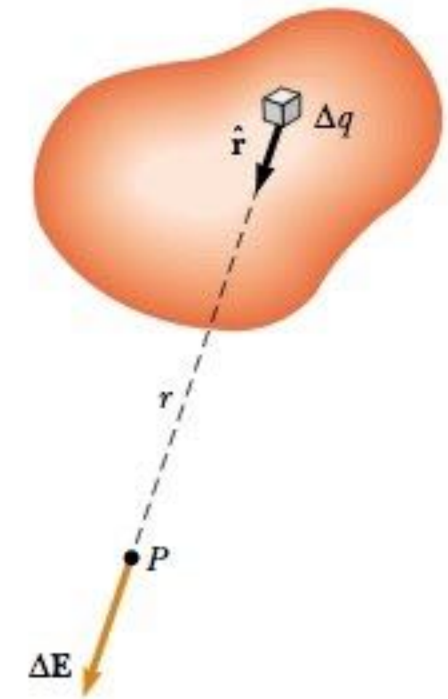
$$\boxed{\vec{E} = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i}$$



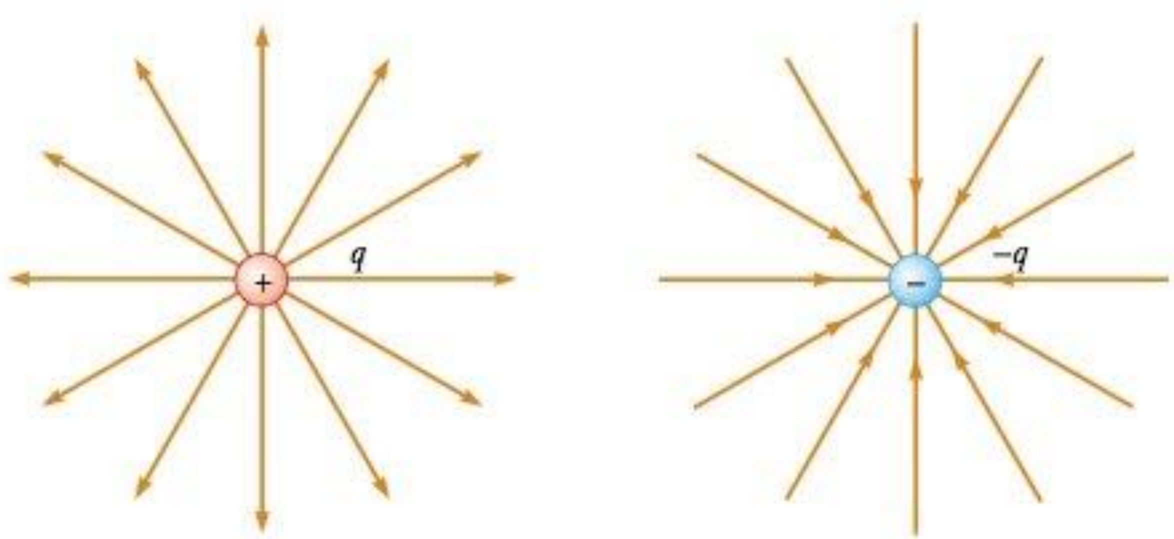
ELEKTRIČNO POLJE KONTINUIRANE RASPODJELE NABOJA

$$\Delta\vec{E} = k_e \frac{\Delta q}{r^2}\hat{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \approx k_e \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2}\hat{r}$$

$$\boxed{\vec{E} = k_e \lim_{\Delta q_i \to 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2}\hat{r}_i = k_e \int \frac{dq}{r^2}\hat{r}}$$

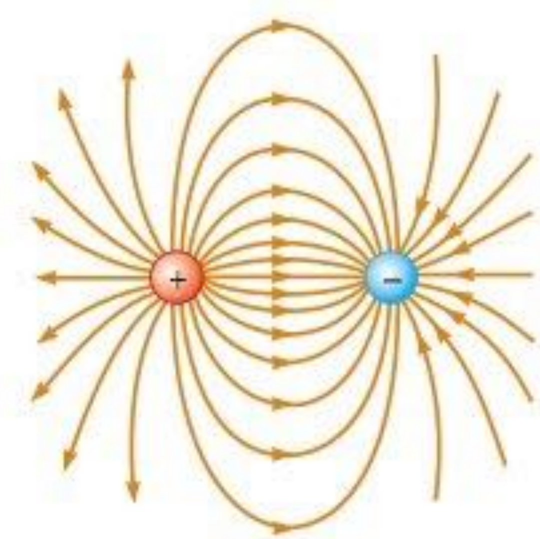


silnice električnog polja točkastih naboja:



(a) (b)

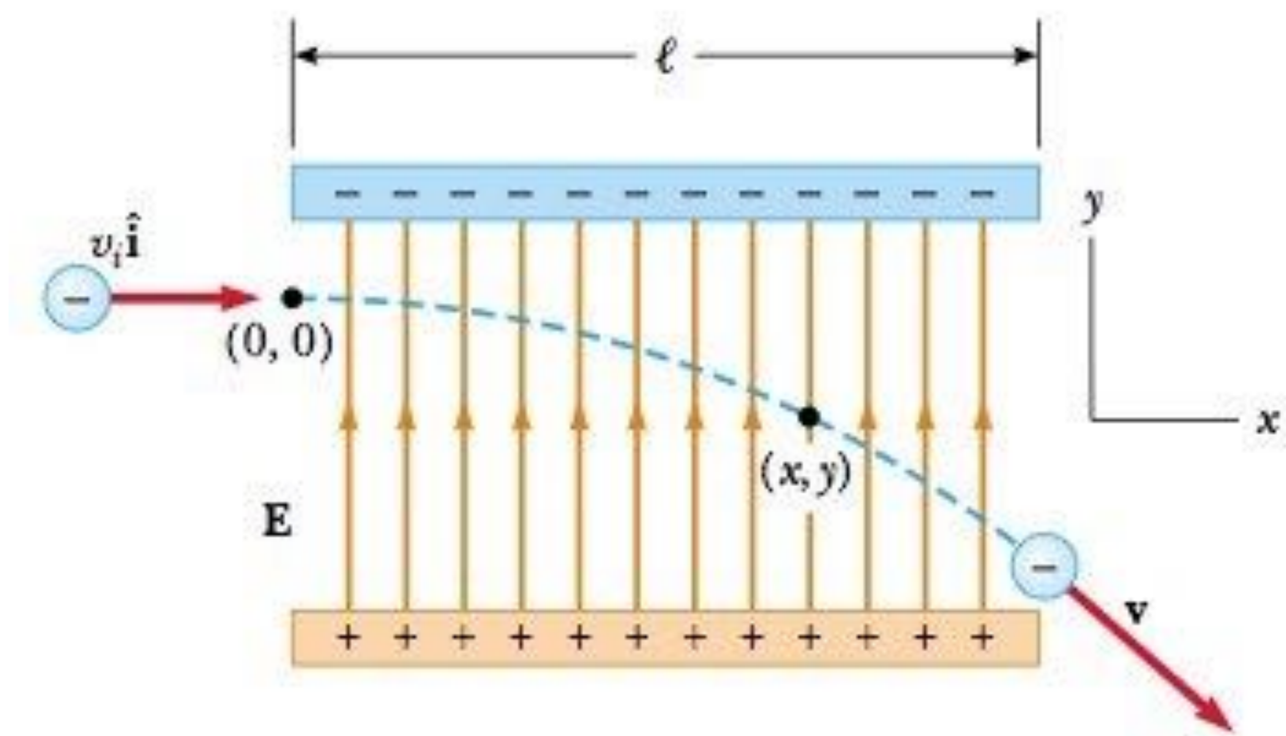
silnice el. polja dipola:



(a)

