



MEHANIKA FLUIDA

Fluidi

- ❖ fluidi igraju vitalnu ulogu u raznim aspektima naših života
- ❖ pijemo ih, dišemo, plivamo u njima
- ❖ oni cirkuliraju našim tijelima i kontroliraju meteorološke uvjete
- ❖ zrakoplovi lete kroz njih, brodovi plove njima

fluid je bilo koja tvar koja može teći

- ❖ plinovi i tekućine
- ❖ razlika: plinovi su stlačivi, tekućine nisu (u većini slučajeva)

Gustoća

Definicija: gustoća je masa po jedinici obujma

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad [\text{kg/m}^3], \text{ ili } [\text{g/cm}^3]$$

Predmeti napravljeni od istog materijala, ali različitih masa i obujama imaju jednaku gustoću!



Material	Density (kg/m ³)*	Material	Density (kg/m ³)*
Air (1 atm, 20°C)	1.20	Iron, steel	7.8 × 10 ³
Ethanol	0.81 × 10 ³	Brass	8.6 × 10 ³
Benzene	0.90 × 10 ³	Copper	8.9 × 10 ³
Ice	0.92 × 10 ³	Silver	10.5 × 10 ³
Water	1.00 × 10 ³	Lead	11.3 × 10 ³
Seawater	1.03 × 10 ³	Mercury	13.6 × 10 ³
Blood	1.06 × 10 ³	Gold	19.3 × 10 ³
Glycerine	1.26 × 10 ³	Platinum	21.4 × 10 ³
Concrete	2 × 10 ³	White dwarf star	10 ¹⁰
Aluminum	2.7 × 10 ³	Neutron star	10 ¹⁸

*To obtain the densities in grams per cubic centimeter, simply divide by 10³.

$$1 \text{ g/cm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3$$

Tlak u fluidima

Kada je fluid u stanju mirovanja, on djeluje silom koja je okomita na sve površine koje su s njim u kontaktu, npr. na stranice posude u kojoj se nalazi ili na tijelo koje je u njega uronjeno.

Plivanje: sila koja se osjeća na ruke i noge!

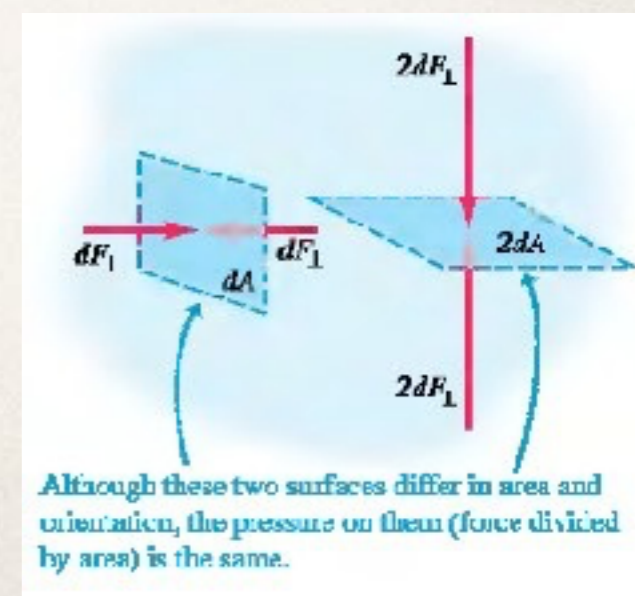
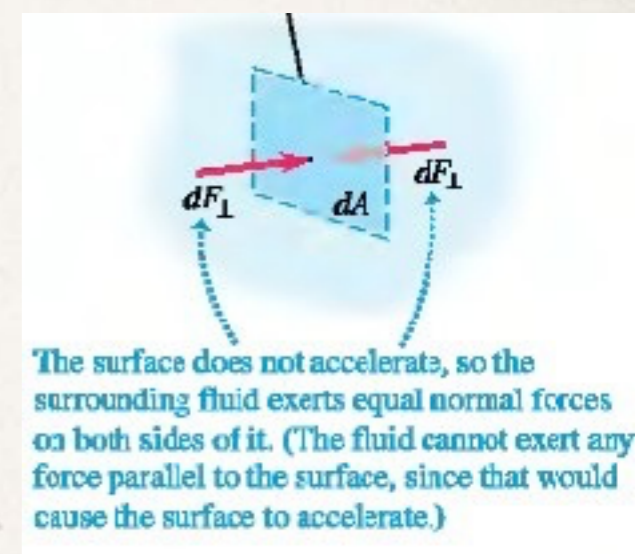
Fluid u cjelini miruje, ali njegove molekule se stalno gibaju i sudaraju s okolinom - sila koja uzrokuje tlak u fluidu!

Definicija: tlak p je sila koja djeluje na jedinicu površine

$$p = \frac{dF_{\perp}}{dA}$$

Ukoliko je sila ista u svim
točkama koje leže na površini A : $p = \frac{F}{A}$

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$



Atmosferski tlak, p_a , je tlak Zemljine atmosfere, i ovisi o meteorološkim uvjetima i visini.

Normalan atmosferski tlak na razini mora (prosječna vrijednost) je 1 atmosfera (1 atm), koja je po definiciji 101 325 Pa.

$$(p_a)_{av} = 1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 1.013 \text{ bar} = 1013 \text{ milibar}$$

Tlak, dubina i Pascalov zakon

Ukoliko se težina fluida može zanemariti \rightarrow tlak u fluidu je isti u cijelom volumenu

No, često se težina fluida ne može zanemariti pa se vrijednost tlaka mijenja s visinom (dubinom)!

Zanima nas veza između tlaka p u točki y i njene visine (pretp.! ρ je jednolik u fluidu)

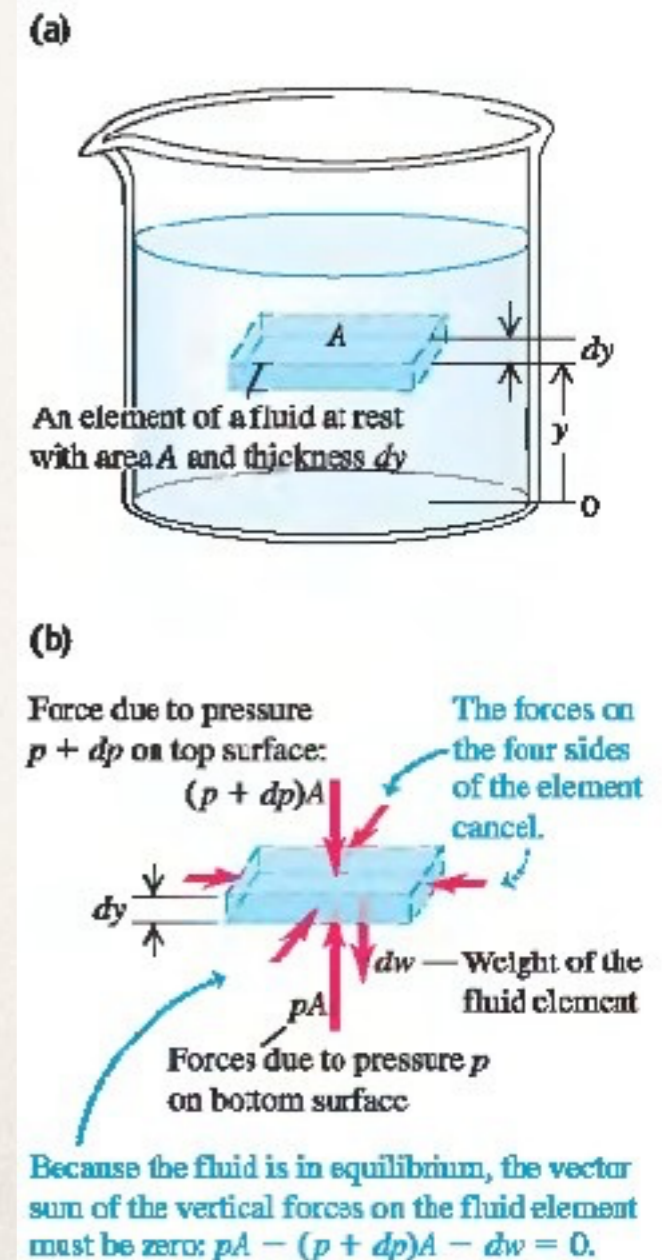
$$dV = A \cdot dy$$

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot A \cdot dy$$

$$dw = dm \cdot g = \rho \cdot g \cdot A \cdot dy$$

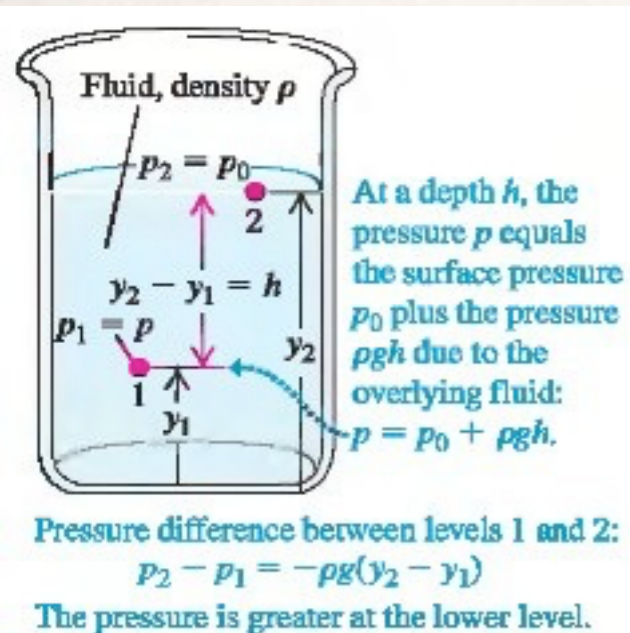
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow pA - (p + dp)A - \rho g A dy = 0$$

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g$$



Iz prethodne relacije očito je da se tlak smanjuje s rastom visine!

