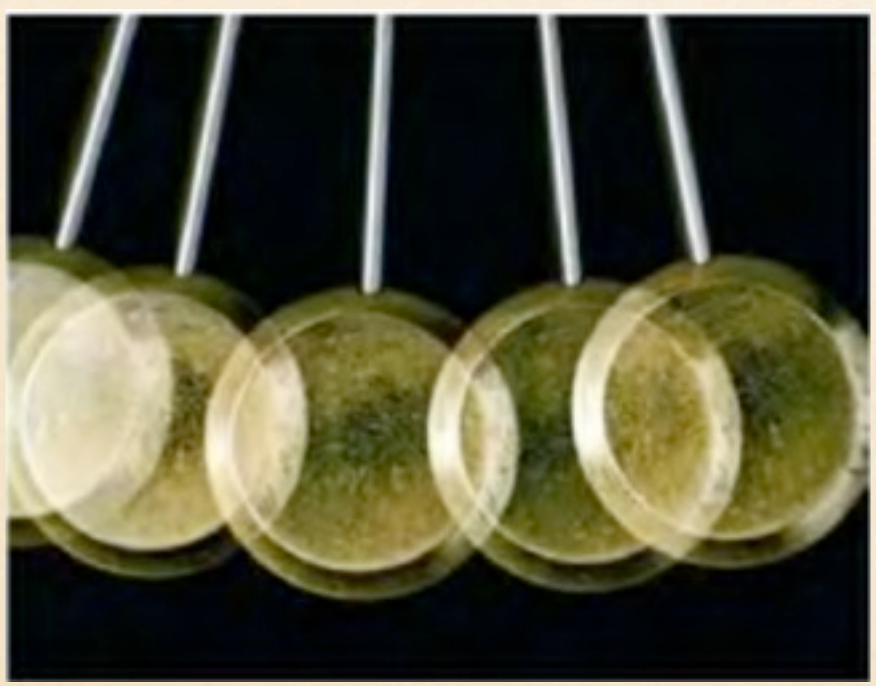
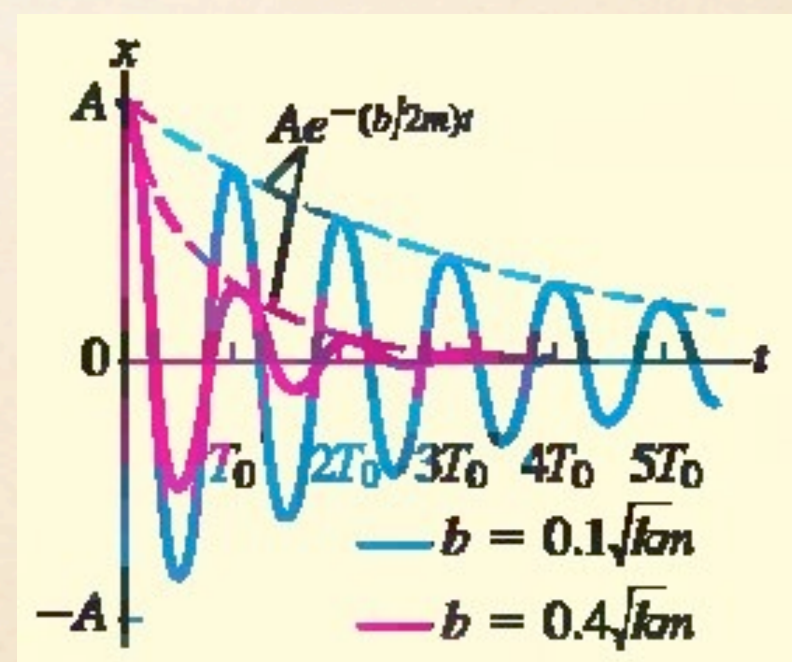
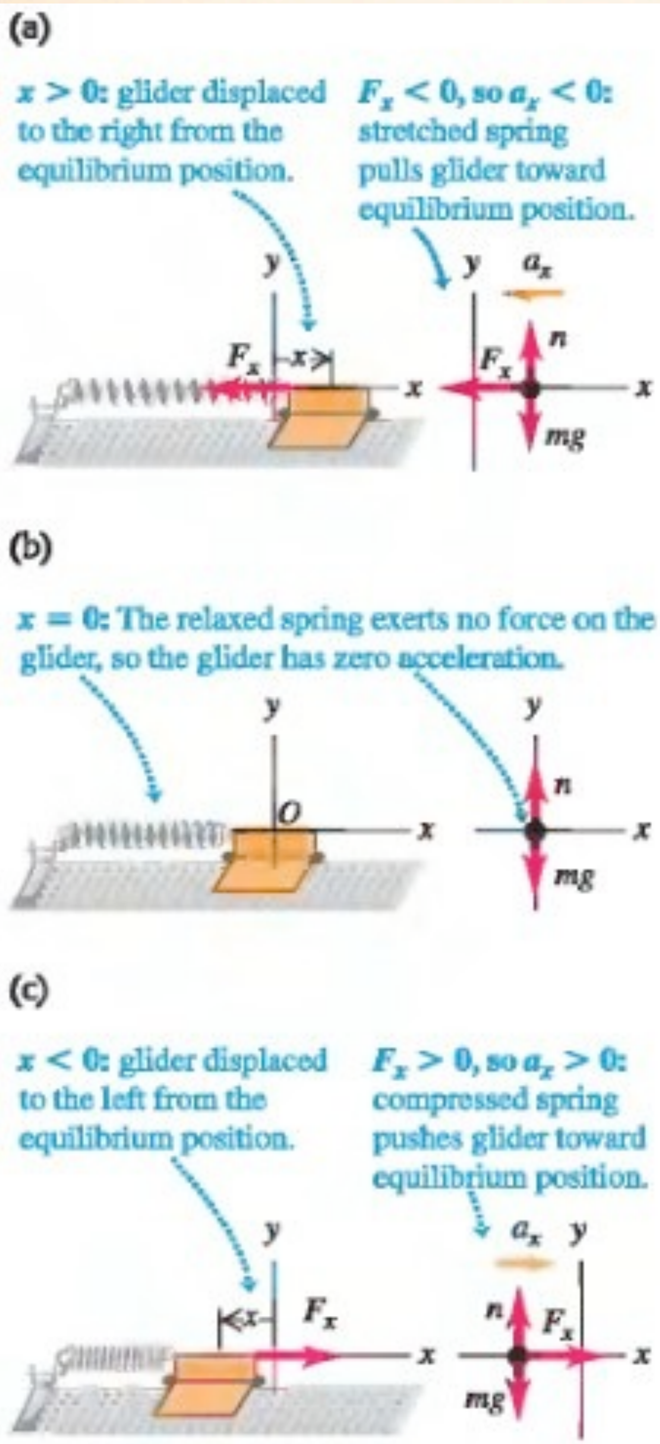
PERIODIČKO GIBANJE I ELASTIČNOST





OSCILACIJE - OPIS



- Tijelo mase m, nalazi se na površini bez trenja, pričvršćeno za oprugu zanemarive mase koja se moze sabijati i rastezati
- Sila opruge je jedina horizontalna sila koja djeluje na tijelo! Sila podloge i gravitacijska sila se poništavaju!
- Ishodište O = ravnotežni položaj opruge
- pomak x = udaljenost tijela od O, ali i istezanje opruge
- akceleracija tijela $\longrightarrow$ $a_x = F_x / m$
- pomak tijela iz položaja ravnoteže $\longrightarrow$ sila opruge ga želi vratiti natrag!

POVRATNA SILA!