Gibanje nabijene čestice u jednolikom električnom polju

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}}$$



$$v_x = v_i = \text{constant}$$

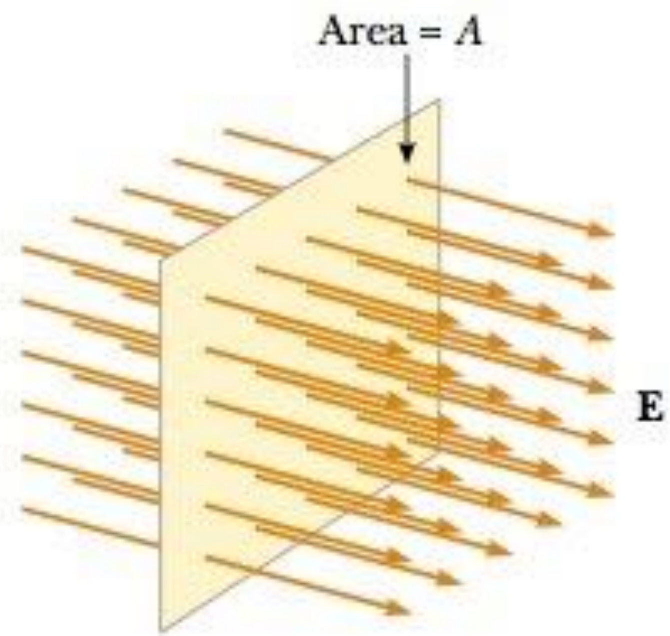
$$v_y = a_y t = -\frac{eE}{m_e} t$$

$$x_f = v_i t$$

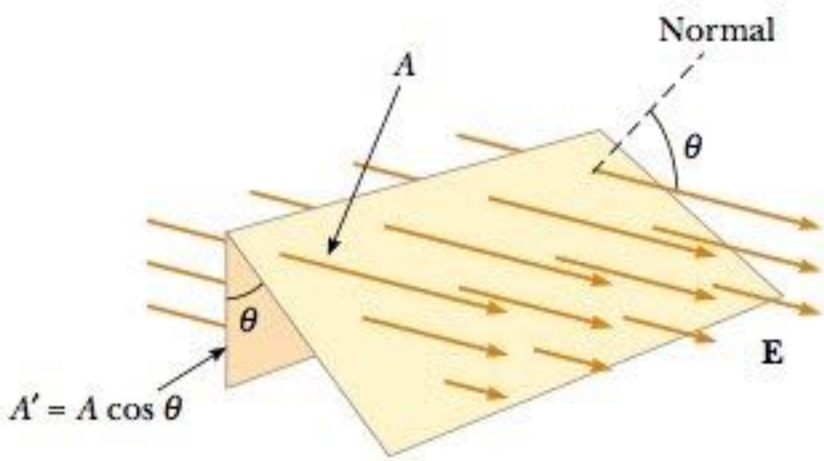
$$y_f = \frac{1}{2} a_y t^2 = -\frac{1}{2} \frac{eE}{m_e} t^2$$

ELEKTRIČNI TOK

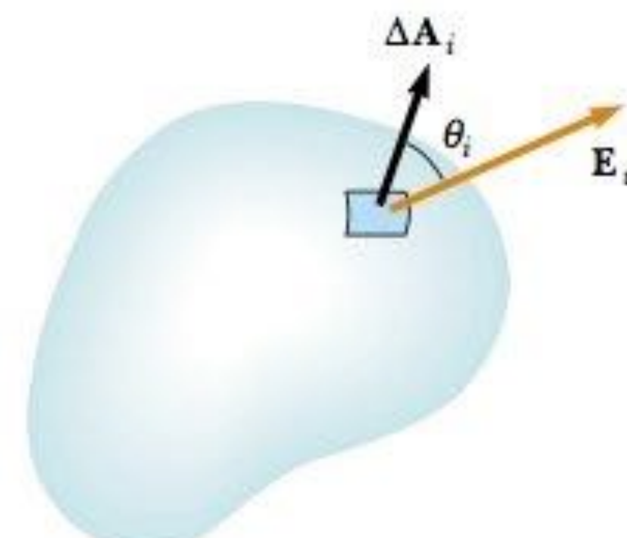
Električni tok je umnožak jakosti električnog polja i površine plohe okomite na polje:



$$\Phi_e = \vec{E} \cdot \vec{A} = E \cdot A \cdot \cos\varphi$$



U slučaju kada električno polje nije jednoliko:



$$\Delta\Phi_E = E_i \Delta A_i \cos\theta_i = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

$$\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

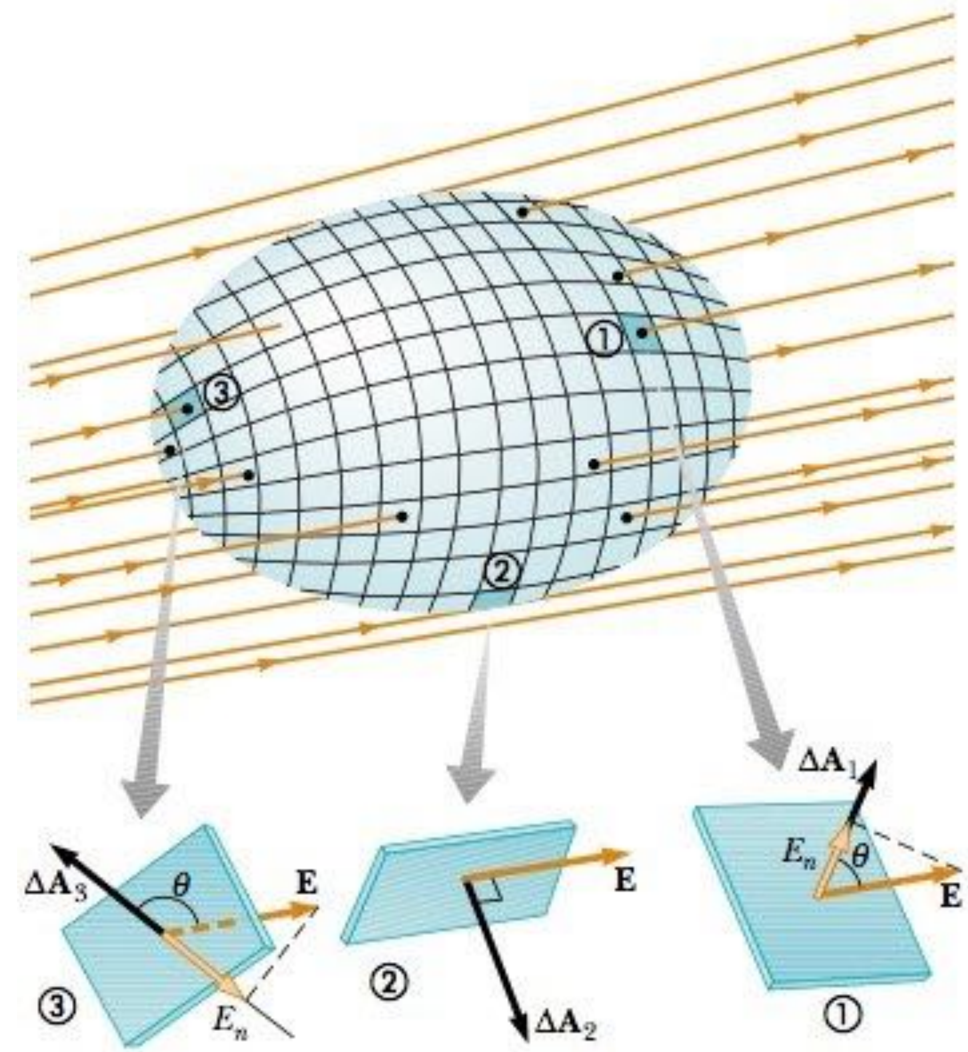
ELEKTRIČNI TOK

Često nas zanima tok kroz zatvorenu plohu!