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$$



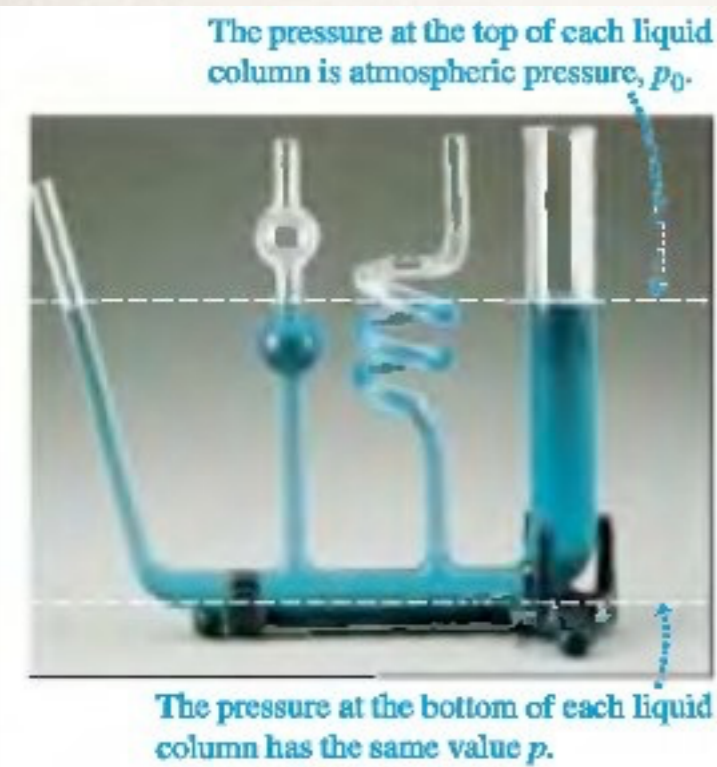
Tlak na dubini h ispod površine:

- točka 1 na bilo kojoj razini unutar fluida, tlak p
- točka 2 na površini fluida, tlak p_0
- dubina točke h ispod površine je $h = y_2 - y_1$

$$p_0 - p = -\rho g(y_2 - y_1) = -\rho gh$$

$$p = p_0 + \rho gh$$

**HIDROSTATSKI
TLAK**



Tlak na nekoj dubini h ne ovisi o obliku posude!

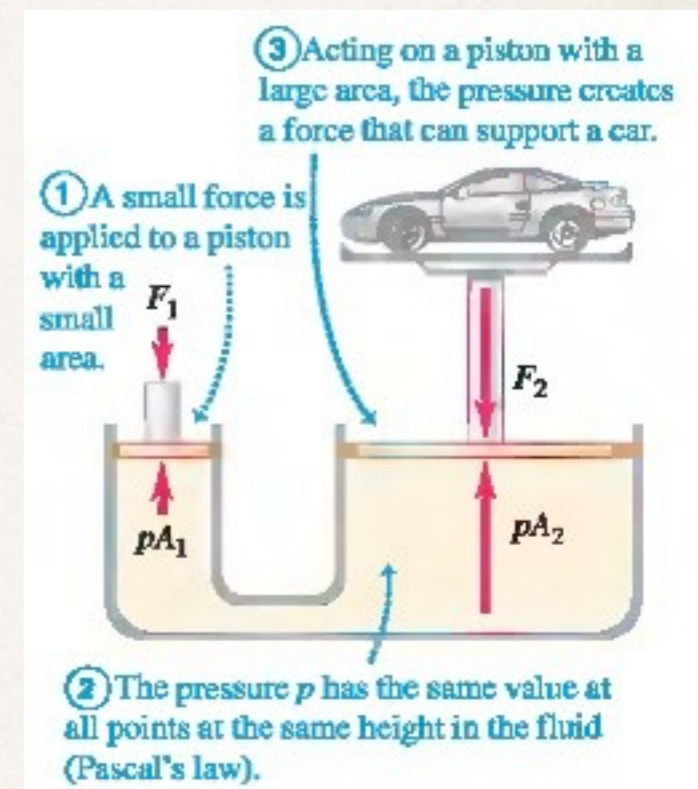
Ukoliko tlak na površini povećamo (upotrebom klipa ili nečega sličnoga), tlak p na bilo kojoj dubini povećat će se za istu vrijednost!

Blaise Pascal (1623-1662)

Pascalov zakon: tlak izazvan djelovanjem sile u bilo nekoj točki površine fluida jednoliko se širi kroz fluid u svim smjerovima.

Primjer: hidraulička preša
(zubarske stolice, automobilske dizalice,
dizala, hidrauličke kočnice)

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$$



Oprez: izraz za ovisnost tlaka o dubini (visini) vrijedi samo za fluide kod kojih je gustoća jednaka kroz cijeli fluid (homogena). To je općenito ispunjeno za tekućine ali ne za plinove!

npr. razlika gustoća zraka na površini mora je tri puta veća nego na vrhu Mount Everesta (8882 m)

Apsolutni tlak i manometarski tlak

Kada je tlak unutar automobilske gume jednak atmosferskom - kažemo da je guma prazna. Kada kažemo da je tlak u gumi 220 kPa, to znači da je tlak u gumi VEĆI od atmosferskog (101 kPa) za 220 kPa. *Ukupni tlak* u gumi je 321 kPa. Razlika tlaka u odnosu na atmosferski obično se naziva **manometarski tlak**, a ukupni tlak se naziva **apsolutni tlak**.

Mjerenje tlaka

1. Manometar s otvorenom cijevi

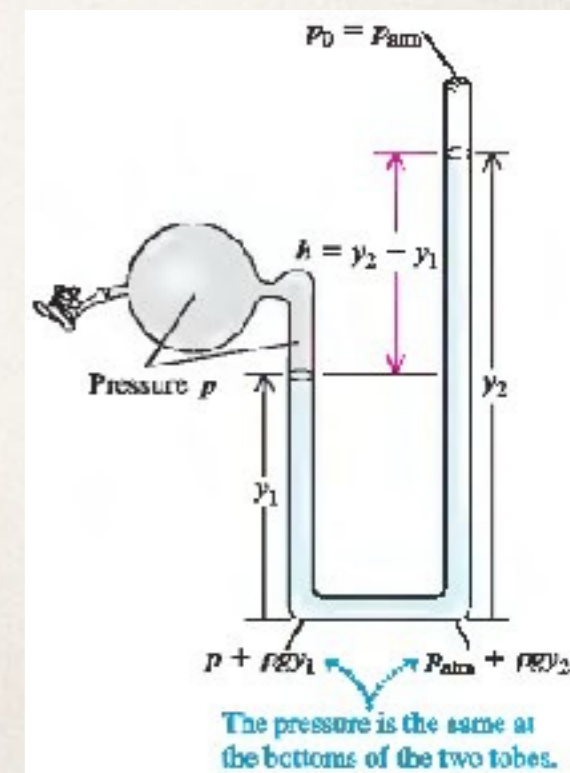
- U-cijev, tekućina gustoće ρ , najčešće voda ili živa
- lijevi kraj je spojen na posudu u kojoj želimo mjeriti tlak, desna strana $p = p_{\text{atm}}$
- tlak na dnu posude:

$$p + \rho g y_1 = p_{\text{atm}} + \rho g y_2$$

$$p - p_{\text{atm}} = \rho g (y_2 - y_1) = \rho g h$$

p = apsolutni tlak

$p - p_{\text{atm}}$ = manometraski tlak



2. Živin tlakomjer

- dugačka staklena cijev, zatvorena na jednom kraju koja je bila napunjena sa živom, i nakon toga uronjena u posudu punu žive

