# IMPULS SILE I KOLIČINA GIBANJA

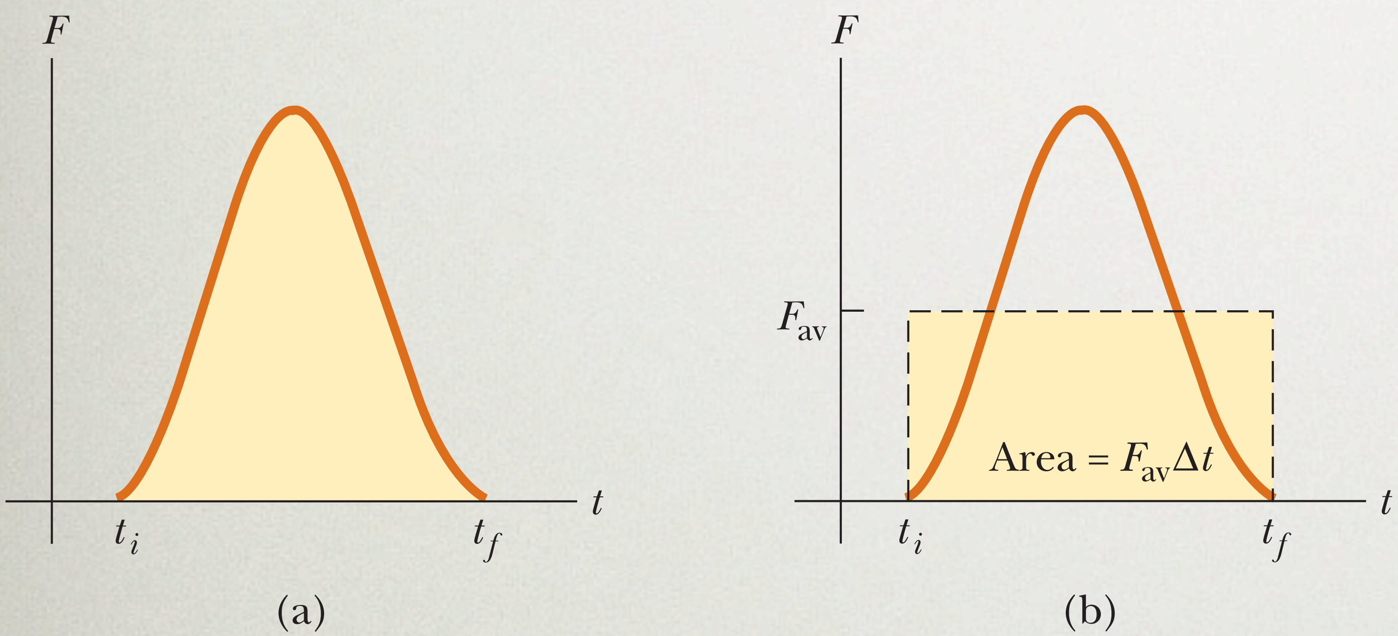
# ROTACIJA KRUTOG TIJELA

## MOMENT SILE, MOMENT TROMOSTI, RAD I ENERGIJA ROTACIJE. CENTAR MASE I UVJETI RAVNOTEŽE


George Semple

# IMPULS SILE

U realnim situacijama, sila koja djeluje na tijelo nije konstantna, već je funkcija vremena (npr. sila kojom djelujemo reketom na tenisku lopticu)




Definiramo impuls sile kojim opisujemo kako sila koja se mijenja u vremenu utječe na gibanje tijela!

Impuls sile definiramo kao umnožak prosječne sile i vremenskog intervala za vrijeme kojeg sila djeluje:

$$\vec{J} = \bar{\vec{F}} \cdot \Delta t$$

Impuls sile je vektor u smjeru sile *F*. SI jedinica je [N · m]

# KOLIČINA GIBANJA

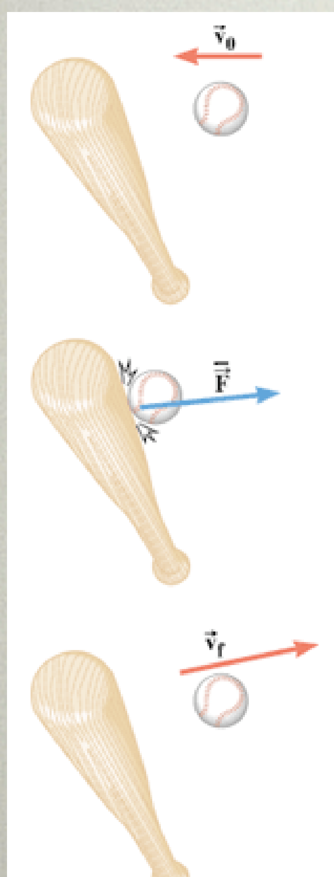
Masa i brzina igraju ulogu u tome kako tijelo reagira na dani impuls sile. Efekt mase i brzine uključujemo u koncept količine gibanja.