Ukoliko je broj silnica koje ulaze u plohu veći od onoga koji iz nje izlaze ➙ tok je manji od nule.

Ukoliko je broj silnica koje ulaze u plohu manji od onoga koji iz nje izlaze ➙ tok je veći od nule.

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E_n \, dA$$

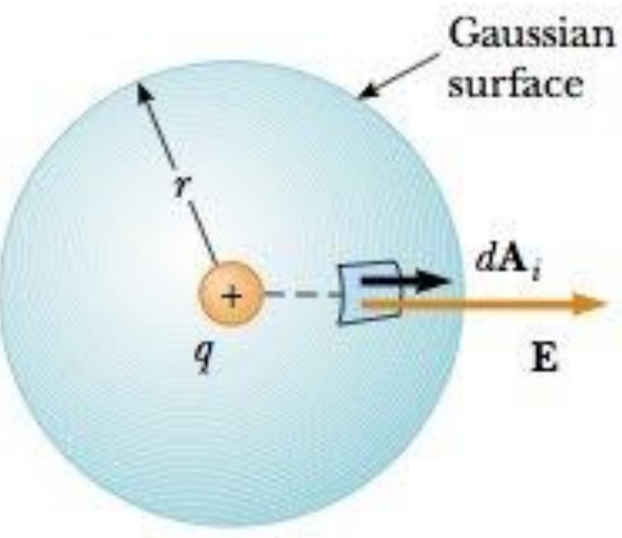


GAUSSOV ZAKON

Gaussov zakon nam daje izravnu vezu između električnog toka kroz neku zatvorenu plohu i naboja koji se nalazi unutar te plohe.

Primjer sfere:

$$\vec{E} \cdot \Delta\vec{A}_i = E \cdot \Delta A_i$$



$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E\, dA = E \oint dA$$

$$\boxed{\Phi_E = \frac{k_e q}{r^2}\left(4\pi r^2\right) = 4\pi k_e q = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

- vrijedi za bilo koju zatvorenu plohu, ne samo sferu

Električni tok kroz bilo koju zatvorenu plohu, u kojoj se ne nalaze električni naboji, jednak je nuli!

GAUSSOV ZAKON

Općenito, za više naboja i/ili kontinuiranu raspodjelu naboja:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{inc}}{\varepsilon_0}$$

E predstavlja električno polje u bilo kojoj točki koja se nalazi na površini plohe, a q_{inc} predstavlja ukupan naboj koji se nalazi unutar plohe.

Carl Friedrich Gauss
(1777.-1855.)

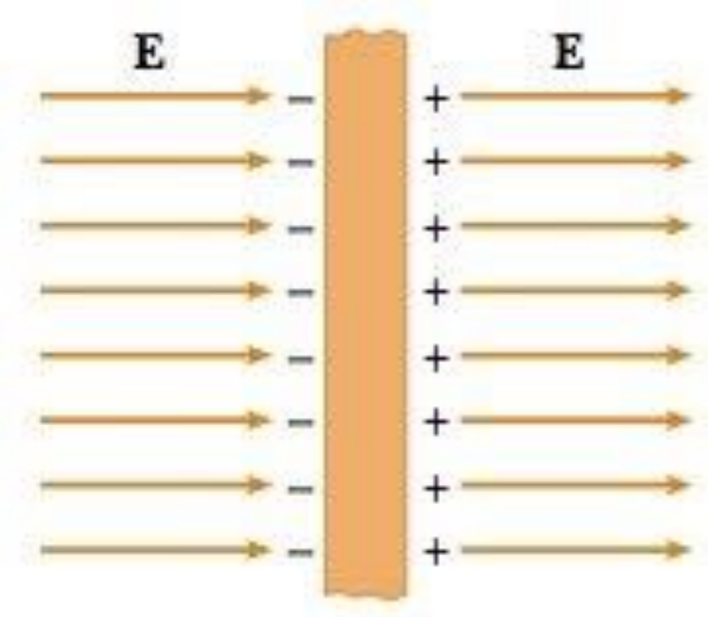
Gaussov zakon

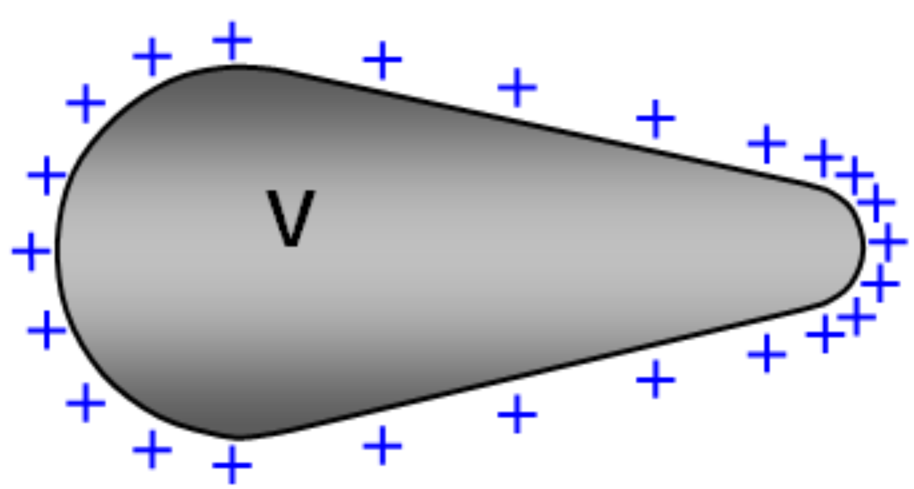
Typical Electric Field Calculations Using Gauss's Law		
Charge Distribution	**Electric Field**	**Location**
Insulating sphere of radius R, uniform charge density, and total charge Q	$k_e \dfrac{Q}{r^2}$	$r > R$
	$k_e \dfrac{Q}{R^2} r$	$r < R$
Thin spherical shell of radius R and total charge Q	$k_e \dfrac{Q}{r^2}$	$r > R$
	0	$r < R$
Line charge of infinite length and charge per unit length λ	$2k_e \dfrac{\lambda}{r}$	Outside the line
Infinite charged plane having surface charge density σ	$\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}$	Everywhere outside the plane
Conductor having surface charge density σ	$\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}$	Just outside the conductor
	0	Inside the conductor

VODIČI U ELEKTROSTATSKOJ RAVNOTEŽI

Vodič je u stanju elektrostatske ravnoteže kada ne postoji gibanje elektrona u njegovoj unutrašnjosti

1. električno polje u unutrašnjosti vodiča je 0
2. ukoliko je vodič nabijen, sav višak naboja nalazi se na površini vodiča
3. električno polje tik uz površinu vodiča okomito je na tu površinu, i po iznosu jednako σ / ε_0, gdje je σ površinska gustoća naboja (naboj po jedinici površine)
4. kod vodiča nepravilnog oblika, površinska gustoća naboja najveća je na površinama gdje je polumjer zakrivljenja najmanji