- prostor na vrhu cijevi sadrži samo živine pare, čiji tlak je zanemariv

- tada vrijedi $p_{\text{atm}} = p = 0 + \rho g(y_2 - y_1) = \rho gh$

- **živin tlakomjer** mjeri atmosferski tlak izravno iz visine živinog stupca

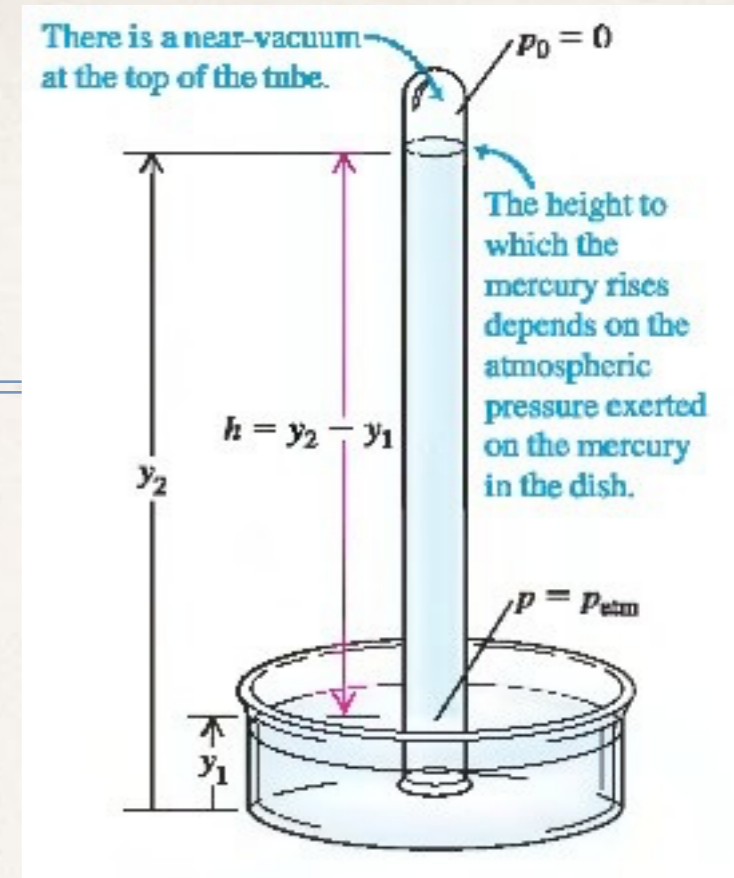
- tlakovi se često opisuju pomoću visine stupca žive

- tlak 1 mm Hg naziva se 1 *torr*, po Evangelista Toricelliju, koji je izumio živin tlakomjer

- problemi: ovisnost o gustoći žive (koja ovisi o T) i vrijednosti g

- jedna vrsta tlakomjera za mjerenje tlaka krvi, *sphygmomanometar*, također koristi živin tlakomjer

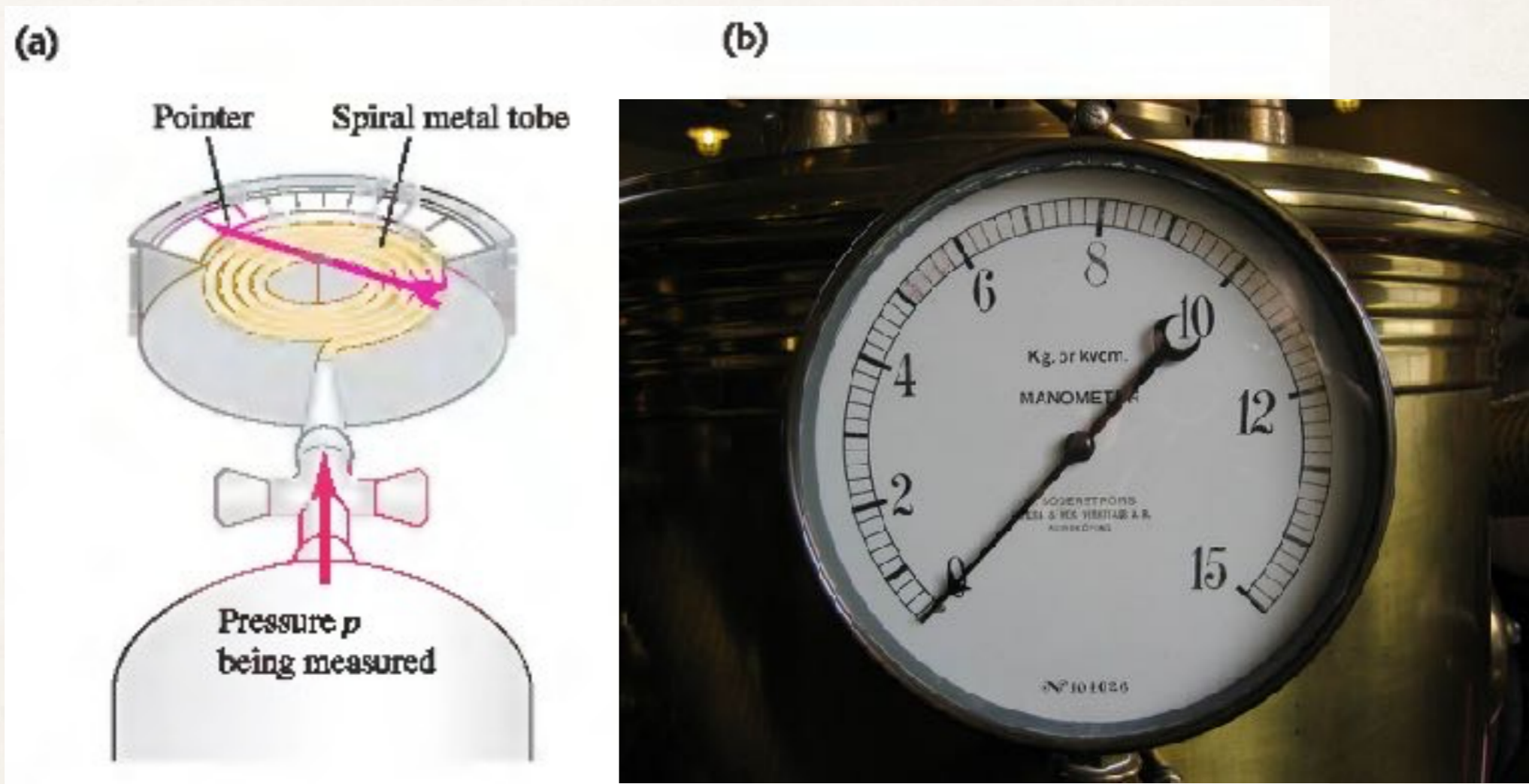
- krvni tlak npr. 130/80 daje maksimalan i minimalan tlak u arterijama, mjereno u mm Hg



3. Bourdenov tlakomjer

- spiralna metalna cijev

- s promjenom tlaka mijenjaju se dimenzije cijevi, spirala se ili otpušta ili sabija i time dolazi do otklona kazaljke



Uzgon

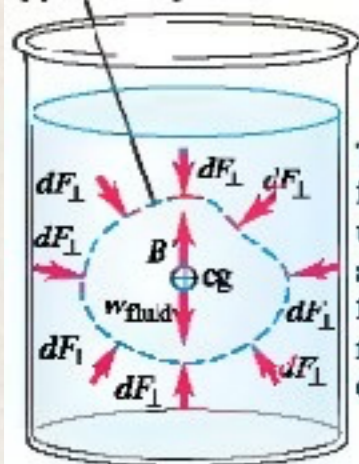
Uzgon - poznati fenomen; tijelo koje je uronjeno u vodu čini se manje teško nego kada je u zraku

Kada je tijelo manje gustoće nego tekućina, ono pluta

npr. ljudsko tijelo obično pluta na vodi, balon napunjen helijem lebdi u zraku

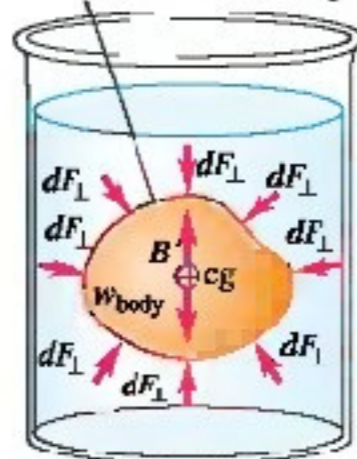
Arhimedov princip: kada je tijelo u potpunosti ili djelomično uronjeno u fluid, fluid djeluje na tijelo silom prema gore a iznos te sile je jednak težini fluida koji je tijelo istisnulo

(a) Arbitrary element of fluid in equilibrium



The forces on the fluid element due to pressure must sum to a buoyant force equal in magnitude to the element's weight.