Količina gibanja, *p*, je umnožak mase tijela i njegove brzine!

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Količina gibanja je vektor u smjeru brzine tijela.

SI jedinica je [kg · m/s]




Kada palica udari loptu, prosječna sila se prenosi na loptu, te se zbog toga početna brzina loptice $v_0$ mijenja na konačnu $v_f$.

Pri udarcu lopta dobije ubrzanje:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_0}{\Delta t}$$

# VEZA IMPULSA SILE I KOLIČINE GIBANJA

Prema 2. Newtonovom zakonu, prosječna sila izaziva prosječno ubrzanje tijela

$$\sum \bar{\vec{F}} = m \cdot \bar{\vec{a}}$$

Uvrštavajući izraz za prosječno ubrzanje dobivamo vezu impulsa sile i količine gibanja:

IMPULS SILE = PROMJENA KOLIČINE GIBANJA

$$\sum \bar{\vec{F}} \Delta t = m\vec{v}_f - m\vec{v}_0$$

konačna količina gibanja    početna količina gibanja

Ovo je oblik 2. Newtonovog zakona kako ga je upravo Newton oblikovao!

Tijekom interakcije teško je mjeriti prosječnu silu, dok brzinu prije i poslije interakcije možemo lako izmjeriti

# KONCEPTUALNO PITANJE

Skačemo sa stijene na obali. Ako doskočimo na pijesak, vrijeme zaustavljanja je znatno kraće nego ako doskočimo na vodu. Koristeći vezu impulsa sile i količine gibanja odredite koja je tvrdnja ispravna:

a) Zaustavljajući nas pijesak uzrokuje veći impuls sile nego voda.

b) Zaustavljajući nas, pijesak i voda uzrokuju isti impuls, ali pijesak djeluje većom prosječnom silom.

c) Zaustavljajući nas, pijesak i voda uzrokuju isti impuls, ali pijesak djeluje manjom prosječnom silom.

# PRIMJER: TENISAČ

Vrhunski tenisači mogu servirati loptu tako da kreće brzinom od 55 m/s. Ukoliko lopta ima masu 0.06 kg, i u kontaktu je s reketom otprilike 4 ms, izračunajte kolika je prosječna sila koja djeluje na loptu? Da li je ta sila dovoljna da podigne osobu tesku 60 kg?

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv_2 - mv_1}{\Delta t}$$

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{(0.060\ \mathrm{kg})(55\ \mathrm{m/s}) - 0}{0.004\ \mathrm{s}} \approx 800\ \mathrm{N}.$$

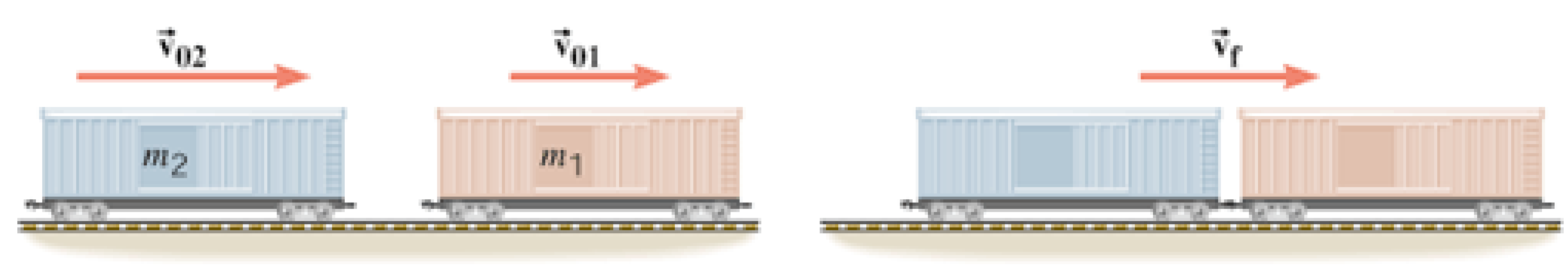
# ZAKON OČUVANJA KOLIČINE GIBANJA

Zakon očuvanja količine gibanja (za izolirani sustav)