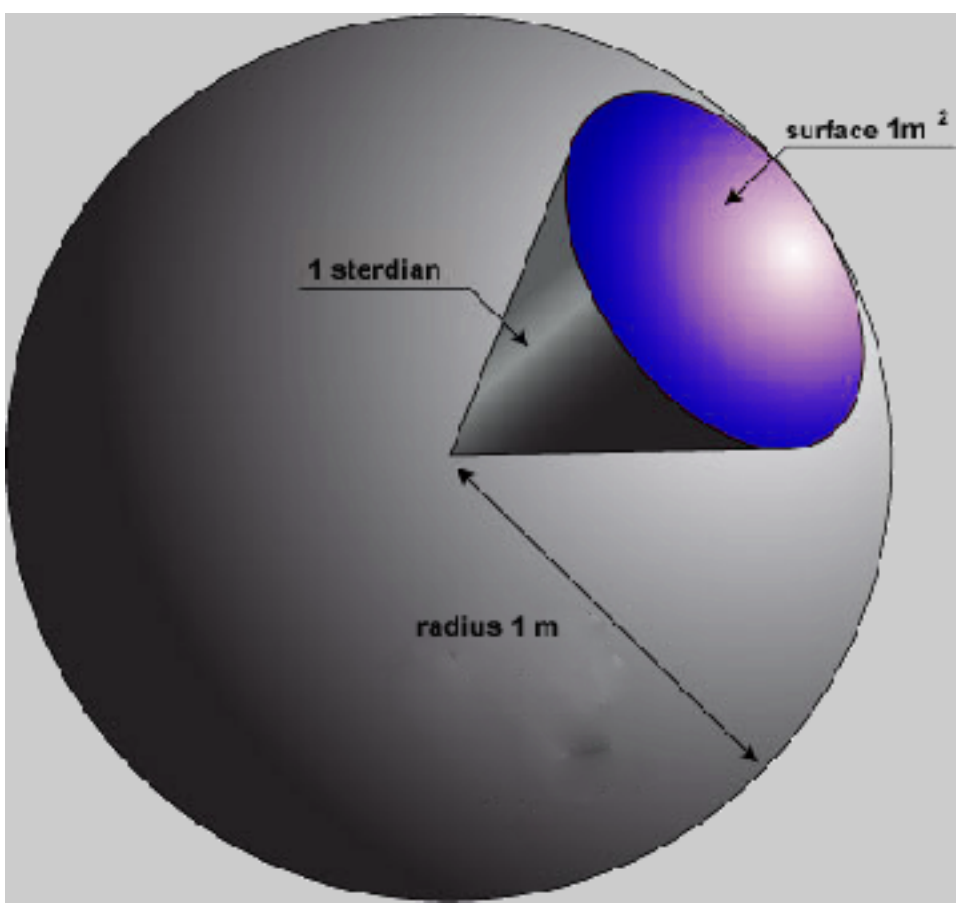


IZVOD GAUSSOVOG ZAKONA

Prostorni kut: zamislimo sferu polumjera *r*, i dio njene površine ΔA. Prostorni kut tada je definiran kao:

$$\boxed{\Omega \equiv \frac{dA}{r^2} \quad [\text{steradijan}]}$$

Prostorni kut sfere je 4π.



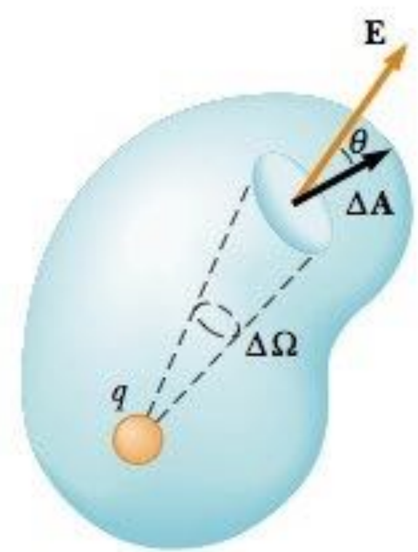
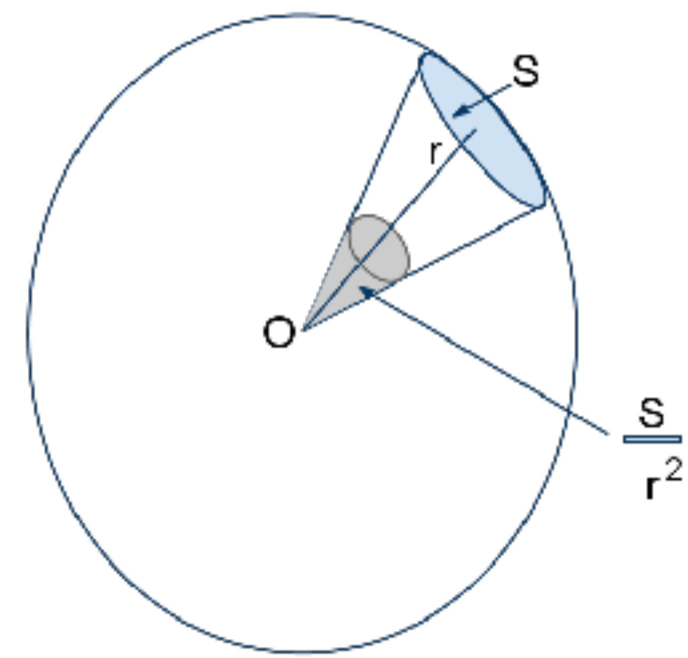


Figure 24.22 A closed surface of arbitrary shape surrounds a point charge *q*. The net electric flux through the surface is independent of the shape of the surface.



IZVOD GAUSSOVOG ZAKONA

Tok kroz infinitezimalni dio površine d*A*:

$$\Delta\Phi_E = \vec{E}\cdot\Delta\vec{A} = \left(E\cos\theta\right)\Delta A = k_e q\frac{\Delta A\cos\theta}{r^2}$$

$\Delta A \cdot \cos\theta$ je projekcija elementa površine ΔA okomitog na radijvektor ***r***.
Dakle, prostorni kut koji element sferne površine s nabojem q jednak je:

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A\cdot\cos\theta}{r^2}$$

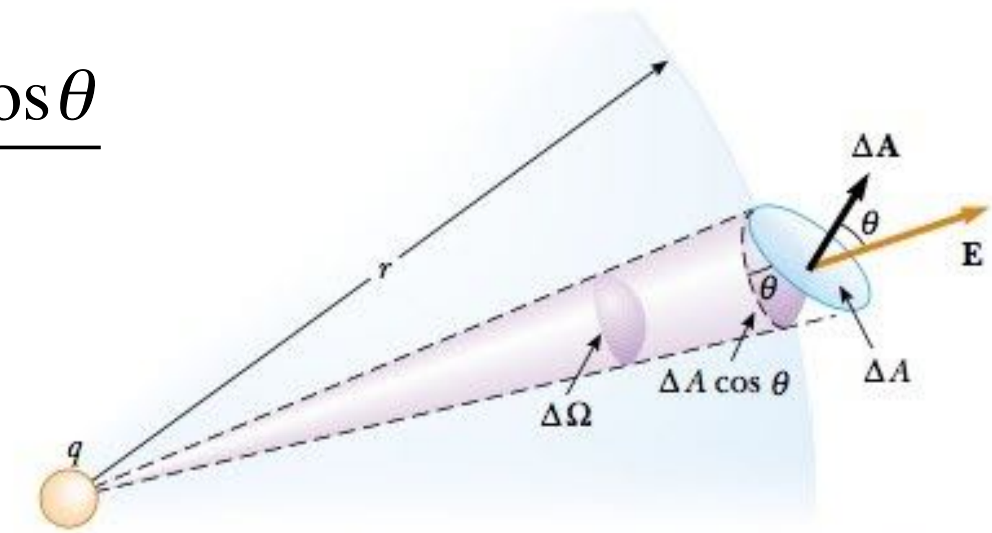


Figure 24.23 The area element ΔA subtends a solid angle $\Delta\Omega = (\Delta A\cos\theta)/r^2$ at the charge q.