(b) Fluid element replaced with solid body of the same size and shape



The forces due to pressure are the same, so the body must be acted upon by the same buoyant force as the fluid element, regardless of the body's weight.

- fluid je u ravnoteži
- zbroj svih y komponenti sila = 0
- rezultantna sila je mg fluida prema gore
- zbroj svih momenata = 0
- rezultantna sila prolazi kroz CM

Taj element fluida zamijenimo s krutim tijelom identičnog oblika! Tlak u svakoj točki je isti kao i prije zamjene. Dakle, ukupna sila na tijelo je opet jednaka težini istisnutog dijela fluida, i djeluje vertikalno prema gore. Ova sila zove se **sila uzgona**.

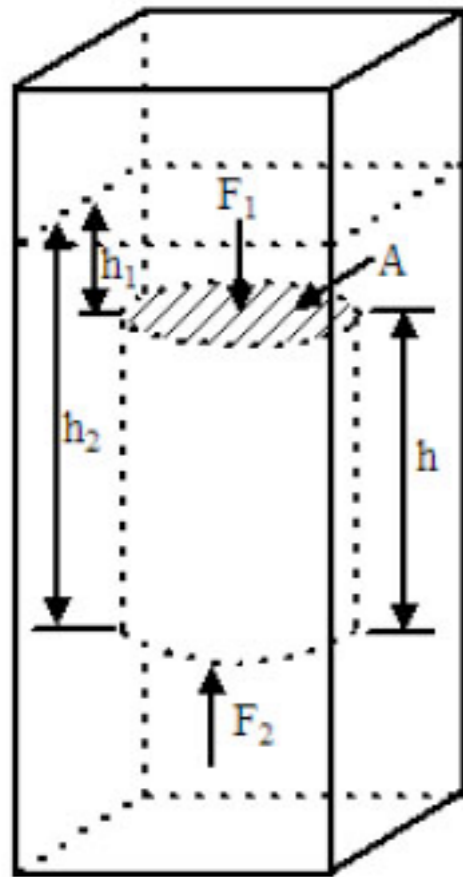


Fig. 1. Vertical forces acting on a right circular cylinder immersed in a liquid of density ρ gm per cm^3 .

$$F_1 = \rho g h_1 \cdot A$$

$$F_2 = \rho g h_2 \cdot A$$

$$F_{\text{rez}} = \rho g (h_2 - h_1) A = \rho g h A$$

$$= \rho V g = m_{\text{fl}} g$$

$Q_{\text{tijelo}} = Q_{\text{fluid}}$ tijelo lebdi

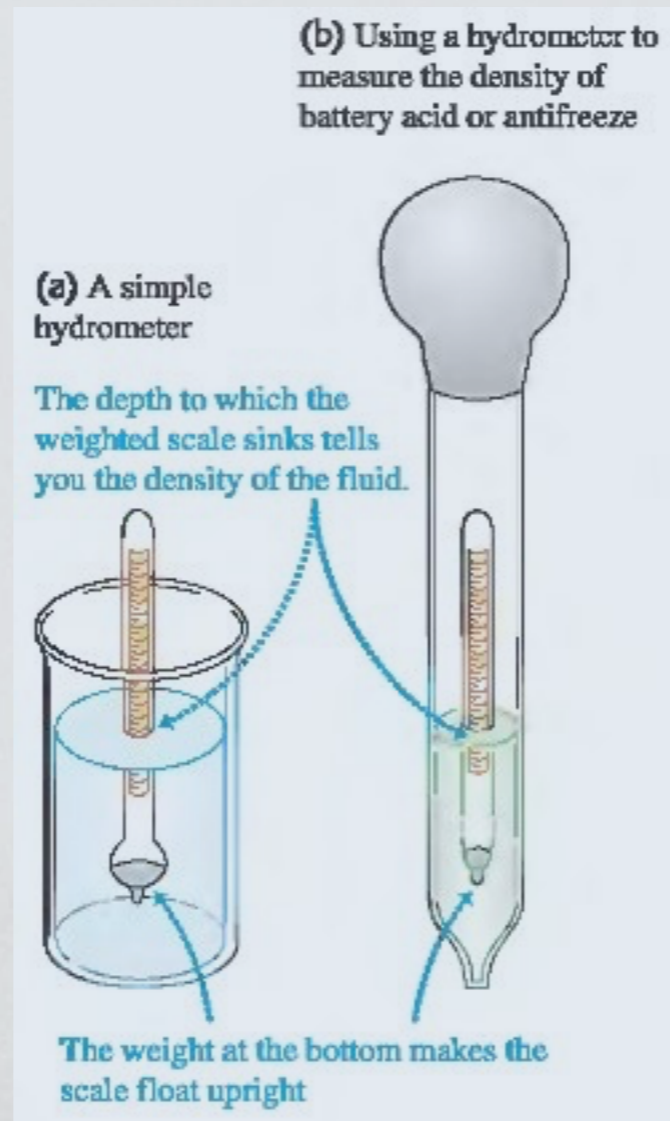
$Q_{\text{tijelo}} < Q_{\text{fluid}}$ tijelo tone

$Q_{\text{tijelo}} > Q_{\text{fluid}}$ tijelo pluta



Uzgon

Primjer: hidrometar
- mjerenje gustoće fluida
- kalibrirani plovak
uronjen je u fluid do
razine kada je njegova
težina jednaka težini
fluida koju je istisnuo
- na skali se jednostavno
očita gustoća fluida



ulje za bebe

alkohol

ulje za kuhanje

vosak

voda

aluminij



A density column containing some common liquids and solids. From top: baby oil, rubbing alcohol, vegetable oil, wax, water, and aluminum. Food coloring was added to rubbing alcohol and water for visibility.

[link](#)

Površinska napetost



Primjer: spjalica može plutati na vodi iako je njena gustoća nekoliko puta veća od gustoće vode - **površinska napetost**

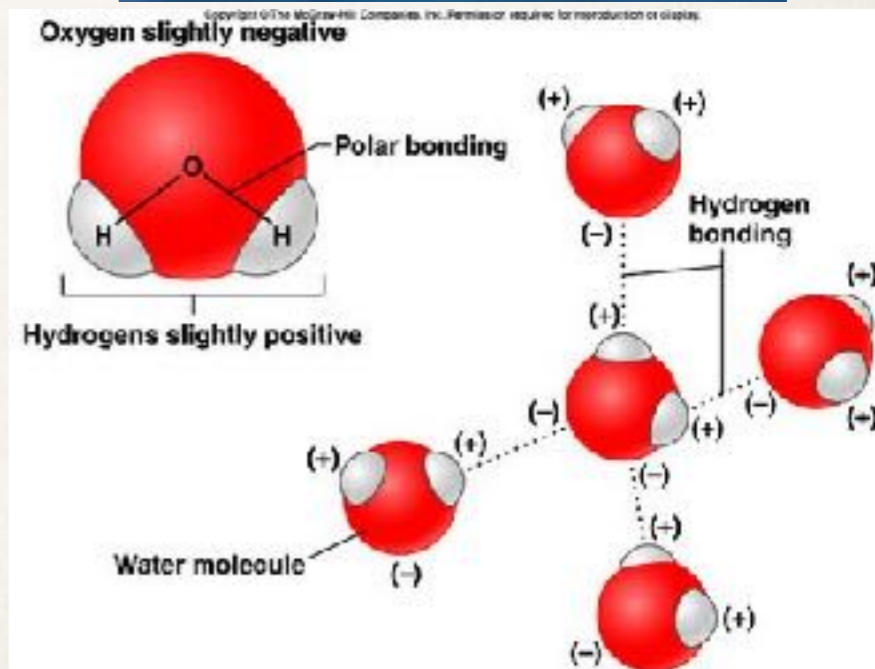
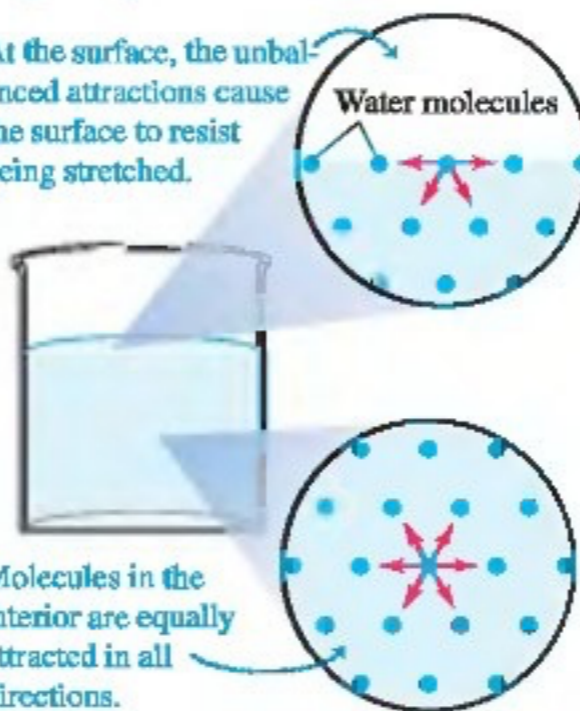


Ukupna sila na molekulu *unutar* fluida je 0. To nije slučaj za molekulu *na površini* - na nju okolne molekule djeluju privlačnom silom koja je usmjerena unutar fluida!