$$m_2\vec{v}_{f2} + m_1\vec{v}_{f1} = m_2\vec{v}_{02} + m_1\vec{v}_{01}$$

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{p}_0$$

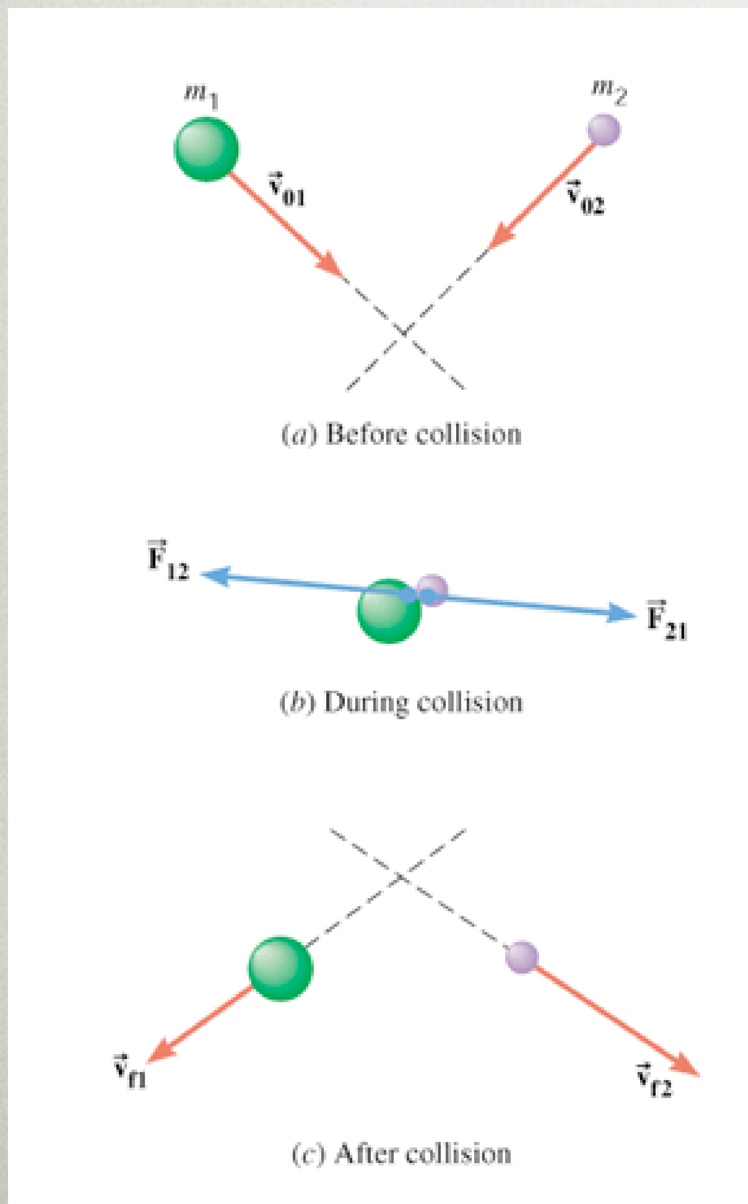
Ukupna količina gibanja izoliranog sustava ostaje očuvana (konstantna). Izolirani sustav je onaj u kojem je vektorski zbroj prosječnih vanjskih sila koje djeluju na sustav 0.




(*a*) Before coupling (*b*) After coupling

# ZAKON OČUVANJA KOLIČINE GIBANJA

Promotrimo sudar kuglica različitih masa i brzina. Tijekom sudara djeluju unutrašnje sile $F_{12}$ i $F_{21}$. Ako na kuglice ne djeluju vanjske sile, ili je njihov zbroj 0:




$$\bar{\vec{F}}_{12}\Delta t = m_1\vec{v}_{f1} - m_1\vec{v}_{01}$$

$$\bar{\vec{F}}_{21}\Delta t = m_2\vec{v}_{f2} - m_2\vec{v}_{02}$$

Koristeći 3. Newtonov zakon dobivamo zakon očuvanja količine gibanja:

$$\left(m_2\vec{v}_{f2} + m_1\vec{v}_{f1}\right) - \left(m_2\vec{v}_{02} + m_1\vec{v}_{01}\right) = 0$$

$$P_f - P_0 = 0 \quad \rightarrow \quad P_f = P_0$$

Koristeći 3. Newtonov zakon dobivamo zakon očuvanja količine gibanja!