- oscilacije se mogu pojaviti samo ukoliko postoji povratna sila koja sustav pokušava vratiti u ravnotežno stanje

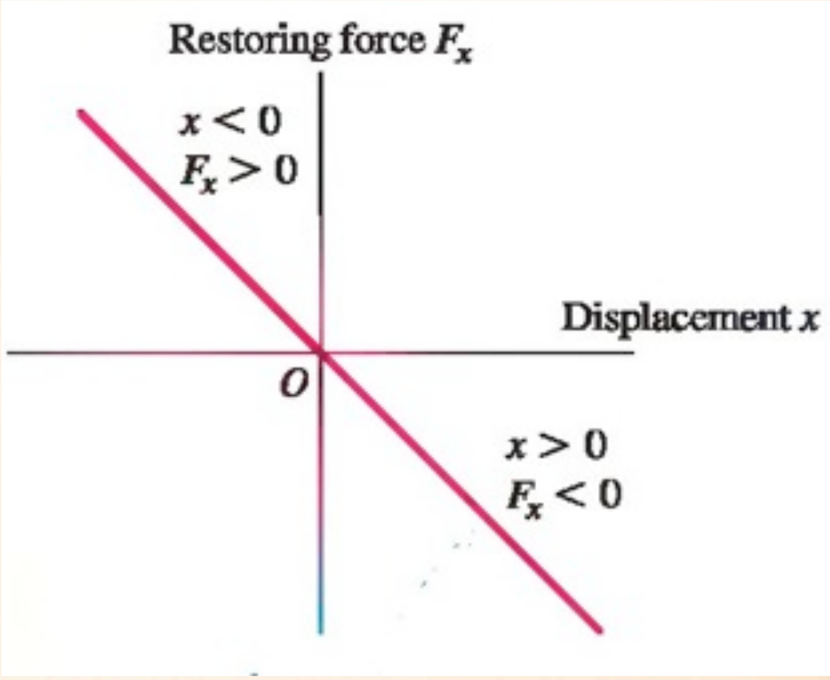
Amplituda, period, frekvencija i kutna frekvencija

- Amplituda, A, maksimalan iznos pomaka iz ravnotežnog položaja. A je uvijek pozitivna.
- Period, T, je vrijeme potrebno za jedan ciklus gibanja (od položaja A do položaja $-A$ i natrag do A. T je uvijek pozitivan.
- Frekvencija, f, je broj ciklusa u jedinici vremena. SI jedinica je hertz: 1 hertz = Hz = 1 ciklus/s = 1 s^{-1}. Ime je dobila po njemačkom fizičaru Heinrichu Hertzu (1857-1894), pioniru u istraživanju elektromagnetskih valova.
- Kutna frekvencija, ω, je $2\pi \times$ frekvencija: $\omega = 2\pi f$

  Vrijedi sljedeće: $f = \dfrac{1}{T}, \quad \omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$

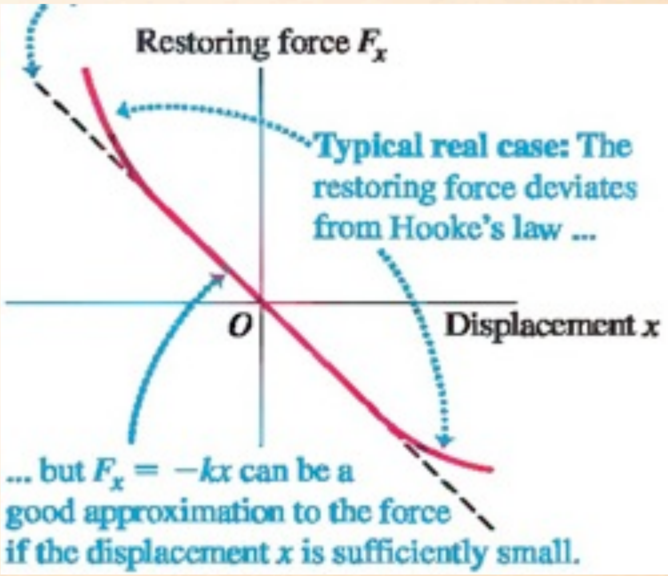
JEDNOSTAVNO HARMONIJSKO TITRANJE

- najjednostavnije oscilacijsko gibanje nastupa kada je povratna sila F_x proporcionalna pomaku x (Hookeov zakon)
- sa svake strane ravnotežnog položaja F_x i x



$$F_x = -kx = ma_x$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

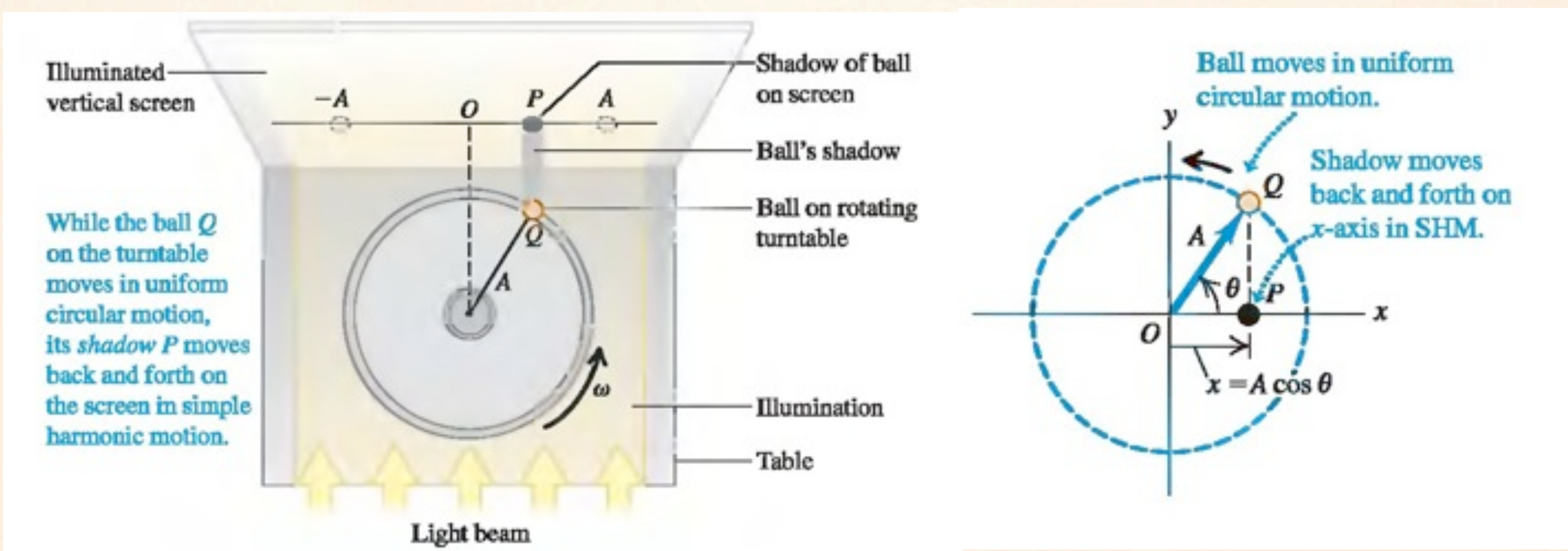


Jednostavno harmonijsko titranje

Harmonijski oscilator (H.O.)

VEZA IZMEDU JEDNOSTAVNOG HARMONIJSKOG TITRANJA I KRUŽNOG GIBANJA

- Zanima nas matematička formulacija jednostavnog harmonijskog titranja, tj. $x(t)$!
- a_x nije konstatno, već je proporcionalno x pa nam formule koje smo naučili za gibanje s konstantnim ubrzanjem ne pomažu



- Tvrdnja: gibanje tijela pričvršćenog za oprugu i sjene kuglice su *identični* ukoliko je amplituda titranja tijela jednaka polumjeru diska i frekevencija titranja jednaka kutnoj frekvenciji rotacije diska