Molecules in a liquid are attracted by neighboring molecules.

At the surface, the unbalanced attractions cause the surface to resist being stretched.

Molecules in the interior are equally attracted in all directions.



Kapi kiše su sferne zbog površinske napetosti!

[link](#)

Dinamika fluida

- Model **idealnog fluida** - nestlačiv (gustoća mu se ne mijenja!) i bez unutarnjeg trenja (**viskoznosti**)
- tekućine su uglavnom nestlačive, a za plinove to vrijedi ukoliko im se tlak ne mijenja bitno od jednog područja do drugog
 - viskoznost izaziva smična naprezanja kada se dva susjedna sloja gibaju relativno jedan u odnosu na drugog (npr. unutar cijevi ili oko neke prepreke)
 - ove smične sile neki puta se mogu zanemariti, jer su malene u odnosu na sile koje se pojavljuju zbog gravitacije ili razlike u tlakovima



Dinamika fluida

Putanja čestice u fluidu koji teče naziva se **strujnica**

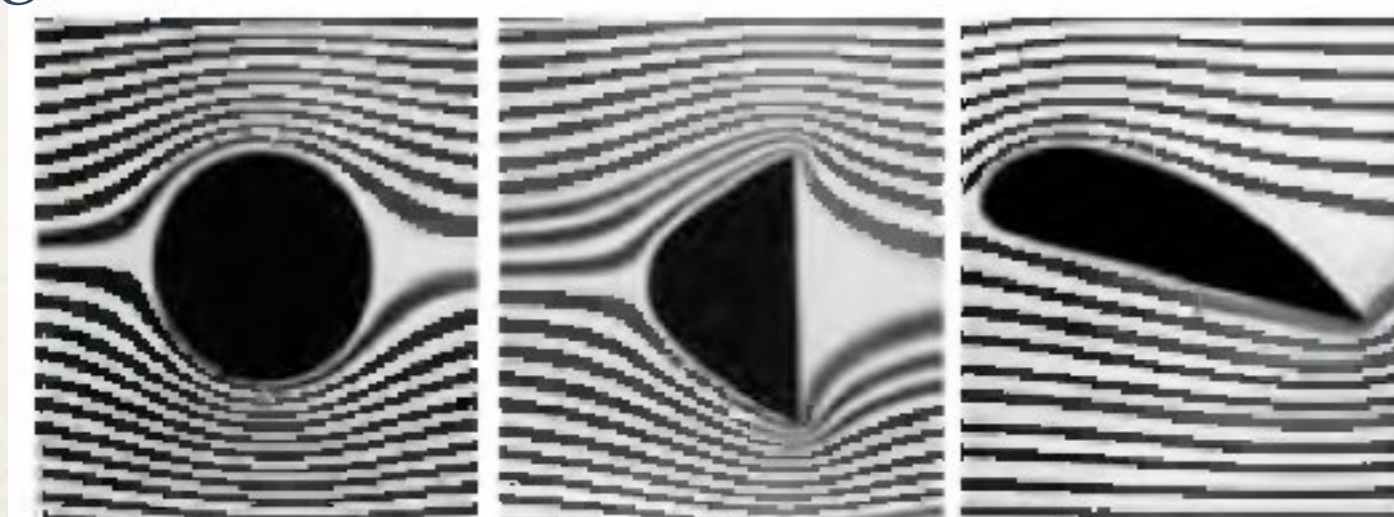
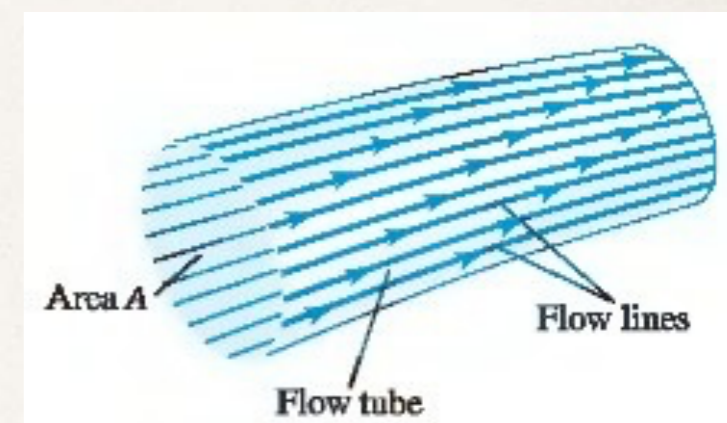
- ukoliko se režim protoka ne mijenja u vremenu

pričamo o **stacionarnom (laminarnom) protoku**

- strujnice koje teku plaštom zamišljenog dijela fluida čine **cijev protoka**

- kod stacionarnog protoka fluid ne izlazi izvan cijevi protoka

- **turbulentni protok**: kaotičan, nepravilan, pun vrtloga



laminarni protok



turbulentni protok

[link](#)

Jednadžba kontinuiteta

masa fluida ne mijenja se s protjecanjem!

u vremenu dt :

$$dV_1 = A_1 v_1 dt, \quad dV_2 = A_2 v_2 dt$$

ukoliko se gustoća ne mijenja:

$$dm_1 = \rho A_1 v_1 dt, \quad dm_2 = \rho A_2 v_2 dt$$

$$\rho A_1 v_1 dt = \rho A_2 v_2 dt$$

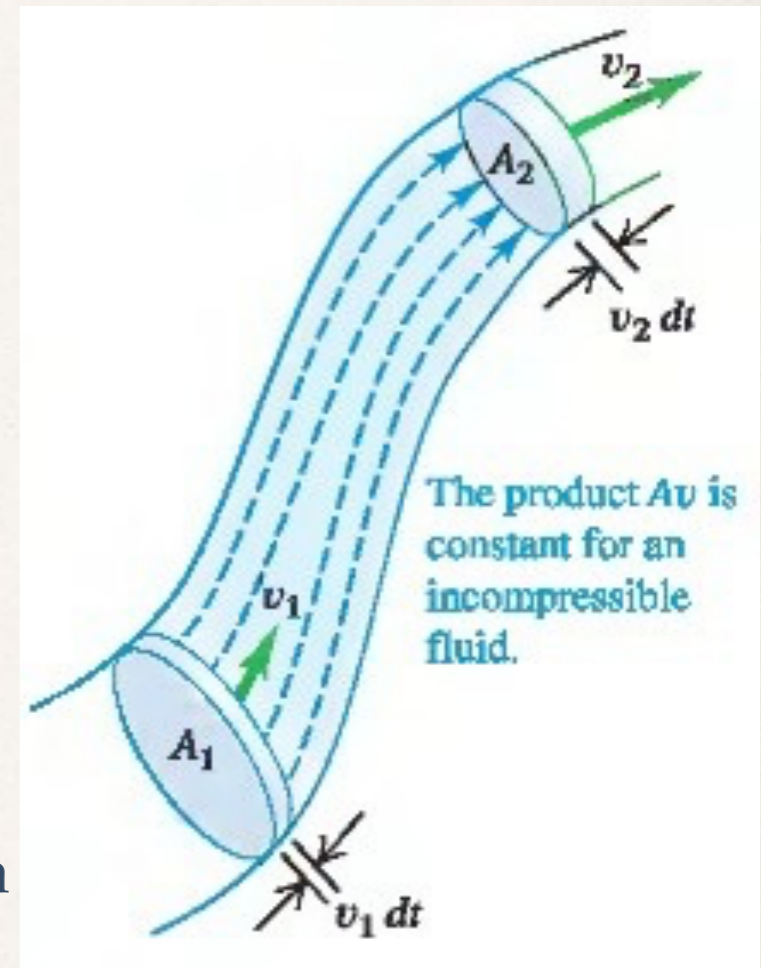
$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

(jednadžba kontinuiteta za nestlačivi fluid)

$$\frac{dV}{dt} = Av \text{ - brzina protoka volumena}$$

generalizacija: $\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$

(jednadžba kontinuiteta za stlačivi fluid)



Bernoullijeva jednađzba

- u skladu s jednađzbom kontinuiteta brzina fluida može varirati duž putanje fluida
- tlak također može varirati!
- tlak ovisi o visini ali i o brzini fluida!