# ZAKON OČUVANJA KOLIČINE GIBANJA

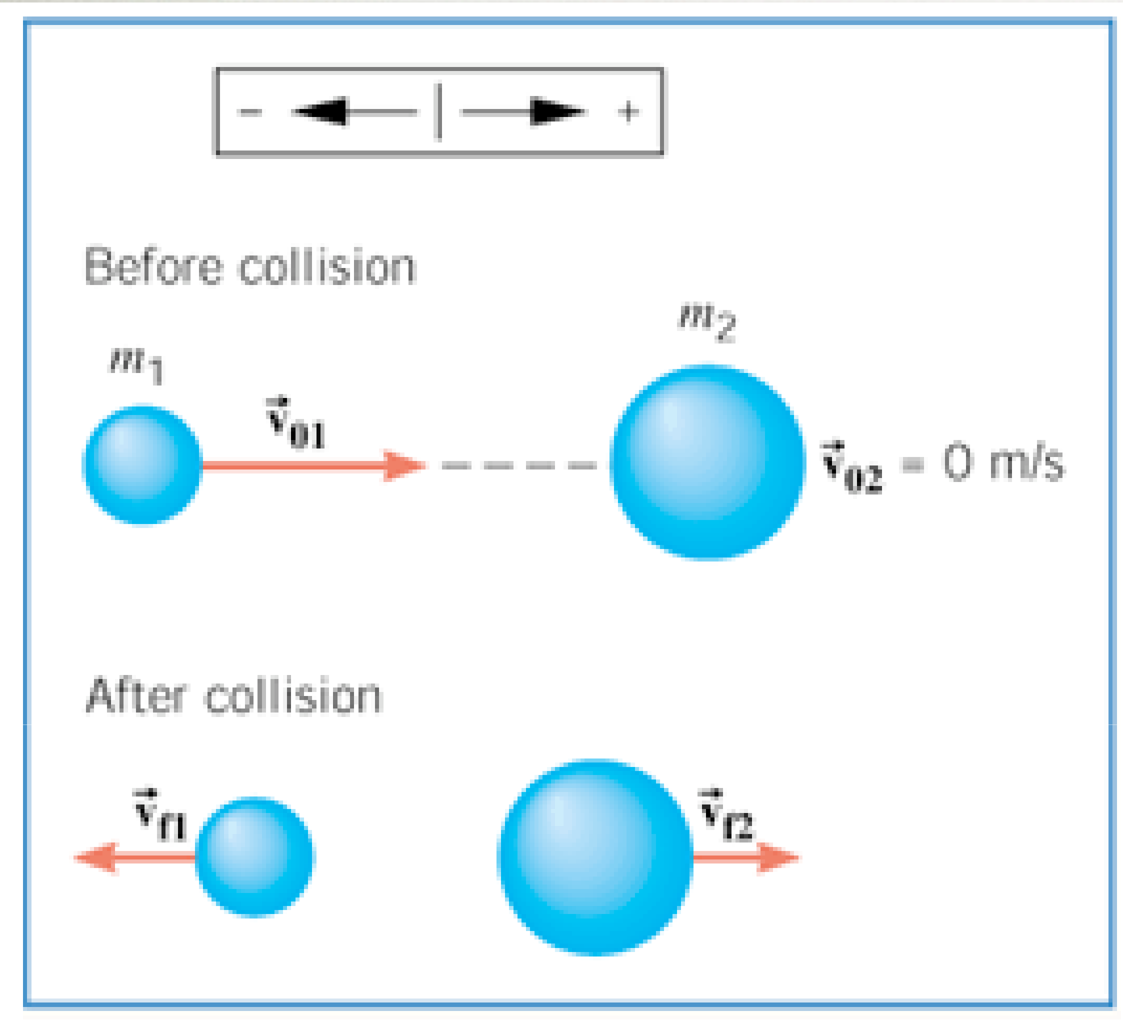

U odsustvu trenja dvoje klizača čine zatvoreni sustav.

Kada se klizači odgurnu ukupna količina gibanja ostaje 0, jer je tolika bila u početnom trenutku.

Ukupna količina gibanja ostaje ista i kada se kinetička energija dijelova sustava mijenja.

Početna kinetička energija klizača je 0. Odgurivanjem oni obavljaju rad unutrašnje sile na svakog od klizača.

# SUDARI




Kada su tijela atomi ili subatomske čestice tada je kinetička energija obično dobro očuvana. Stoga je ukupna kinetička energija čestica prije sudara jednaka ukupnoj kinetičkoj energiji čestica nakon sudara. Kinetička energija se prenosi s jedne čestice na drugu.

Kod makroskopskih tijela, kinetička energija nakon sudara obično je manja nego prije, zbog trenja ili deformacije tijela.

Elastični sudar - kinetička energija sustava nakon sudara jednaka je kinetičkoj energiji prije sudara!