Promatramo gibanje projekcije točke Q na os x

$$x = A\cos\theta,$$

$$a_Q = \omega^2 A,$$

$$a_x = -a_Q\cos\theta = -\omega^2 A\cos\theta$$

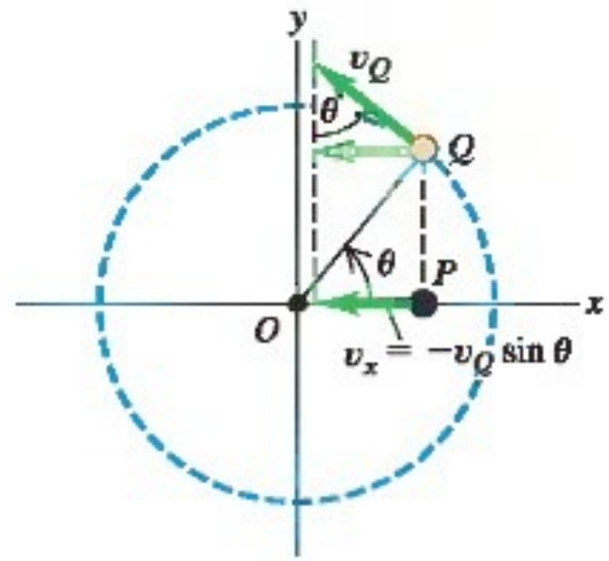
$$a_x = -\omega^2 x$$

Tijelo na opruzi

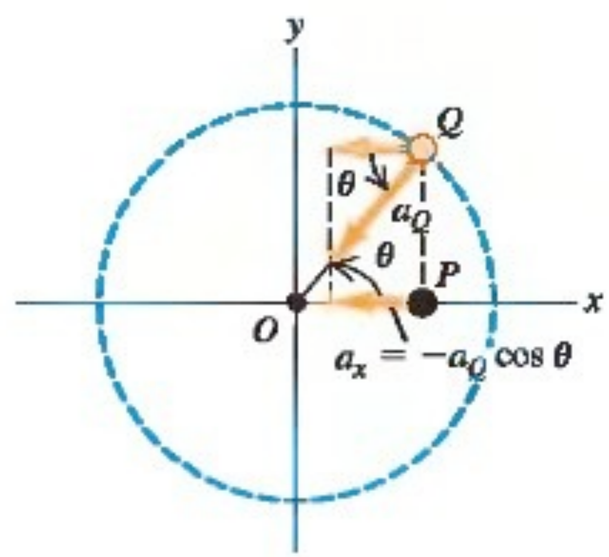
$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Dakle, kutna frekvencija jednostavnog harmonijskog titranja mase pričvrćene za oprugu je: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

(a) Using the reference circle to determine the x-velocity of point P



(b) Using the reference circle to determine the x-acceleration of point P



Frekvencija i period jednostavnog harmonijskog titranja:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Važno! Kod JHT frekvencija titranja ne ovisi o amplitudi!

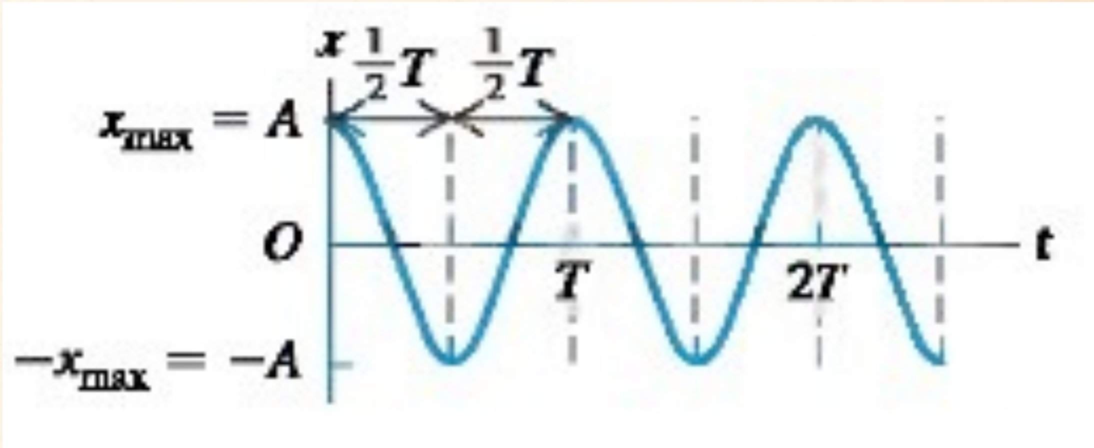
Primjer: zvučna viljuška

Pomak, brzina i akceleracija kod jednostavnog harmonijskog titranja:

$$\boxed{x = A\cos\theta}$$

U trenutku t = 0 fazor OQ zatvara kut Φ s osi x, tada će u nekom kasnijem trenutku t taj kut biti $\theta = \omega t + \Phi$

Pomak kod JHT: $x = A\cos(\omega t + \phi)$



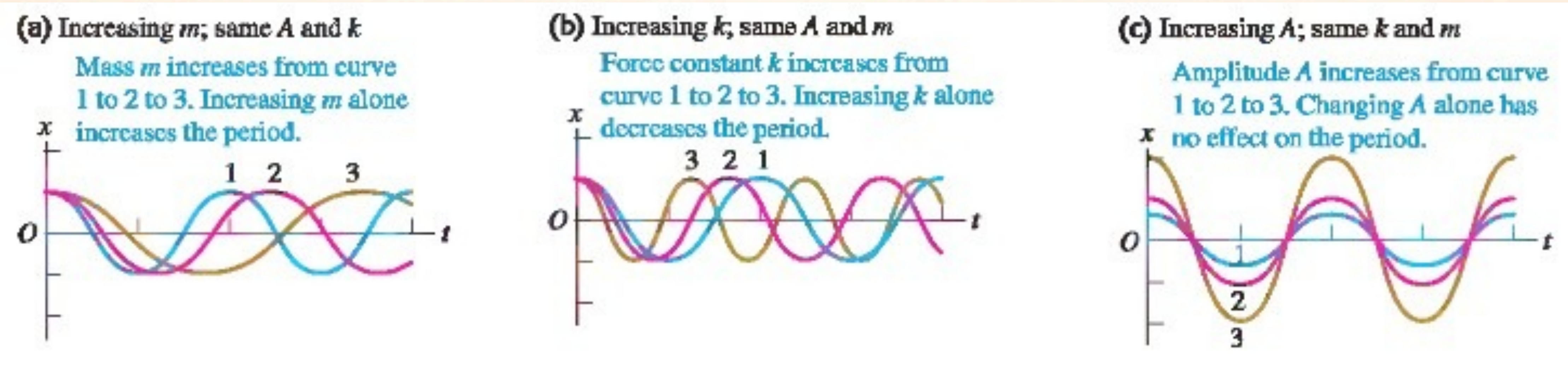
Period JHT:

$$\omega T = \sqrt{\frac{k}{m}}T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$$

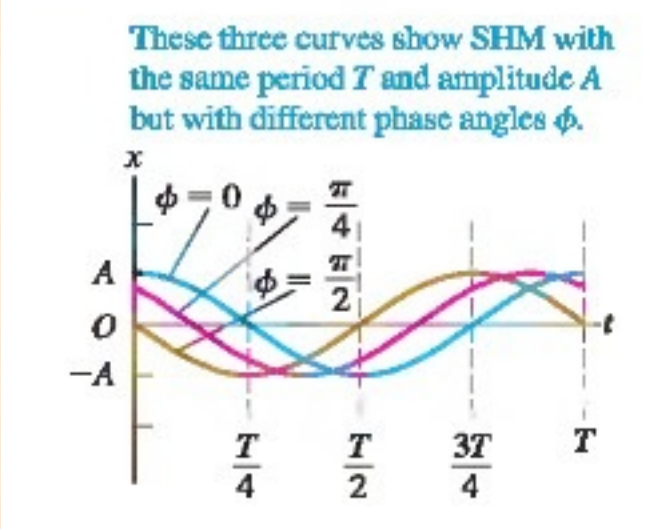
Konstanta Φ zove se fazni kut! Ona određuje na kojem položaju se nalazi točka u trenutku $t = 0$.
U trenutku $t = 0$, $x_0 = A\cos\Phi$

Primjeri:

$$x = A\cos(\omega t + \phi), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