Gaussov zakon:

$$\boxed{\Phi_E = k_e q\oint\frac{dA\cos\theta}{r^2} = k_e q\oint d\Omega = 4\pi k_e q = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

ELEKTRIČNI POTENCIJAL

- testni naboj q_0 postavi se u električno polje $\boldsymbol{E}$ ⇨ na njega djeluje sila $\boldsymbol{F} = q_0 \cdot \boldsymbol{E}$
- sila $\boldsymbol{F}$ je konzervativna ⇨ slijedi iz Coulombovog zakona
- pomaknemo testni naboj za vektor $\boldsymbol{r}$ ⇨ obavljeni rad je $W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}$
- analogija s gravitacijskim potencijalnim poljem
- za infinitezimalni pomak naboja d**s**, rad koji je električno polje je obavilo na naboj je: $\boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \boldsymbol{E} \cdot d\mathbf{s}$
- samim time, promjena potencijalne energije sustava polje-naboj promijenila se za $\Delta U = q_0 \boldsymbol{E} \cdot d\mathbf{s}$
- za pomak naboja iz točke A u točku B promjena potencijalne energije sustava polje-naboj promijenila se za:

$$\boxed{\Delta U = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

Linijski integral ne ovisi o putu između A i B

ELEKTRIČNI POTENCIJAL

- za dani položaj testnog naboja q_0 u polju, sustav polje-testni naboj posjeduje potencijalnu energiju U - u odnosu na neku konfiguraciju gdje je $U = 0$
- dijeljenjem te potencijalne energije s q_0 dobivamo fizičku vrijednost koja ovisi samo o konfiguraciji naboja i definirana je za svaku točku polja
- tu veličinu nazivamo potencijal:

$$\boxed{V = \frac{U}{q_0}}$$

- potencijalna energija i električni potencijal su skalarne veličine
- razlika potencijala između dvije točke u električnom polju, V_A-V_B, jednaka je razlici potencijalnih energija kod pomicanja testnog naboja iz točke A u točku B podijeljena s tim nabojem:

$$\boxed{\Delta V \equiv \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

- kao i kod potencijalne energije, bitne su jedino *razlike* potencijala
- najčešće se bira neka referenta točka za koju se uzima da je potencijal jednak nuli

ELEKTRIČNI POTENCIJAL

- ne brkati potencijal i potencijalnu energiju!
- razlika potencijala između A i B ovisi samo o raspodjeli naboja, dok razlika potencijalnih energija postoji jedino ako dolazi do pomaka testnog naboja

Električni potencijal je skalarna osobina električnog polja, neovisna o naboju koji se može staviti u polje

- rad obavljen pomicanjem naboja q u električnom polju je:

$$\boxed{W = q\Delta V}$$

- SI jedinica za električni potencijal i promjenu potencijala je Volt

$$1\ \mathrm{V} \equiv 1\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}$$

- mjerne jedinice električnog polja:

$$1\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = 1\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

Električni potencijal

- jedinica za mjeru koja se često koristi u fizici je elektron-volt (eV)
- to je promjena energije elementarnog naboja kada prijeđe razliku potencijala 1 V

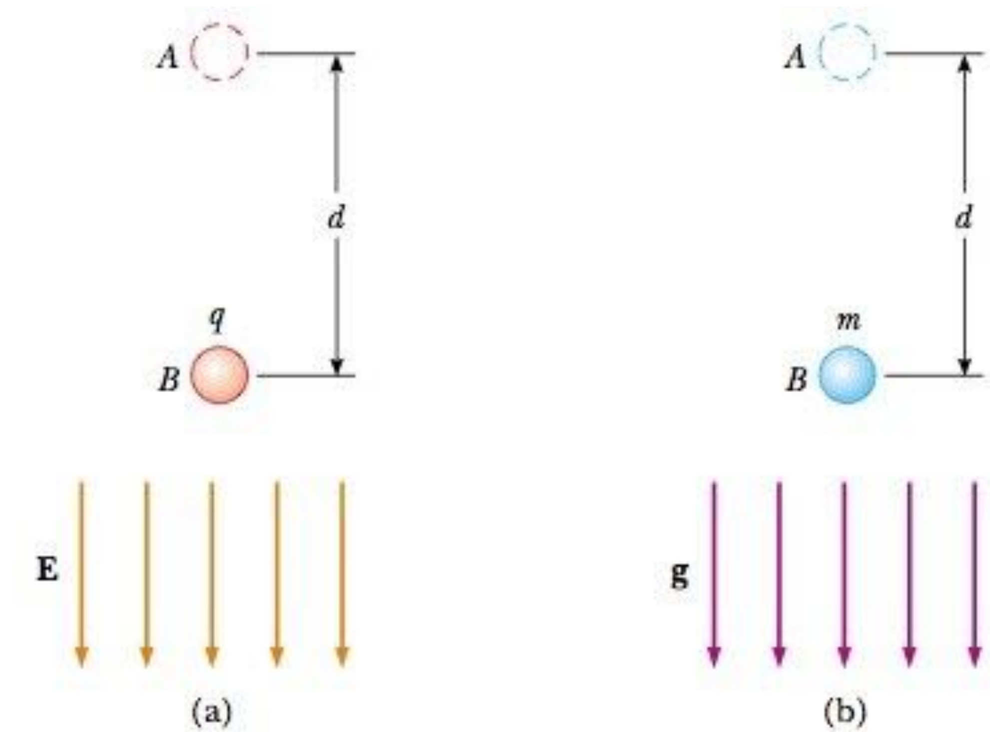
$$\boxed{1\,\mathrm{eV} = 1.6\times10^{-19}\ \mathrm{C}\cdot\mathrm{V} = 1.6\times10^{-19}\ \mathrm{J}}$$

Jednoliko električno polje:

$$V_B - V_A = \Delta V = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_A^B \left(E\cos 0^\circ\right)ds = -\int_A^B E\,ds$$

$$\Delta V = -E\int_A^B ds = -Ed$$

$V_B < V_A$ ⇨ silnice električnog polje uvijek su usmjerene prema nižem potencijalu



Električni potencijal

- promjena potencijalne energije sustava, prilikom pomaka električnog naboja iz točke A u točku B:

$$\boxed{\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 E d}$$

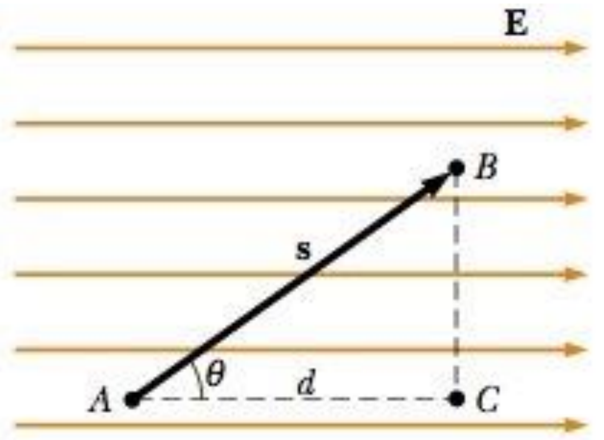
- za $q > 0$, potencijalna energija se smanjuje kada se naboj giba u smjeru električnog polja
- ukoliko pozitivan naboj pustimo u električnom polju, ono ga ubrzava u smjeru polja, time povećava kinetičku energiju naboja i smanjuje potencijalnu energiju

- za $q < 0$, potencijalna energija se povećava kada se naboj giba u smjeru električnog polja

Općeniti slučaj za jednoliko električno polje:

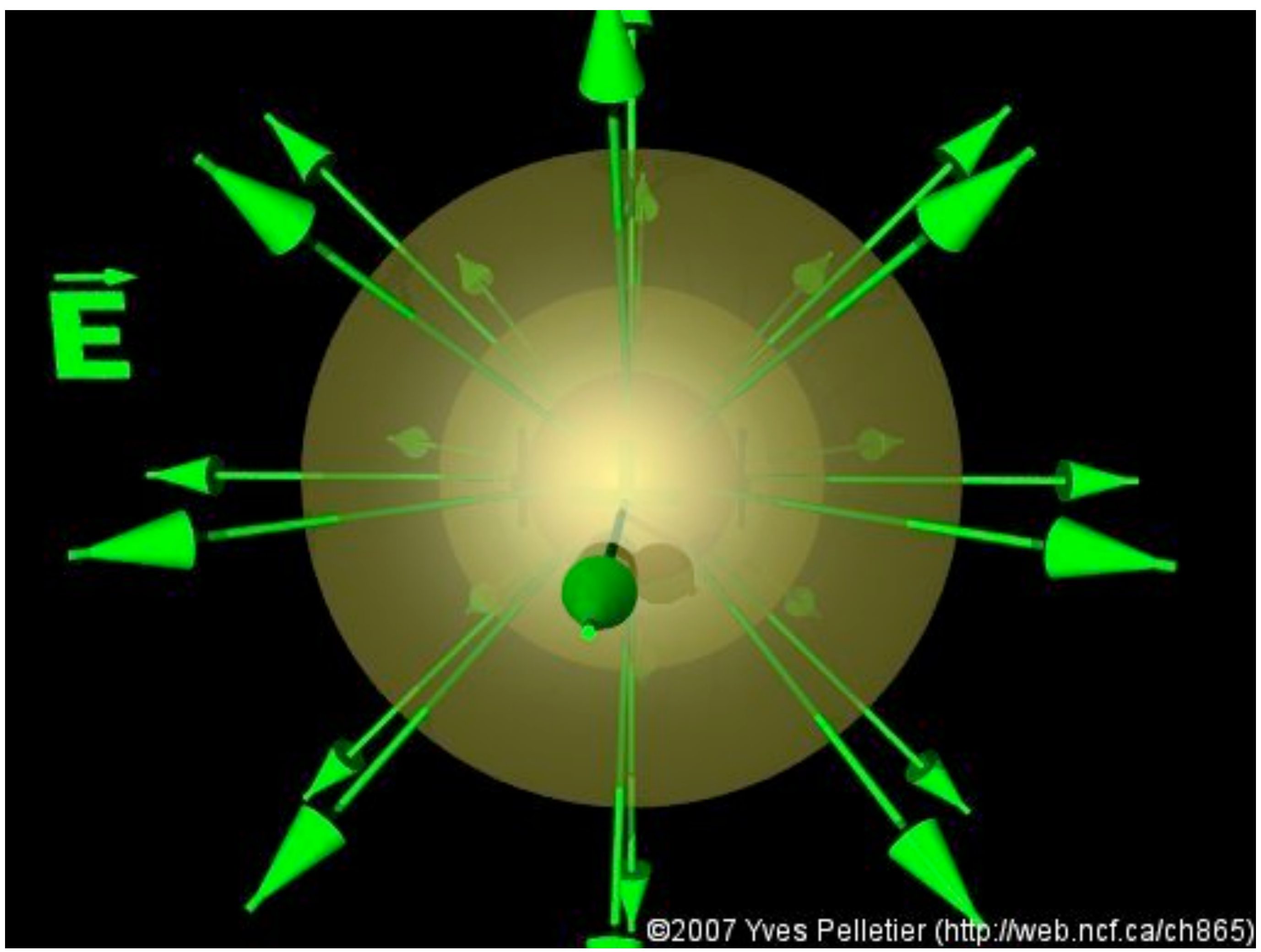
$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\vec{E}\int_A^B d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \vec{s}$$

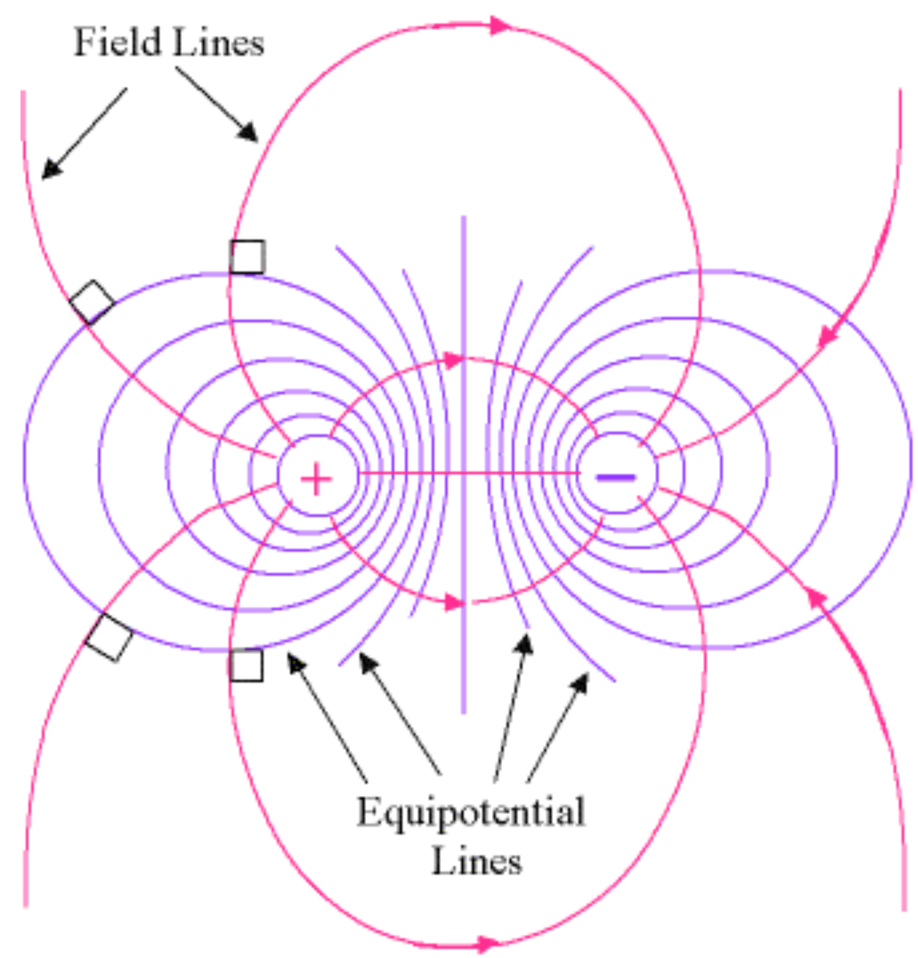
$$\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 \vec{E} \cdot \vec{s}$$



Električni potencijal

Sve točke koje leže na plohi okomitoj na silnice električnog polja nalaze se na istom potencijalu.
Takvu plohu nazivamo ekvipotencijalna ploha.





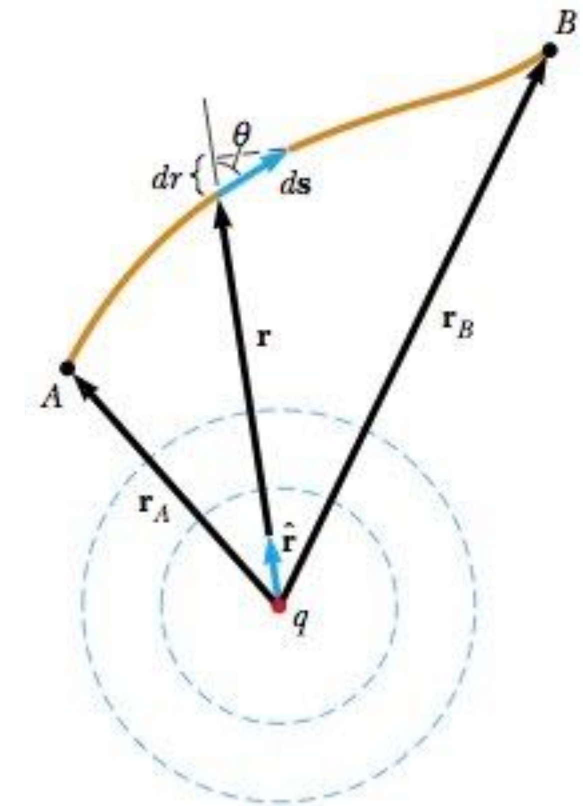
ELEKTRIČNI POTENCIJAL I POTENCIJALNA ENERGIJA TOČKASTOG NABOJA

- zanima nas potencijal na udaljenosti *r* od točkastog naboja

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{s}$$

$$\boxed{V_B - V_A = -k_e q \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{k_e q}{r}\bigg|_{r_A}^{r_B} = k_e q \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]}$$