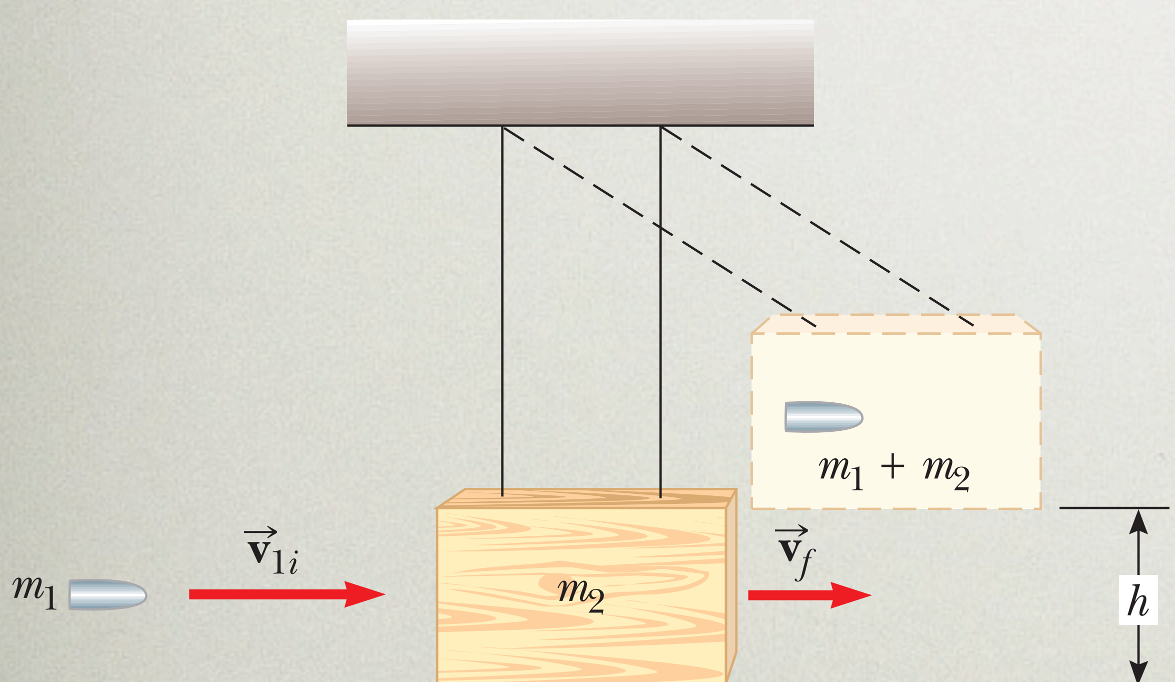
Neelastični sudar - ukupna kinetička energija prije sudara nije jednaka kinetičkoj energiji nakon sudara! Ako se tijela spoje nakon sudara, takav sudar zovemo savršeno neelastičan.

# SUDARI

- Kod sudara uvijek vrijedi zakon očuvanja količine gibanja!
- Također uvijek vrijedi zakon očuvanja ukupne energije!
- Ukoliko je sudar elastičan, tada vrijedi zakon očuvanja kinetičke energije!

# PRIMJER: BALISTIČKO NJIHALO

Balističko njihalo je uređaj koji se koristi za određivanje brzine veoma brzih projektila, poput metka. Metak se ispucava u komad drva koji visi, pričvršćen na dvije žice. Drvo zaustavlja metak i cijeli sustav se diže na visinu *h*. Poznavajući dvije mase i visinu *h*, moguće je odrediti brzinu metka. Ramotrite ovaj primjer savršeno neelastičnog sudara za slučaj kada su mase metka i drva $m_1 = 5$ g, $m_2 = 1$ kg i visina na koju se digne sustav $h = 5$ cm.



(a)

$$p_i = p_f$$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$(5.00 \times 10^{-3}\ \text{kg}) v_{1i} + 0 = (1.005\ \text{kg}) v_f$$

$$(KE + PE)_{\text{after collision}} = (KE + PE)_{\text{top}}$$

$$\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 + 0 = 0 + (m_1 + m_2) g h$$

$$v_f^2 = 2gh$$

$$v_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.80\ \text{m/s}^2)(5.00 \times 10^{-2}\ \text{m})}$$

$$v_f = 0.990\ \text{m/s}$$

$$v_{1i} = \frac{(1.005\ \text{kg})(0.990\ \text{m/s})}{5.00 \times 10^{-3}\ \text{kg}} = \boxed{199\ \text{m/s}}$$

# PRIMJER: DVIJE KOCKE I OPRUGA

Kocka mase $m_1 = 1.6$ kg, koja se kreće prema desno brzinom od 4 m/s na podlozi bez trenja, sudara se s oprugom (bez mase) koja je pričvršćena za drugu kocku mase $m_2 = 2.1$ kg koja se giba prema lijevo brzinom od -2.5 m/s. Konstanta opruge ja $6 \times 10^2$ N/m.

a) Izračunajte brzinu druge kocke u trenutku kada se kocka 1 giba prema desno brzinom od 3 m/s (kao na slici b).

b) Izračunajte sabijanje opruge.