13.11 Variations of SHM: displacement versus time for the same harmonic oscillator with different phase angles ϕ.



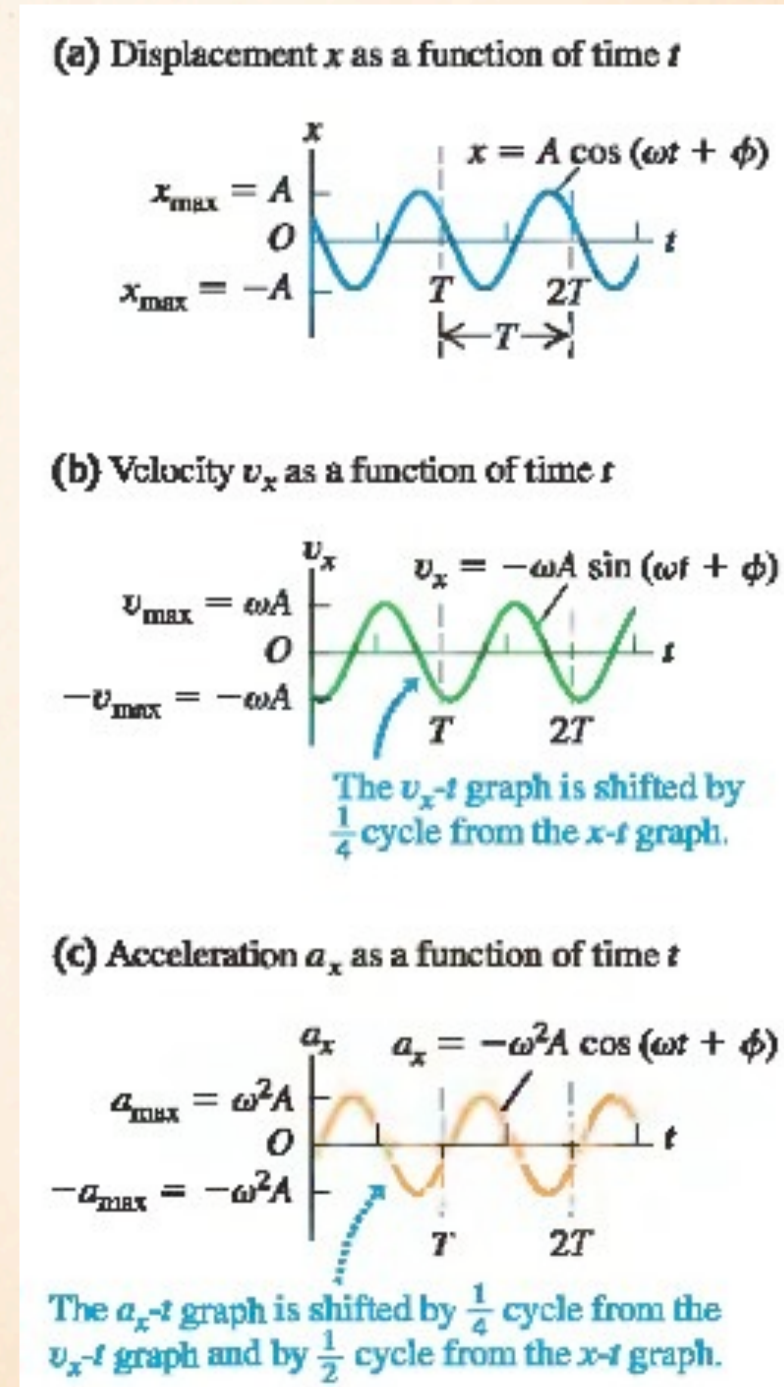
Formule

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$ – položaj

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$ – brzina

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$ – akceleracija

$$a_x = -\omega^2 x = -\frac{k}{m}x$$



Brzina oscilira između vrijednosti $-\omega A$ i $+\omega A$
Akceleracija oscilira između vrijednosti $-\omega^2 A$ i $+\omega^2 A$

Kako naći kut Φ i amplitudu *A*?

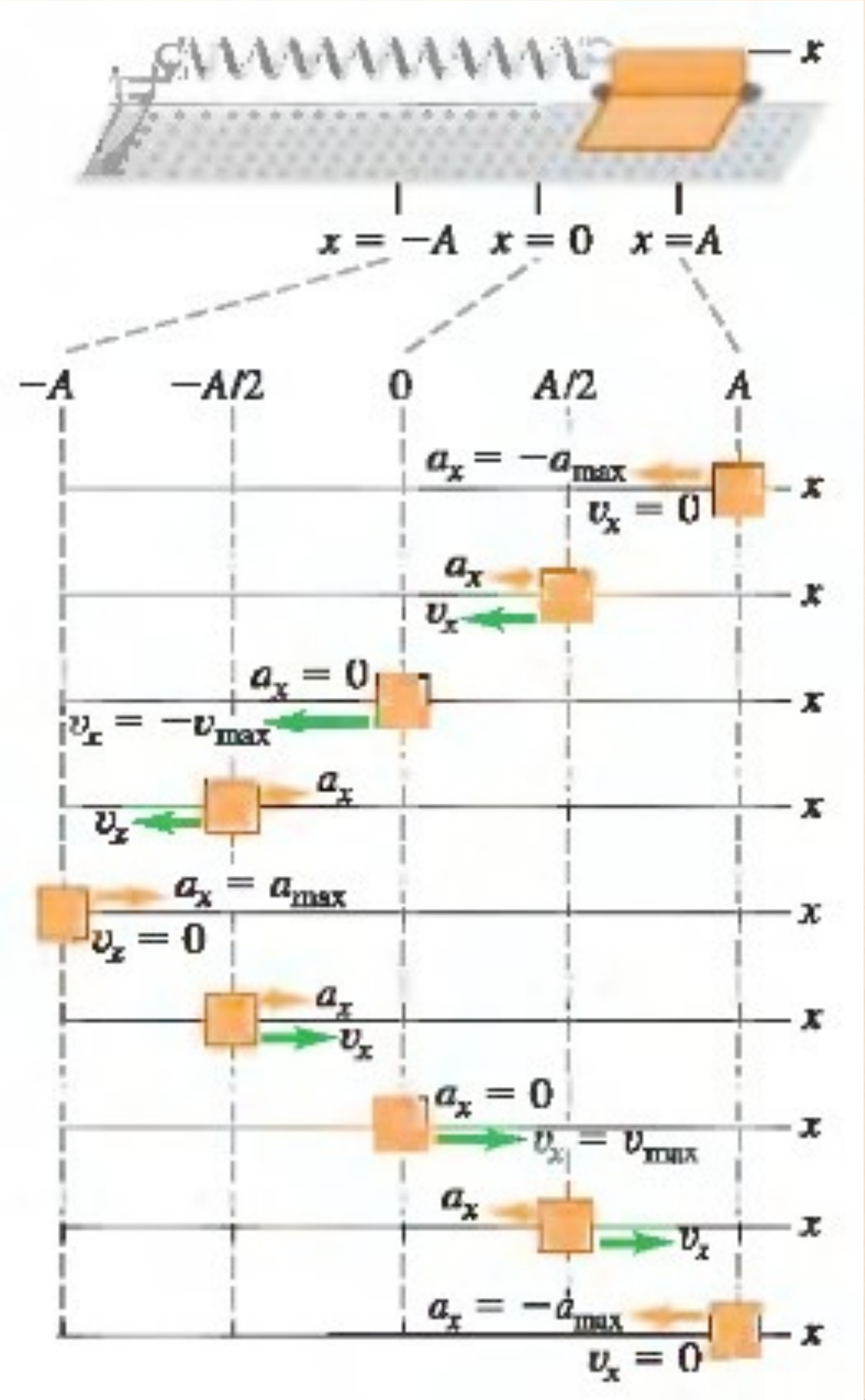
Poznati su početni položaj i brzina x_0 i v_{0x}

$$v_{0x} = -\omega A \sin\Phi$$

$$\frac{v_{0x}}{x_0} = \frac{-\omega A \sin\Phi}{A\cos\Phi} = -\omega \tan\Phi$$

$$\Phi = \arctan\left(-\frac{v_{0x}}{\omega x_0}\right)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}}{\omega x_0}}$$



ENERGIJA U JEDNOSTAVNOM HARMONIJSKOM TITRANJU

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{const.}$$

(zakon očuvanja energije)

u trenutku $t = 0$, $v_x = 0$, $x = A$:

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

→ ukupna energija H.O.

izvod:

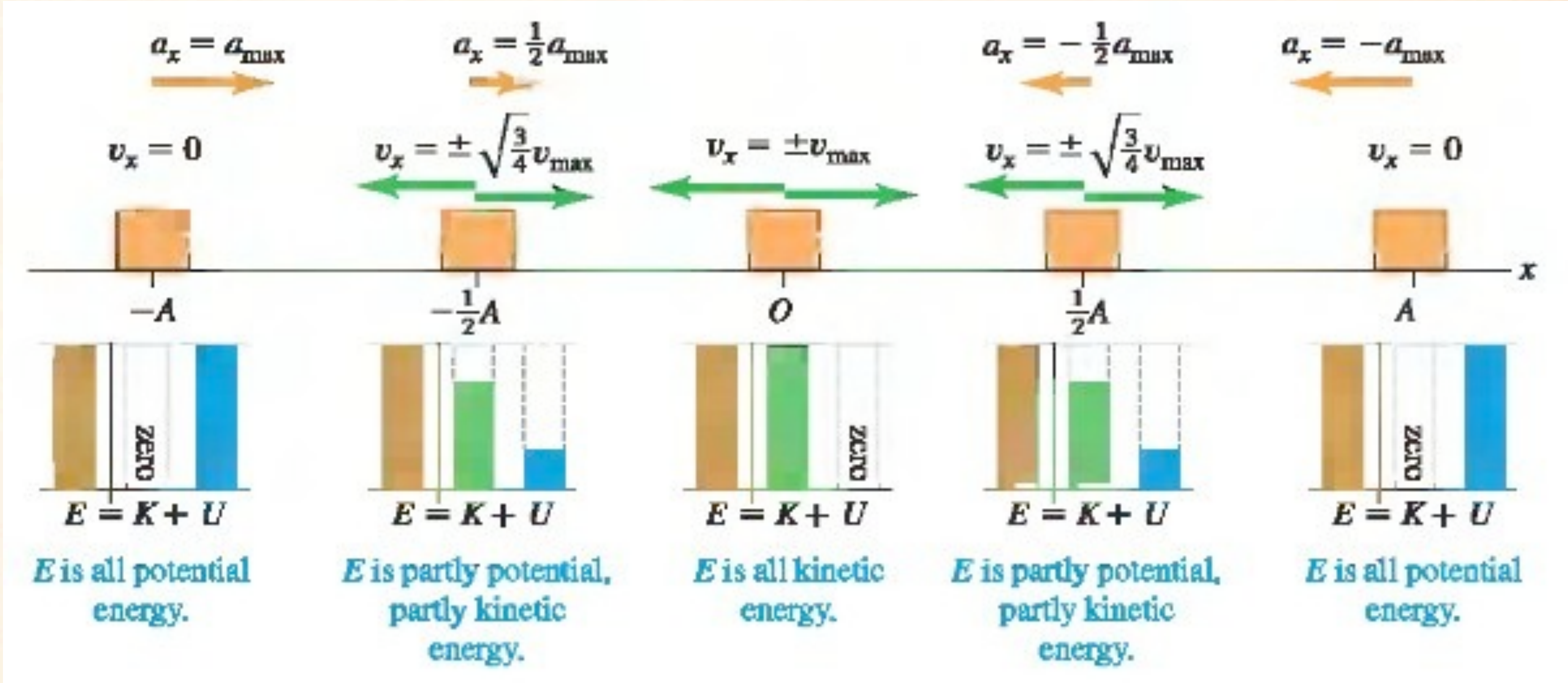
$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\left[-\omega A\sin(\omega t+\phi)\right]^2 + \frac{1}{2}k\left[A\cos(\omega t+\phi)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\phi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\phi)$$

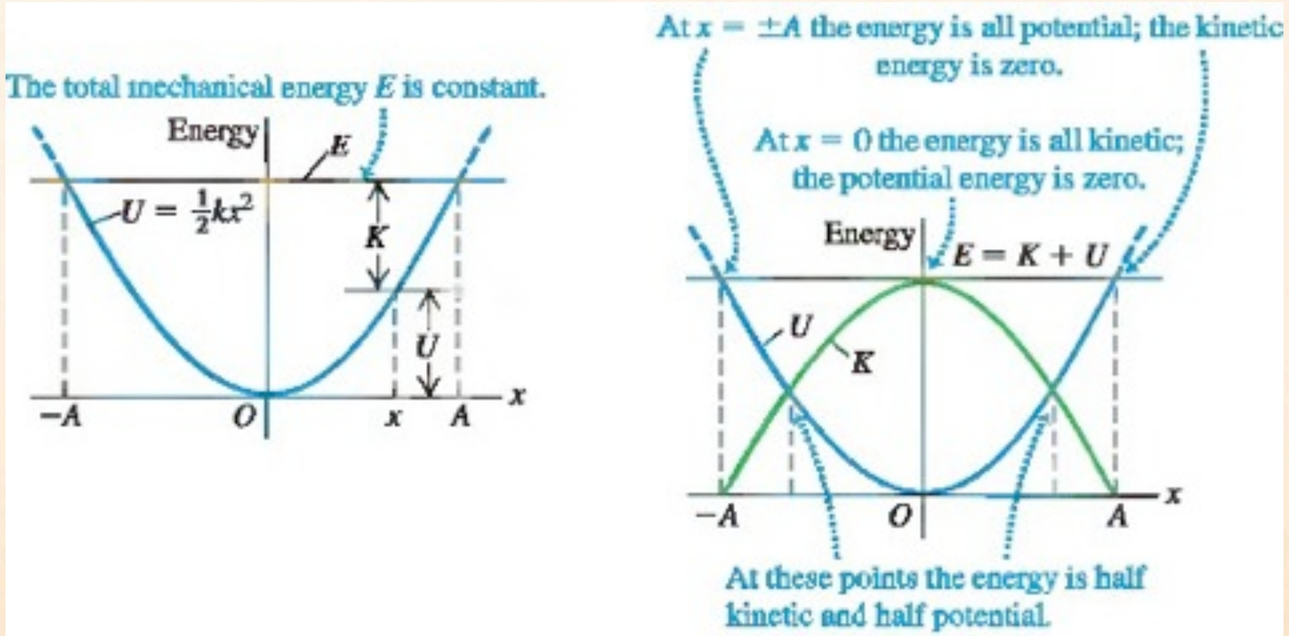
$$= \frac{1}{2}kA^2$$

iz ukupne energije H.O.: $v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2}, \quad v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \omega A$

značenje E, K i U kod H.O.:

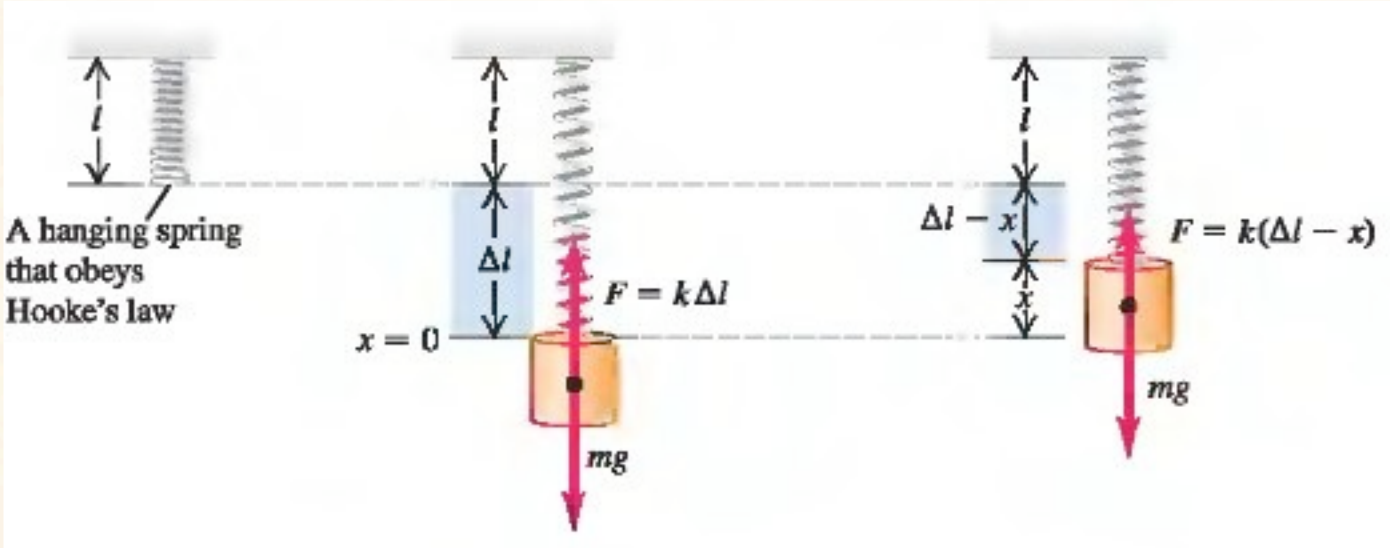


graf energije:



PRIMJERI JEDNOSTAVNOG HARMONIJSKOG TITRANJA

Vertikalno J.H.G.