Bernoullijeva jednađzba daje vezu izmedju p , v i h za idealan nestlačiv fluid

Zašto tlak ovisi o brzini?

jednađzba kontinuiteta \rightarrow promjena brzine fluida \rightarrow element fluida mora imati akceleraciju

sila koja izaziva to ubrzanje (u slučaju horizontalne cijevi) mora dolaziti od okolnog fluida!

tlak je različit u područjima različitog presjeka!

Izvod Bernoullijeve jednačbe

Koristimo **rad-energija** teorem

- u početnom trenutku element fluida između a i c
- u vremenu dt dolazi na položaj bd
- volumen koji prolazi u tom vremenu:

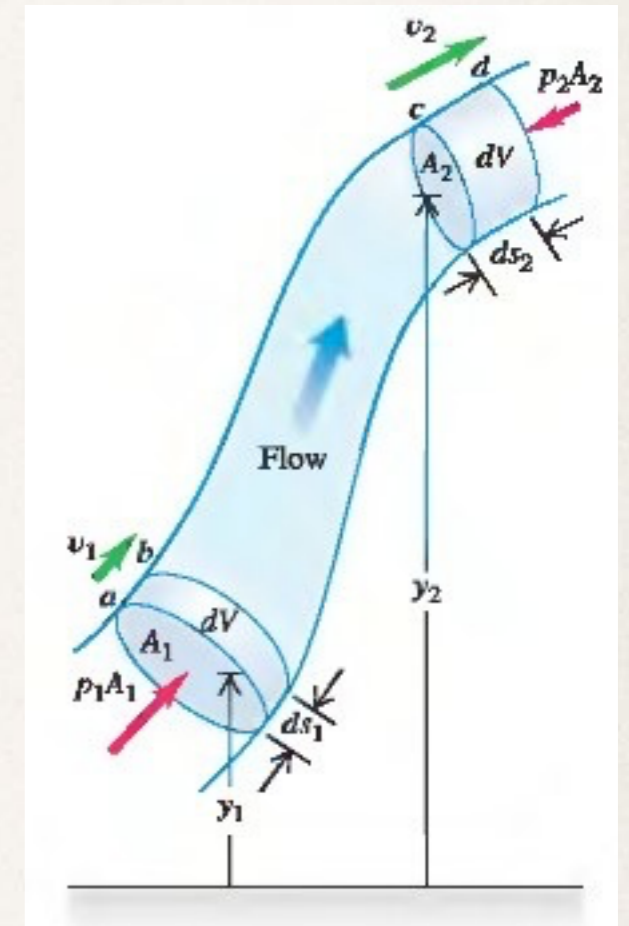
$$dV = A_1 ds_1 = A_2 ds_2$$

Rad koji je obavljen na taj element fluida u vremenu dt :

(tlak je idealan, jedini rad osim gravitacijske sile obavljaju vanjski dijelovi fluida)

$$dW = p_1 A_1 ds_1 - p_2 A_2 ds_2 = (p_1 - p_2) dV$$

$$dW = \text{promjena mehaničke energije}$$



Izvod Bernoullijeve jednačbe

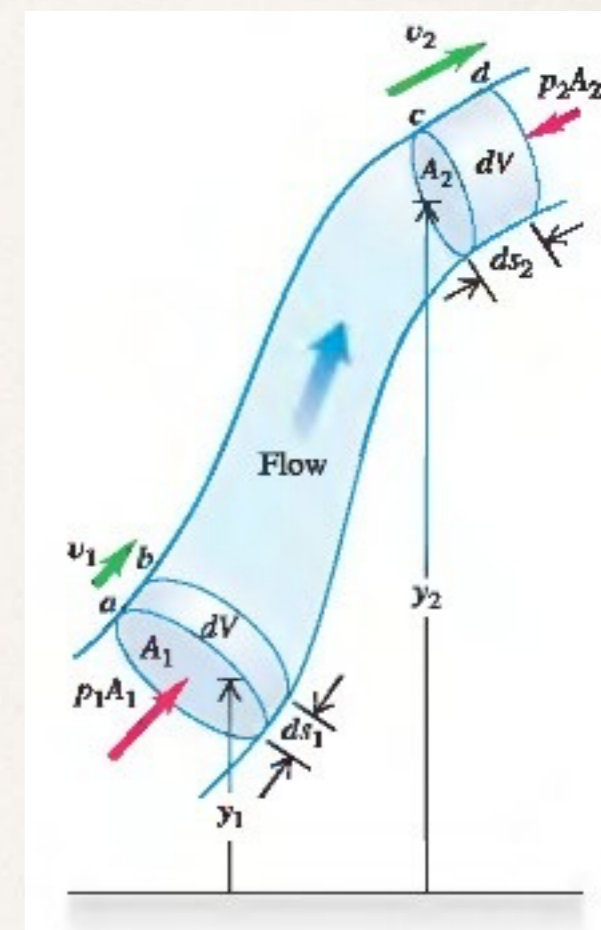
Kinetička energija?

na početku dt fluid između točaka a i b ima kinetičku energiju: $\frac{1}{2} \rho (A_1 ds_1) v_1^2$

na kraju dt fluid između točaka c i d ima kinetičku energiju: $\frac{1}{2} \rho (A_2 ds_2) v_2^2$

Ukupna promjena kinetičke energije:

$$dK = \frac{1}{2} \rho dV (v_2^2 - v_1^2)$$



Izvod Bernoullijeve jednačbe

Potencijalna gravitacijska energija?

na početku dt fluid između točaka a i b ima

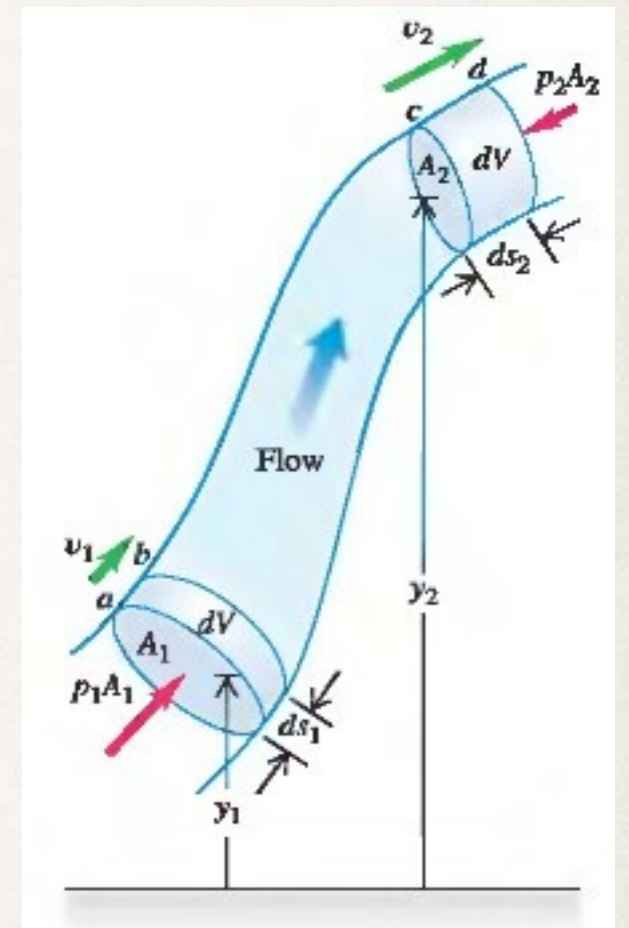
pot. gr. energiju: $dmgy_1 = \rho dVgy_1$

na kraju dt fluid između točaka c i d ima

pot. gr. energiju: $dmgy_2 = \rho dVgy_2$

Ukupna promjena potencijalne gravitacijske energije:

$$dU = \rho dVg(y_2 - y_1)$$



Izvod Bernoullijeve jednačbe

Kombiniranjem svih ovih izraza dolazimo do:

$$(p_1 - p_2)dV = \frac{1}{2}\rho dV(v_2^2 - v_1^2) + \rho dVg(y_2 - y_1)$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(y_2 - y_1)$$

Odnosno:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Bernoullijeva jednačba

$$p + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const}$$

- zakon očuvanja energije

tlak = gustoća energije

$$p = \frac{F \cdot s}{V}$$

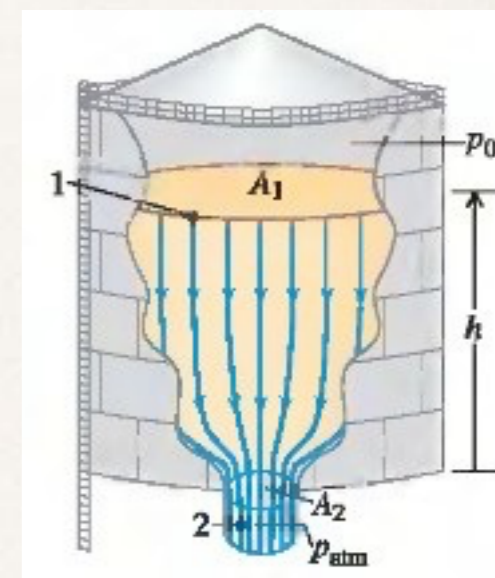
$$E_{\text{tlak}} + mgy + \frac{1}{2}mv^2 = \text{const}$$

energija tlaka

Opres: Bernoullijeva jednačba vrijedi samo za nestlačive fluide!