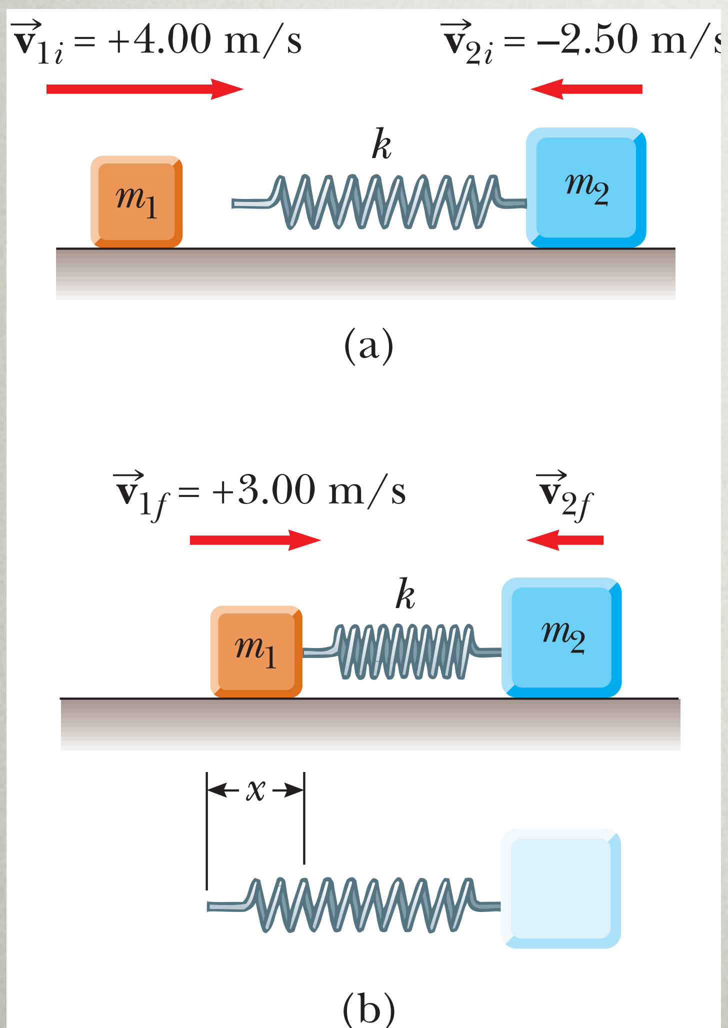



**Figure 6.14** (Example 6.7)

a)

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$v_{2f} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} - m_1 v_{1f}}{m_2}$$

$$= \frac{(1.60\ \text{kg})(4.00\ \text{m/s}) + (2.10\ \text{kg})(-2.50\ \text{m/s}) - (1.60\ \text{kg})(3.00\ \text{m/s})}{2.10\ \text{kg}}$$

$$v_{2f} = \boxed{-1.74\ \text{m/s}}$$

b)

$$E_i = E_f$$

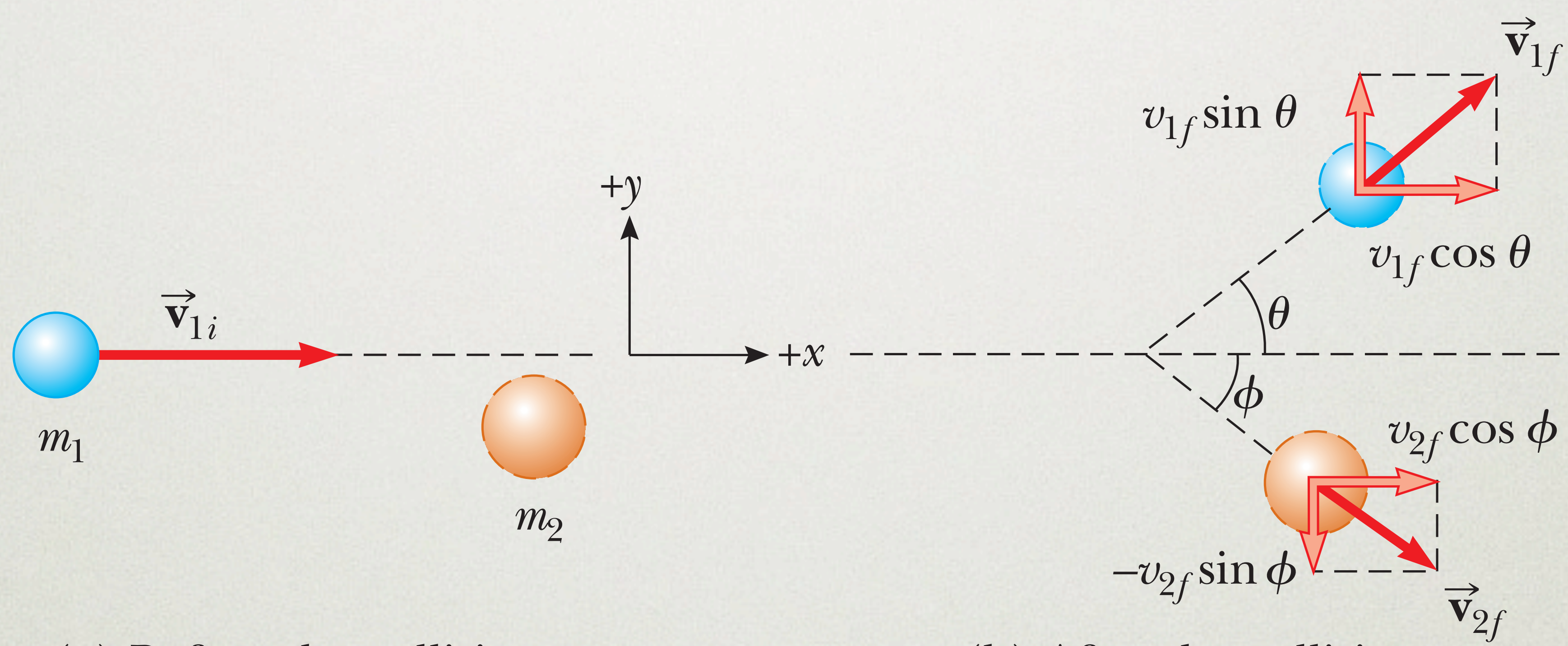
$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 + 0 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 + \tfrac{1}{2} k x^2$$