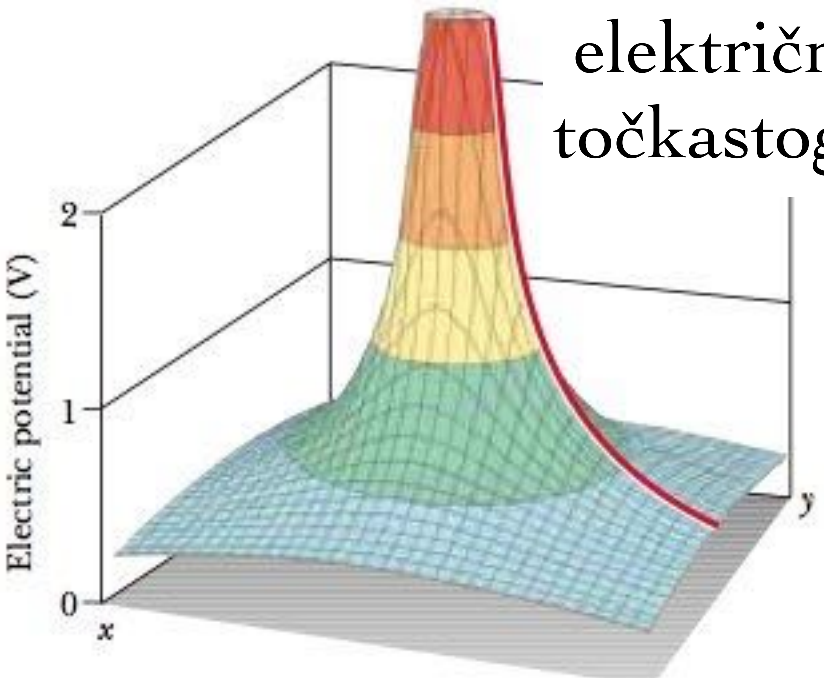


- obično se uzima da je V = 0, za $r_A = \infty$

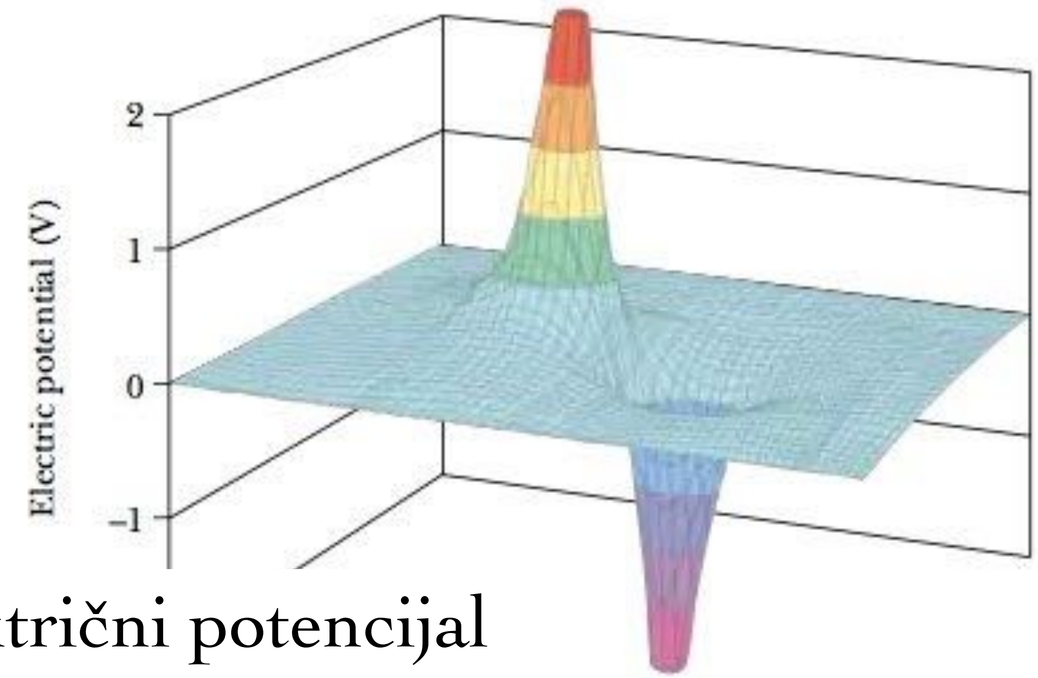
Električni potencijal na udaljenosti *r* od točkastog naboja *q*:

$$\boxed{V = k_e \frac{q}{r}}$$

ELEKTRIČNI POTENCIJAL I POTENCIJALNA ENERGIJA TOČKASTOG NABOJA



električni potencijal točkastog naboja



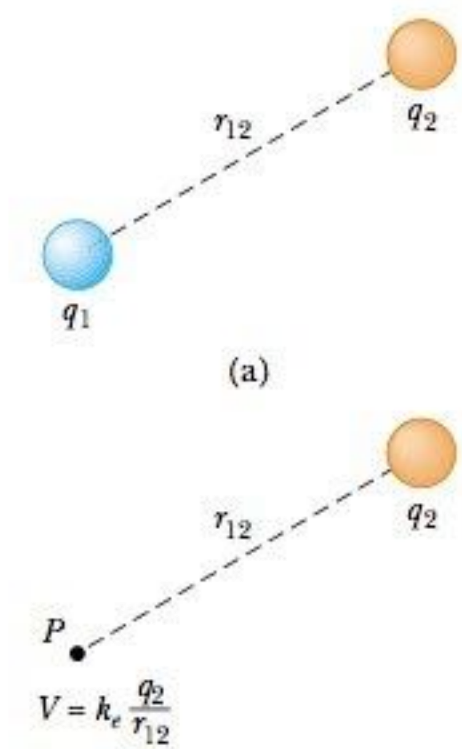
električni potencijal dipola

Potencijal skupine točkastih naboja:

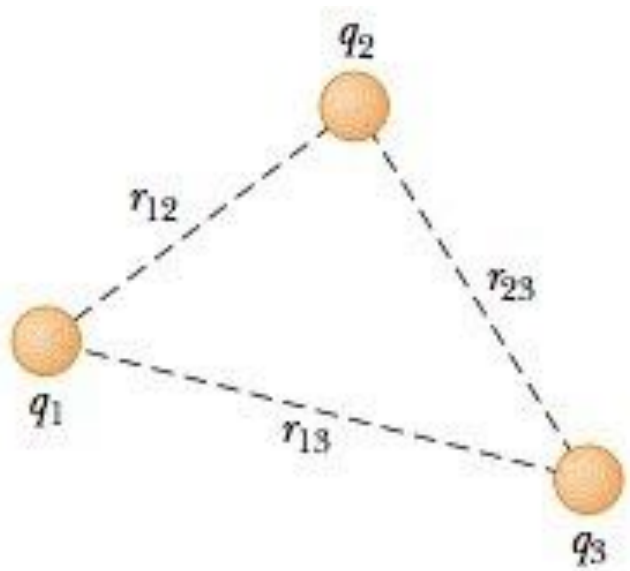
$$\boxed{V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i}}$$