Bernoullijeva jednačba-primjer

Na slici je prikazan spremnik benzina s poprečnim presjekom A_1 , napunjen do visine h . Iznad površine benzina nalazi se samo zrak pod tlakom p_0 , a benzin polako istječe kroz kratku cijev poprečnog presjeka A_2 . Kolika je brzina istjecanja benzina?



SET UP: Points 1 and 2 in Fig. 14.25 are at the surface of the gasoline and at the short exit pipe, respectively. At point 1 the pressure is p_0 and at point 2 it is atmospheric pressure p_{atm} . We take $y = 0$ at the exit pipe, so $y_1 = h$ and $y_2 = 0$. Because A_1 is very much larger than A_2 , the upper surface of the gasoline will drop very slowly and we can regard v_1 as essentially equal to zero. We find the target variable v_2 from Eq. (14.17) and the volume flow rate from Eq. (14.11).

EXECUTE: We apply Bernoulli's equation to points 1 and 2

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh = p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g(0)$$
$$v_2^2 = v_1^2 + 2\left(\frac{p_0 - p_{\text{atm}}}{\rho}\right) + 2gh$$

Using $v_1 = 0$, we find

$$v_2^2 = 2\left(\frac{p_0 - p_{\text{atm}}}{\rho}\right) + 2gh$$

From Eq. (14.11), the volume flow rate is $dV/dt = v_2 A_2$.

EVALUATE: The speed v_2 , sometimes called the *speed of efflux*, depends on both the pressure difference $(p_0 - p_{\text{atm}})$ and the height h of the liquid level in the tank. If the top of the tank is vented to the atmosphere, $p_0 = p_{\text{atm}}$ and there is zero pressure difference: $p_0 - p_{\text{atm}} = 0$. In that case,

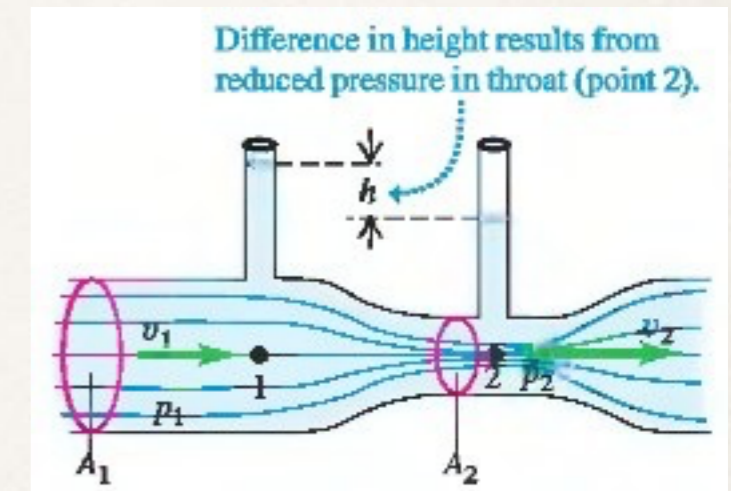
$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

That is, the speed of efflux from an opening at a distance h below the top surface of the liquid is the *same* as the speed a body would acquire in falling freely through a height h . This result is called *Torricelli's theorem*. It is valid not only for an opening in the bottom of a container, but also for a hole in a side wall at a depth h below the surface. In this case the volume flow rate is

$$\frac{dV}{dt} = A_2 \sqrt{2gh}$$

Bernoullijeva jednačba-primjer: Ventourijeva cijev

Na slici je prikazana *Ventourijeva cijev*, koja služi za mjerenje brzine protoka u cijevi. Ukoliko je razlika visine stupaca u dvije vertikalne cijevi h , a površine poprečnih presjeka u cijevi A_1 i A_2 , odredite brzinu strujanja fluida v_1 .



EXECUTE: The two points are at the same vertical coordinate ($y_1 = y_2$), so Eq. (14.17) says

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

From the continuity equation, $v_2 = (A_1/A_2)v_1$. Substituting this and rearranging, we get

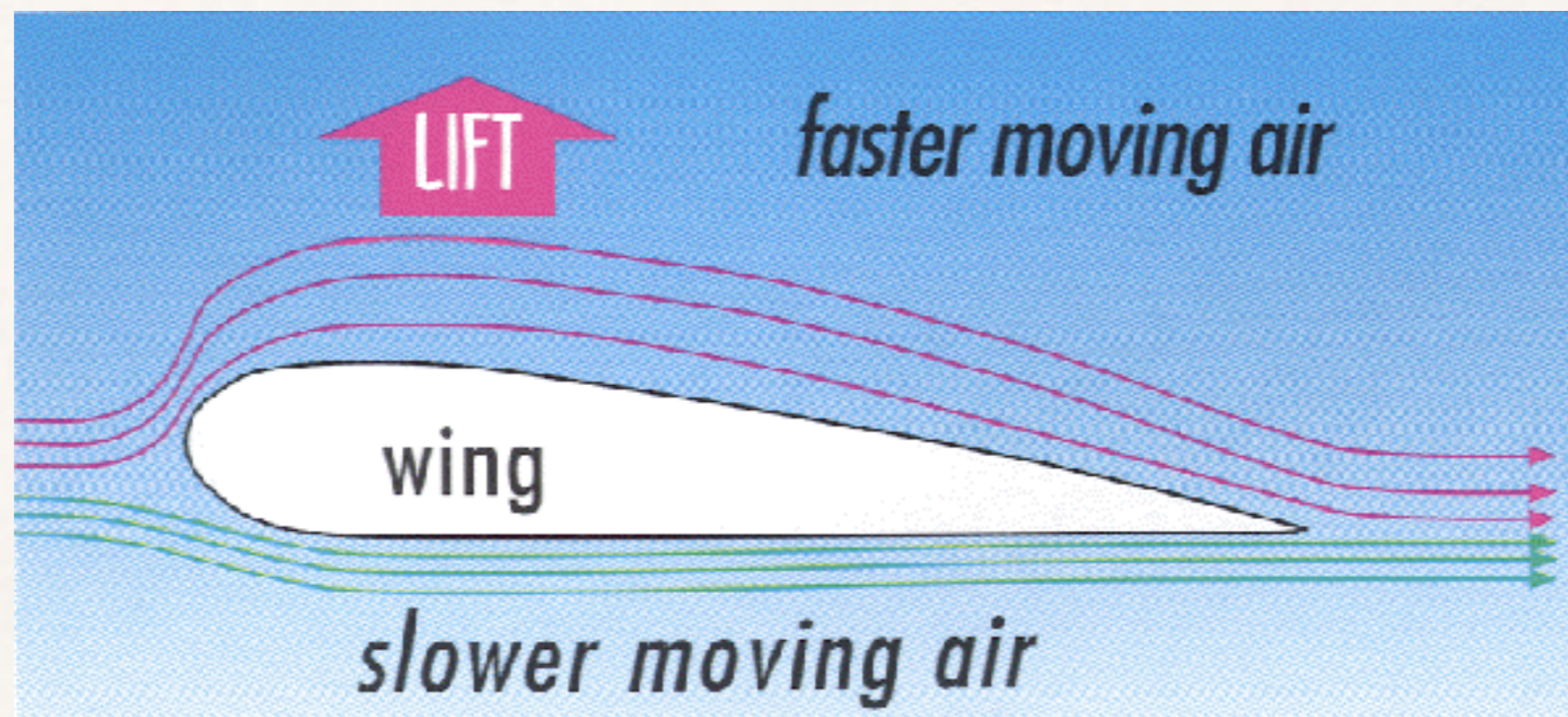
$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)$$

From Section 14.2, the pressure difference $p_1 - p_2$ is also equal to ρgh , where h is the difference in the liquid levels in the two tubes. Combining this with the above result and solving for v_1 , we get