$$x = \boxed{0.173\ \text{m}}$$

# PRIMJER: 2D SUDARI

x-component: $m_1v_{1i} + 0 = m_1v_{1f}\cos\theta + m_2v_{2f}\cos\phi$ **[6.15]**

y-component: $0 + 0 = m_1v_{1f}\sin\theta - m_2v_{2f}\sin\phi$ **[6.16]**



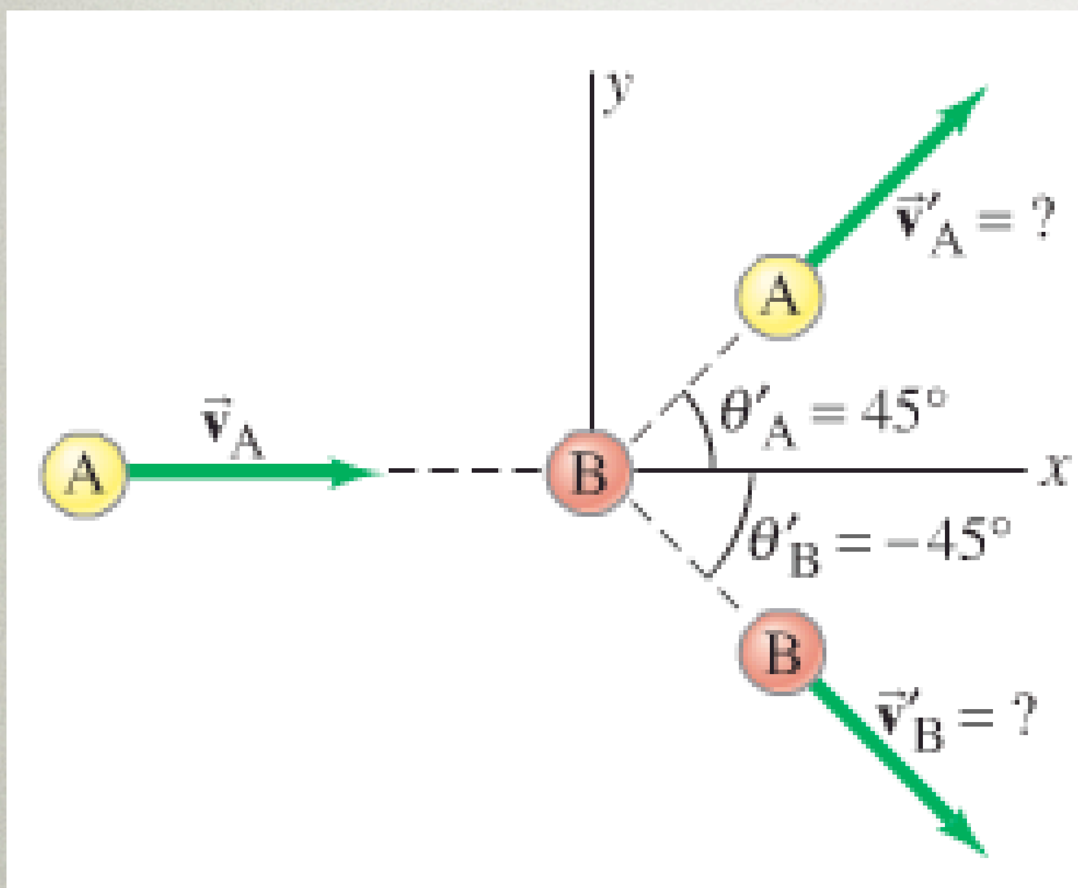
(a) Before the collision (b) After the collision