ELEKTRIČNI POTENCIJAL I POTENCIJALNA ENERGIJA TOČKASTOG NABOJA

Potencijalna energija dva točkasta naboja:
- naboj q_1, da bismo mu iz r_∞ približili naboj q_2 na udaljenost r_{12}, moramo obaviti rad $q_2 \cdot V_1$



$$\boxed{U_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}}$$



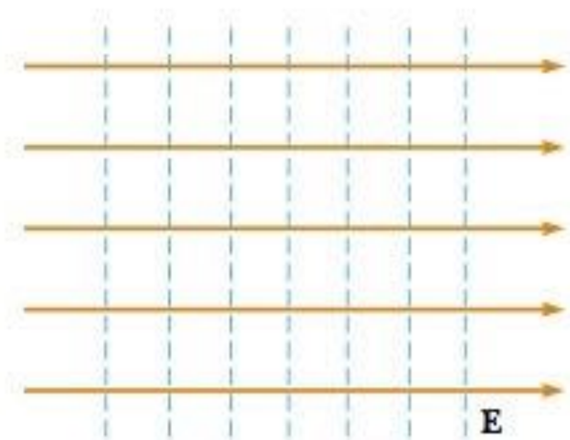
Sustav tri naboja:

$$U = k_e \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

Općenito: $\boxed{U = k_e \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}}$

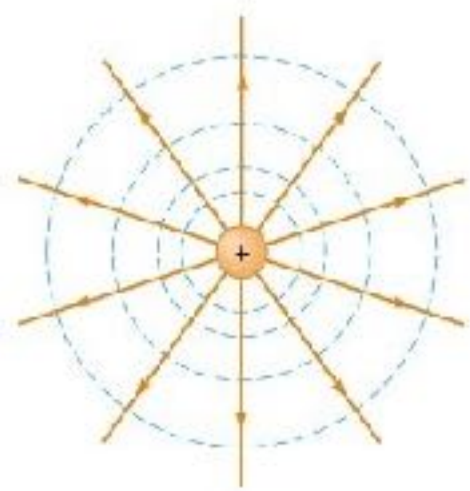
VEZA ELEKTRIČNOG POLJA I POTENCIJALA

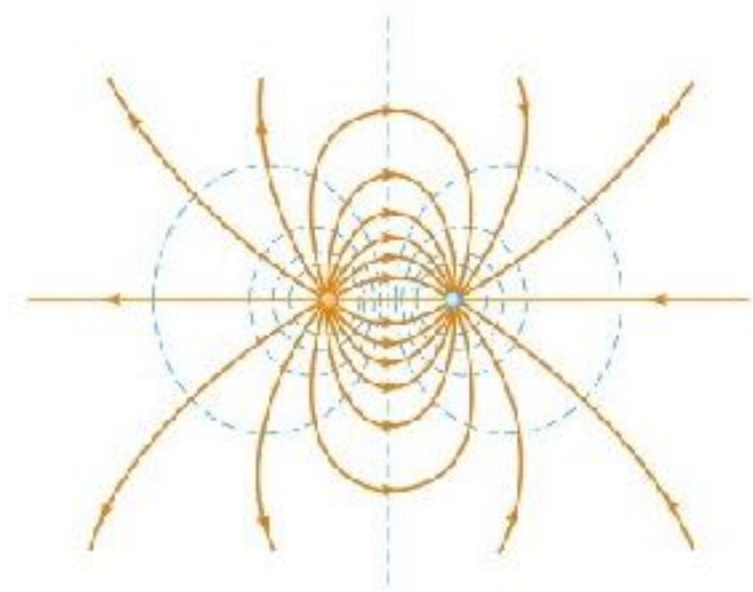
$$\boxed{dV = -\vec{E}d\vec{s}} \quad \Rightarrow \quad E_r = -\frac{dV}{dr}$$



Npr. $\quad V = k_e \dfrac{q}{r} \quad \Rightarrow \quad E = k_e \dfrac{q}{r^2}$

Ekvipotencijale su uvijek okomite na silnice električnog polja!

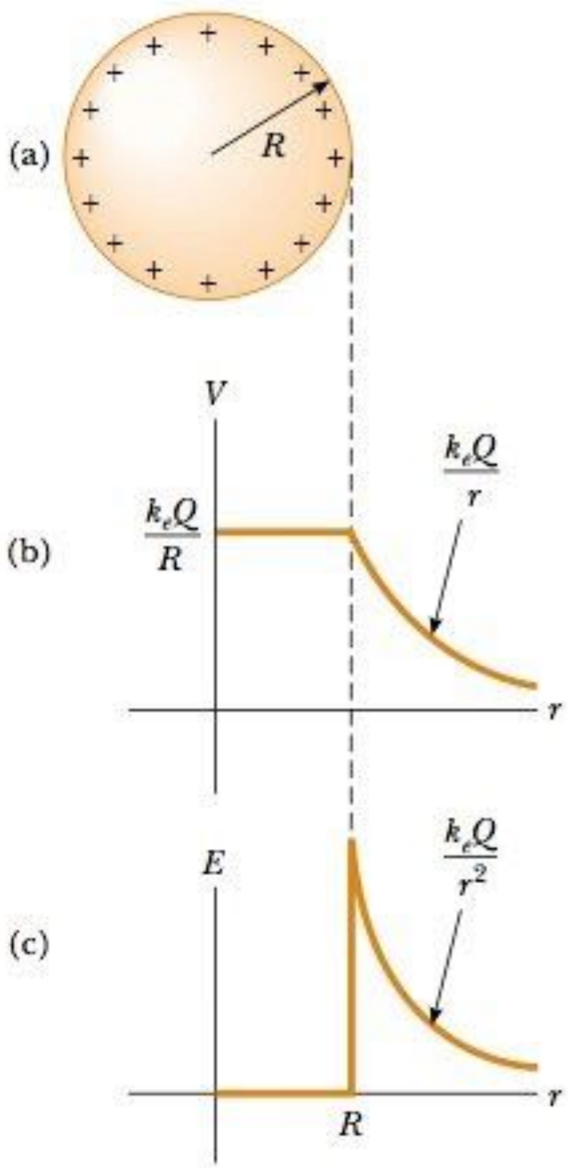

(b)


(c)

3D sustav:

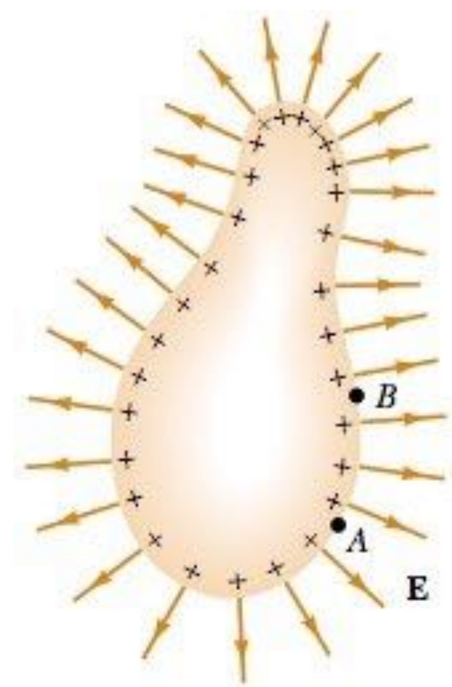
$$E_x = -\frac{\partial V_x}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V_y}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V_z}{\partial z}$$

ELEKTRIČNI POTENCIJAL NABIJENOG VODIČA



- višak naboja nalazi se na površini
- električno polje u unutrašnjosti = 0
- sve točke na površini nalaze se na istom potencijalu

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \left\{ \vec{E} \perp d\vec{s} \right\} = 0$$



- budući da je električno polje u unutrašnjosti 0, sve točke u unutrašnjosti su na istom potencijalu koji je jednak potencijalu na površini
- nije potrebno uložiti nikakav rad da bi se testni naboj prenio iz unutrašnjosti sfere na površinu