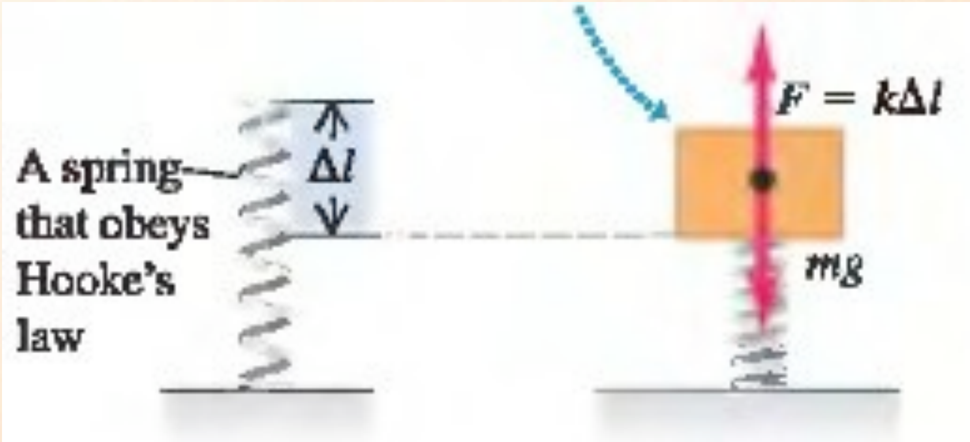


ravnotežni položaj $\longrightarrow$ $k\Delta l = mg$

ako je tijelo x iznad položaja ravnoteže $\longrightarrow$ $F_{tot} = k(\Delta l - x) + (-mg) = -kx$

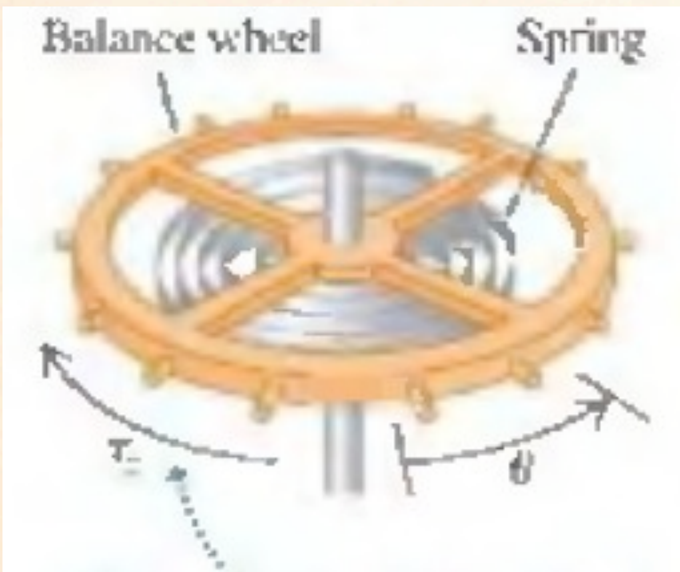
Gibanje je J.H.T.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Kutno J.H.G

Mehanički sat prikazuje točno vrijeme pomoću balansnog kotača



- kotač momenta tromosti I (oko svoje osi)
- opruga djeluje na kotač povratnim momentom τ

$$\tau = -\kappa\theta$$

$$\sum \tau = I\alpha = I \, {d^2\theta}/{dt^2}$$

$$-\kappa\theta = I\alpha \quad \text{tj.} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta$$

Ove jednadžbe odgovaraju jednadžbama H.O. gdje θ ima ulogu x, a κ/I ima ulogu k/m.

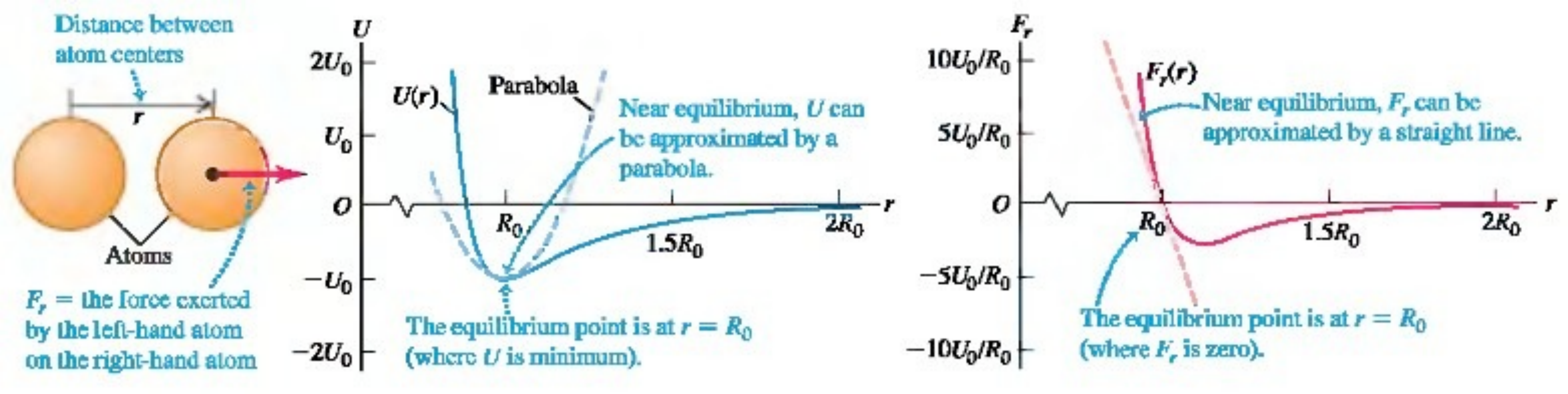
$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$ frekvencija J.H.G.

$$\theta = \Theta\cos(\omega t + \phi)$$ gibanje

Vibracije molekula

- ro ravnotežna udaljenost dva atoma
- $r < r_o$ atomi se odbijaju, $r > r_o$ atomi se privlače
- Van der Waalsova interakcija
- potencijalna energija:

$$U = U_0\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{R_0}{r}\right)^{6}\right]$$



$$F_r = -\frac{dU}{dr} = U_0\left[\frac{12R_0^{12}}{r^{13}} - 2\frac{6R_0^{6}}{r^{7}}\right] = 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{r}\right)^{7}\right]$$

$$r < R_0 \Rightarrow F > 0$$
$$r > R_0 \Rightarrow F < 0$$

Neka je x pomak iz ravnotežnog položaja, $x = r - R_0$

$$F_r = 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{R_0+x}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{R_0+x}\right)^{7}\right] = 12\frac{U_0}{R_0}\left[\frac{1}{\left(1+x/R_0\right)^{13}} - \frac{1}{\left(1+x/R_0\right)^{7}}\right]$$

$$F_x \neq -kx$$

NEMA oblik Hookeovog zakona!

Ali, ako se ograničimo na samo male amplitude titranja:

$$\left(1+u^n\right) = 1 + nu + \frac{n(n-1)}{2!}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{\left(1+x/R_0\right)^{13}} = \left(1+x/R_0\right)^{-13} \approx 1 + (-13)\frac{x}{R_0}$$

$$\frac{1}{\left(1+x/R_0\right)^{7}} = \left(1+x/R_0\right)^{-7} \approx 1 + (-7)\frac{x}{R_0}$$

$$F_r = 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(1+(-13)\frac{x}{R_0}\right) - \left(1+(-7)\frac{x}{R_0}\right)\right] = -\left(\frac{72U_0}{R_0^2}\right)x$$

$$F_x = -kx$$

$$k = \frac{72U_0}{R_0^2}$$

JEDNOSTAVNO (MATEMATIČKO) NJIHALO

Matematičko njihalo: idealizirani model, točkasta masa koja visi na neelastičnoj niti (bez mase)