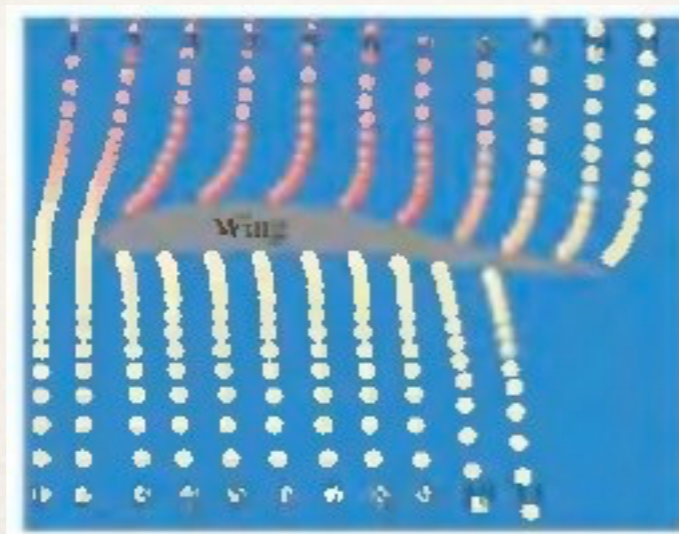
$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{(A_1/A_2)^2 - 1}}$$

EVALUATE: Because A_1 is greater than A_2 , v_2 is greater than v_1 and the pressure p_2 in the throat is less than p_1 . A net force to the right accelerates the fluid as it enters the throat, and a net force to the left slows it as it leaves.

Bernoullijeva jednadžba-primjer: avionsko krilo



Kompjutorska simulacija:

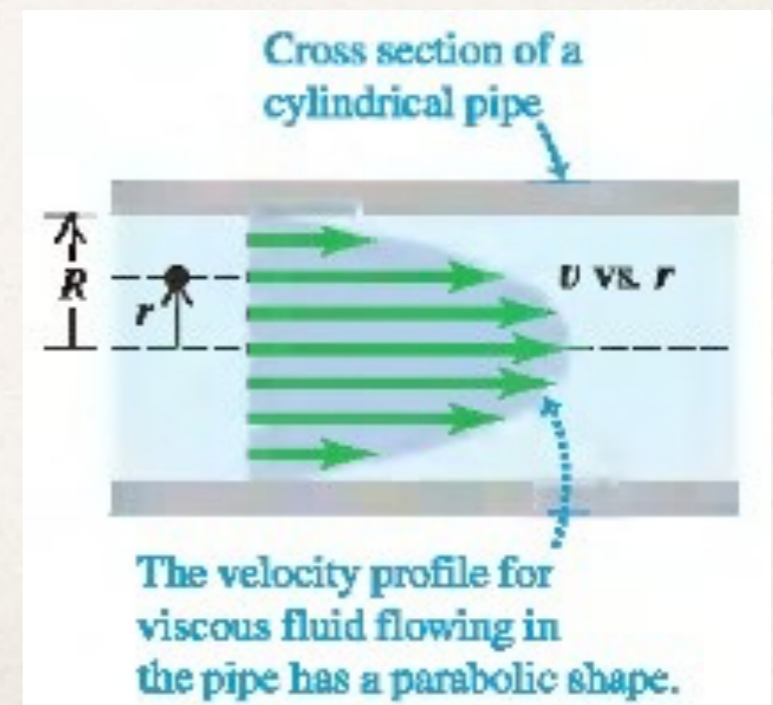


Viskoznost i turbulencija

dosadašnja razmatranja, pretpostavke: fluid nema unutrašnjeg trenja i protok je laminaran

iako su te pretpostavke valjane u velikom broju slučajeva, ipak postoje situacije kada su viskoznost i turbulencije ekstremno bitne

- **viskoznost** je unutarnje trenje u fluidu; viskozne sile opiru se relativnom gibanju slojeva fluida u odnosu jedan na drugi
- primjer: plivanje, veslanje
- fluidi koji 'lako' teku, npr. voda ili benzin, imaju manju viskoznost od fluida koji 'teško' teku, npr. med ili motorno ulje



Viskoznost i turbulencija

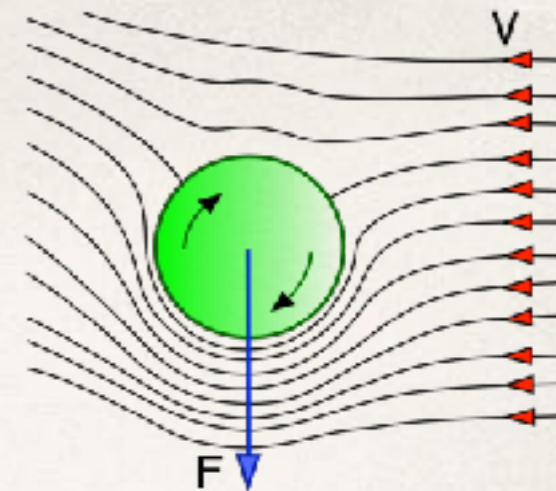
- kada brzina fluida postane veća od neke kritične vrijednosti protok više nije laminaran nego prelazi u **turbulentan** režim
- **turbulentni protok**: neregularan i kompleksan, mijenja se u vremenu, pun vrtloga
- da li je protok turbulentan ovisi o viskoznosti: što je veća viskoznost to je veća vjerojatnost da će protok biti laminaran
- **kritična brzina**: brzina pri kojoj protok prelazi iz laminarnog u turbulentan režim
- neregularnosti u protoku mogu biti izazvane nepravilnostima u stijenkama cijevi, varijacijama u gustoći fluida i ostalim faktorima...



laminarno

turbulentno

Turbulencija - primjer: zakrivljena lopta

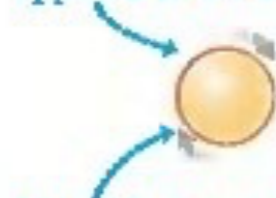


(a) Motion of air relative to a nonspinning ball



(b) Motion of a spinning ball

This side of the ball moves opposite to the airflow.



This side moves in the direction of the airflow.

(c) Force generated when a spinning ball moves through air

A moving ball drags the adjacent air with it. So, when air moves past a spinning ball:



On one side, the ball slows the air, creating a region of high pressure.

On the other side, the ball speeds the air, creating a region of low pressure.

The resultant force points in the direction of the low-pressure side.

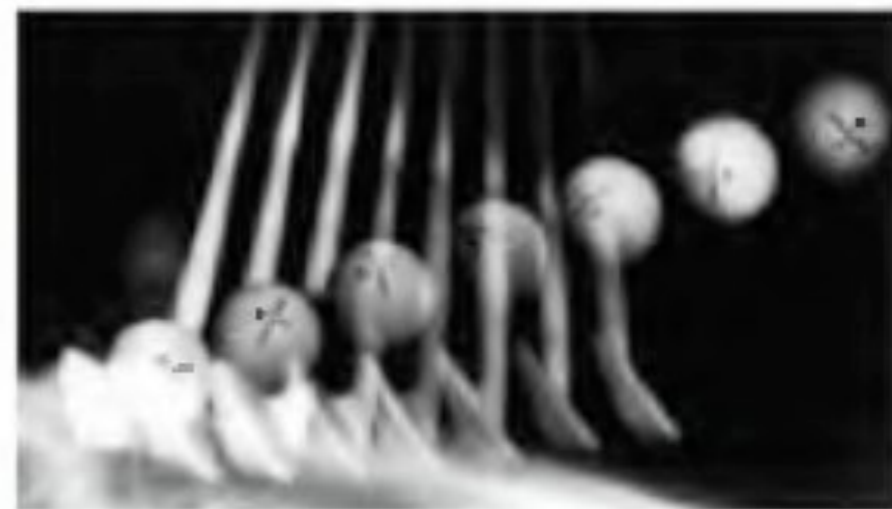
(d) Spin pushing a tennis ball downward



(e) Spin causing a curve ball to be deflected sideways



(f) Backspin of a golf ball



Zadatak:

U jednoj U-cijevi, površine poprečnog presjeka $S = 0.5 \text{ cm}^2$, nalazi se određena količina žive. Promjenom tlaka u jednom kraku ove cijevi izazovu se oscilacije žive u njoj. Koliki je period oscilacija ovog sustava ako je masa žive m , a gustoća ρ ?

U ravnotežnom stanju, razina žive u oba kraka U-cijevi je isti. Ako se pod djelovanjem povišenog tlaka u jednoj strani cijevi snizi razina žive za x , onda je ukupna visinska razlika razina u krakovima cijevi $2x$.

Intenzitet sile koja teži živu vratiti u ravnotežni položaj je

$$F = \Delta m \cdot g = 2xS\rho g = kx$$

gdje je $k = 2S\rho g$,

pa izraz za period oscilacija $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ dobiva oblik

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2S\rho g}}$$