Pomak x je duž luka koji točka opisuje za vrijeme njihanja, $x = L\theta$

Povratna sila: $\boxed{F_\theta = -mg\sin\theta}$

frekvencija

period

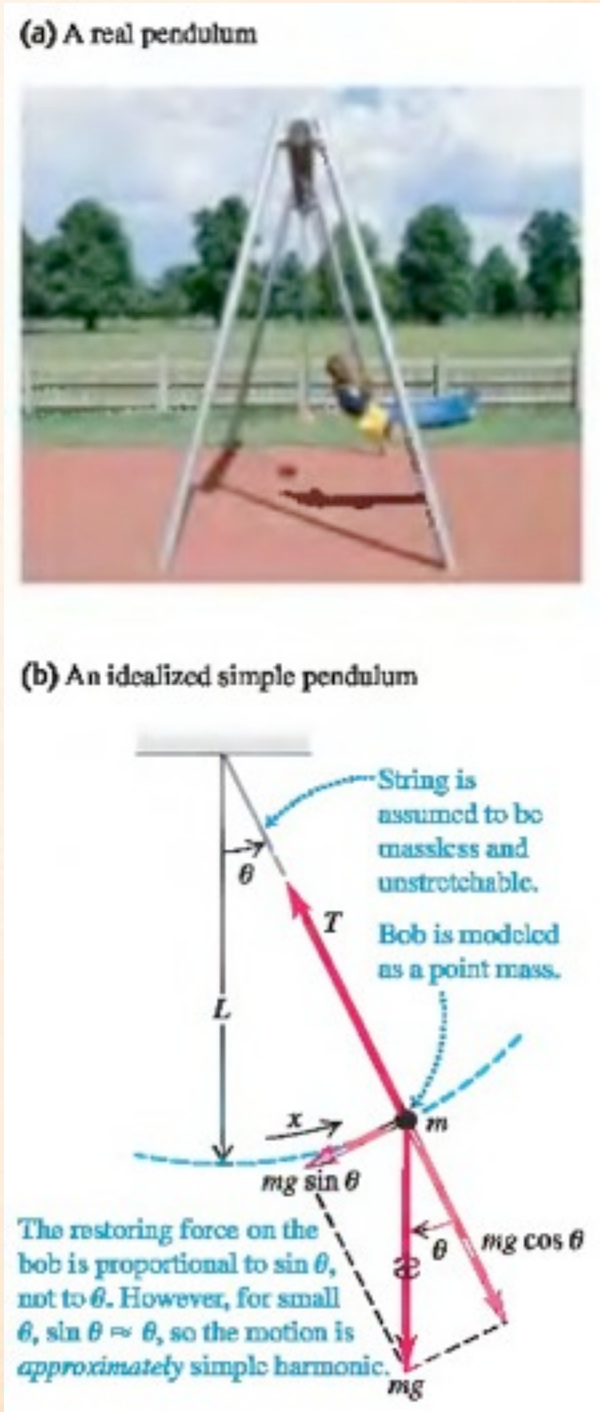
Za male oscilacije vrijedi aproksimacija $\sin\theta \approx \theta$ (npr. ako je θ = 0.01 rad (oko 6°), sin θ = 0.0998, razlika je 0.02%)

$$F_\theta = -mg\theta = -\frac{mg}{L}x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg/L}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$ frekvencija

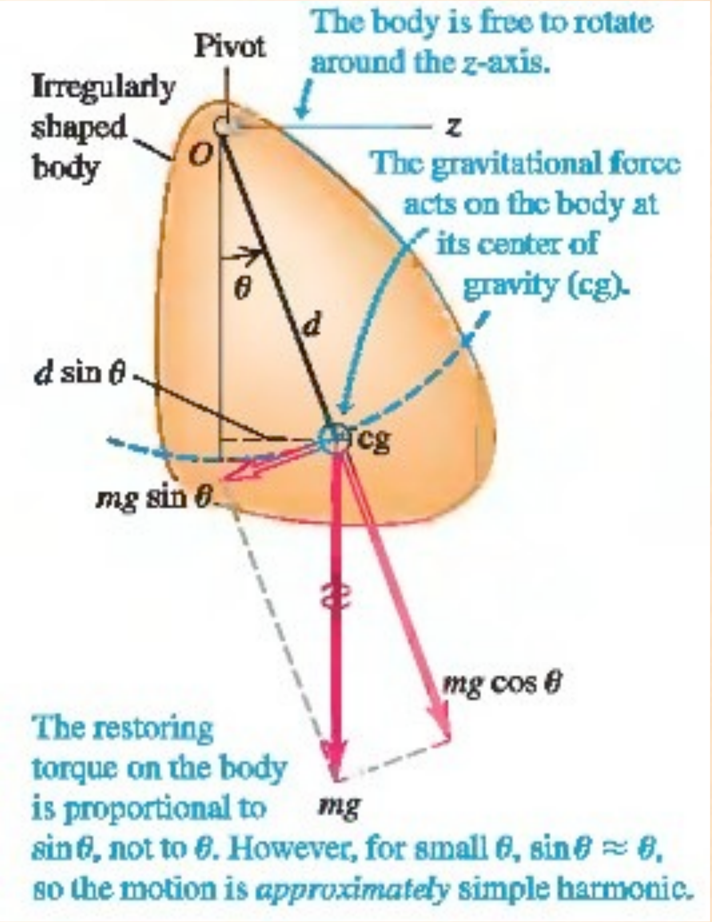
$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$ period

nema ovisnosti o masi!



FIZIČKO NJIHALO

Fizičko njihalo: *stvarno* njihalo s tijelom konačnih dimenzija! Za male oscilacije vrijedi jednaka aproksimacija kao i za matematičko njihalo!
U ravnotežnom položaju centar mase nalazi se na ispod hvatišta.
Udaljenost od hvatišta do CM je *d*, moment tromosti tijela oko osi rotacije koja prolazi kroz hvatište je *I*, masa tijela je *m*.



Zakretni moment je: $\tau_g = -(mg)(d\sin\theta)$

Aproksimacija malog kuta: $\tau_g = -(mg)\theta$

Jednadžba gibanja: $\sum \tau_g = I\alpha_g$

$$-(mgd)\theta = I\alpha_g = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\theta$$

$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$	frekvencija
$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$	period

GUŠENE OSCILACIJE

Realne situacije, u kojima postoje disipativne sile!

Npr. trenje - amplituda titranja se smanjuje u vremenu

Ovo smanjenje se naziva prigušeno titranje

H.O. s trenjem koje je proporcionalno brzini:

$$\sum F_x = -kx - bv_x$$

Jednadžba gibanja: $-kx - bv_x = ma_x$ tj. $- kx - b\dfrac{dt}{dx} = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

Rješenje:

$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos(\omega' t + \phi)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Razlike u odnosu na O.H.T.:

a) amplituda nije konstantna, smanjuje se s vremenom zbog člana $e^{-(b/2m)t}$

b) frekvencija nije više $\omega = \sqrt{k/m}$ nego ima dodatni član $\left(\omega' = \sqrt{k/m - b^2/4m^2}\right)$

Razlikujemo 3 slučaja:

1. kada je $k/m = b^2/4m^2 \quad \Rightarrow \quad \omega' = 0$

   $\left(b = 2\sqrt{km}\right)$

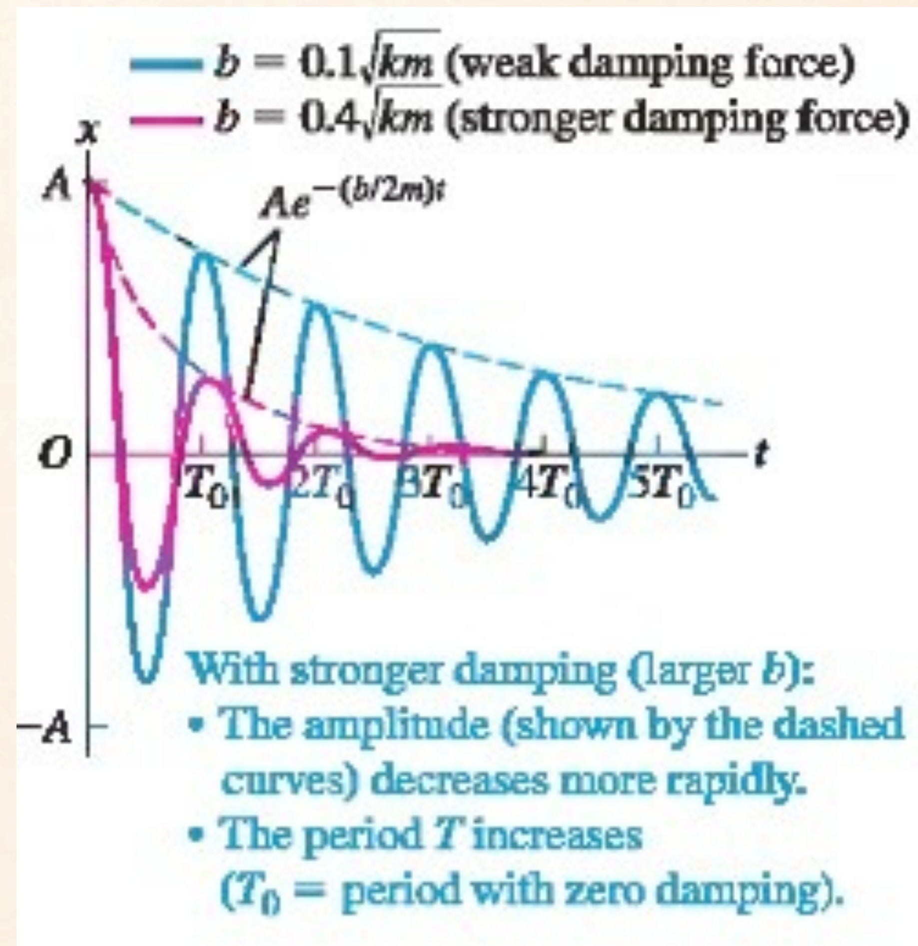
   KRITIČNO GUŠENJE

2. kada je $b > 2\sqrt{km}$

   NADKRITIČNO GUŠENJE

3. kada je $b < 2\sqrt{km}$

   PODKRITIČNO GUŠENJE



Energija kod gušenog titranja:

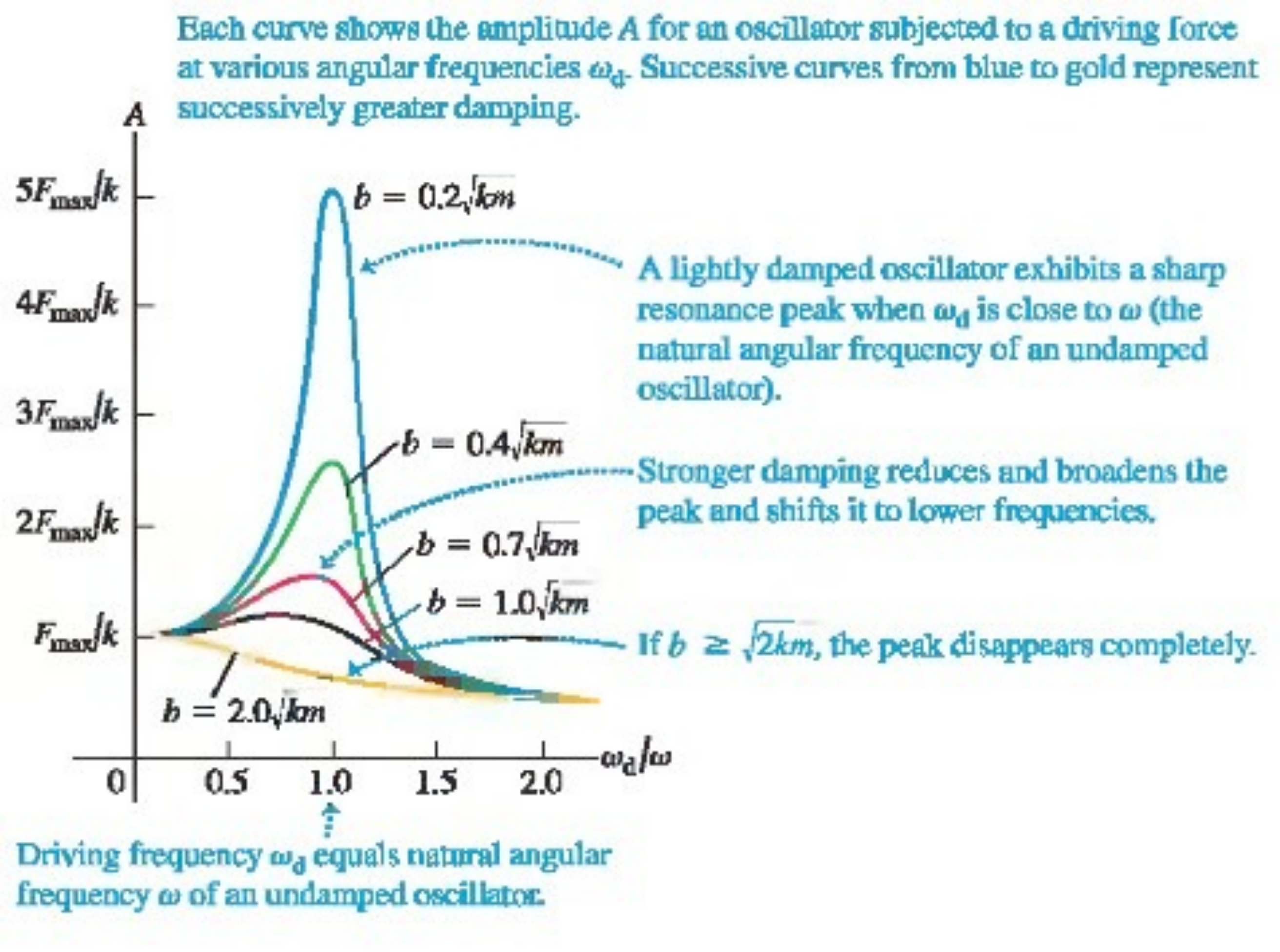
$$E = 1/2\, m v_x^2 + 1/2\, k x^2$$

$$\frac{dE}{dt} = m v_x \frac{dv_x}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = \ldots = -b v_x^2$$

PRISILNE OSCILACIJE I REZONANCIJA

Realan sustav (s prigušenjem) na njega djelujemo vanjskom pobudom frekvencije ω_d!

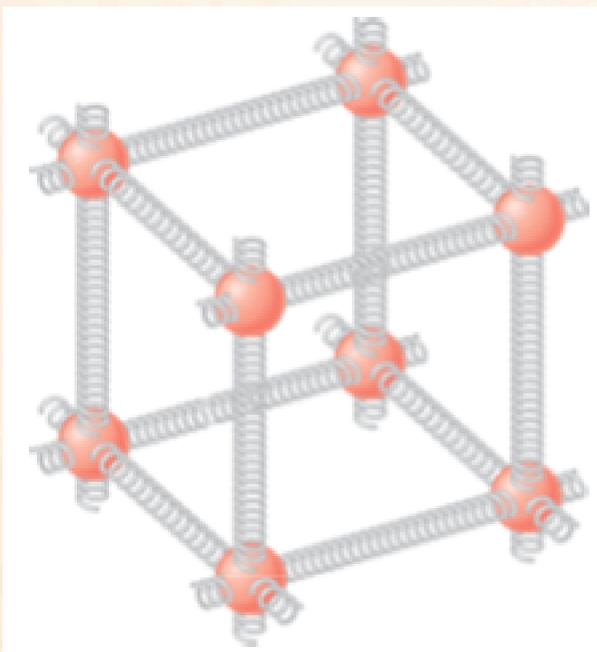
U slučaju kada je $\omega_d \approx \omega'$ ⟶ amplituda se povećava u ovisnosti o b (jakosti prigušenja)!



pobuda: $F = F_{\max} \cos \omega_d t$

$$A = \frac{F_{\max}}{\sqrt{\left(k - m\omega_d^2\right)^2 + b^2\omega_d^2}}$$

ELASTIČNOST



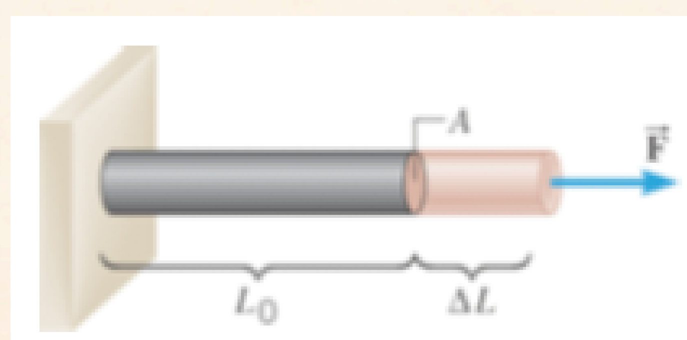
Sile između atoma u molekuli drže atome zajedno

Sila koja deformira kruto tijelo

$$F = Y\frac{\Delta l}{l_0}A$$

$\boxed{\text{Youngov modul}}$

Δl - produljenje
l_o - izvorna duljina
A - površina



Material	Young's Modulus Y (N/m^2)
Aluminum	6.9×10^{10}
Bone	
Compression	9.4×10^{9}
Tension	1.6×10^{10}
Brass	9.0×10^{10}
Brick	1.4×10^{10}
Copper	1.1×10^{11}
Mohair	2.9×10^{9}
Nylon	3.7×10^{9}
Pyrex glass	6.2×10^{10}
Steel	2.0×10^{11}
Teflon	3.7×10^{8}
Titanium	1.2×10^{11}
Tungsten	3.6×10^{11}