Ukoliko je sudar elastičan, vrijedi još i:

$$\frac{1}{2}m_1{v_{1i}}^2 = \frac{1}{2}m_1{v_{1f}}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_{2f}}^2$$

# PRIMJER: BILIJARSKE KUGLE U 2D

Bilijarska kugla A kreće se brzinom $v_A = 3$ m/s u smeru osi $+x$ i sudara se s kuglom B, iste mase, koja se nalazi u stanju mirovanja. Nakon sudara, kugle se gibaju pod kutom od 45° u odnosu na os $x$ (slika). Kolike su brzine kugli nakon sudara?




$$\text{(for } x\text{)} \qquad mv_A = mv'_A \cos(45°) + mv'_B \cos(-45°)$$

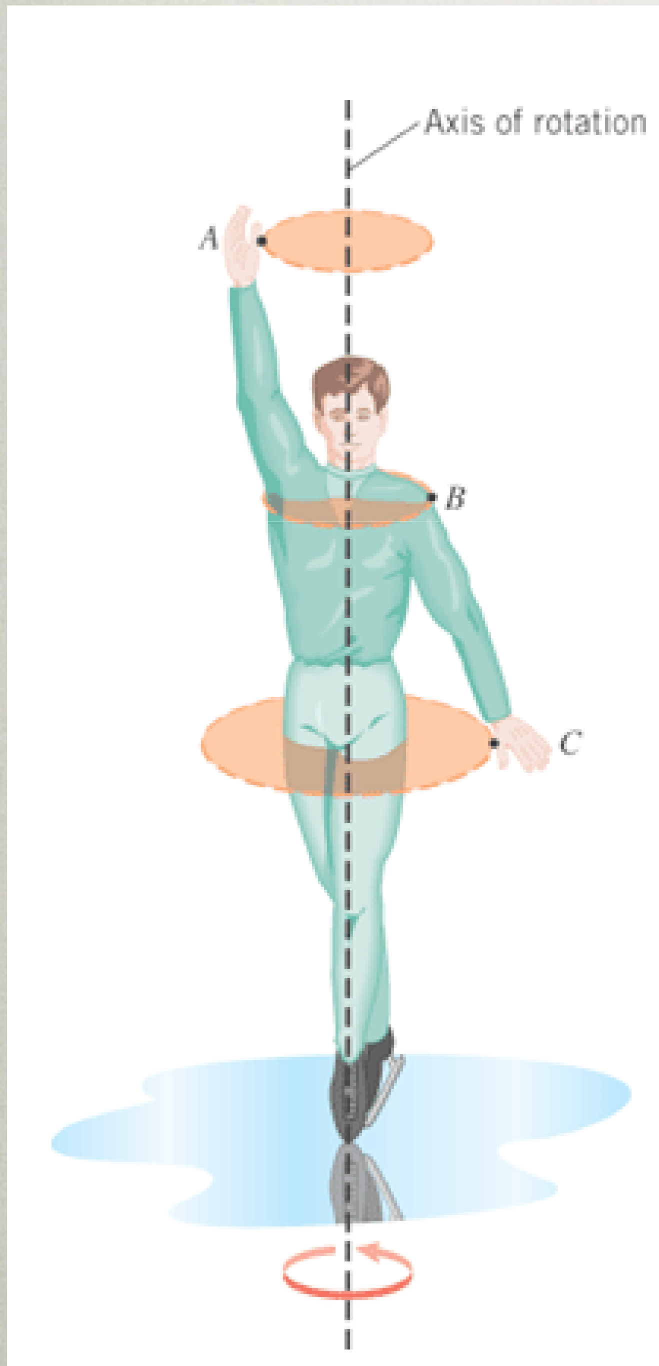
$$\text{(for } y\text{)} \qquad 0 = mv'_A \sin(45°) + mv'_B \sin(-45°).$$

$$v'_B = -v'_A \frac{\sin(45°)}{\sin(-45°)} = -v'_A \left( \frac{\sin 45°}{-\sin 45°} \right) = v'_A .$$

$$v_A = v'_A \cos(45°) + v'_B \cos(45°) = 2v'_A \cos(45°),$$

$$v'_A = v'_B = \frac{v_A}{2\cos(45°)} = \frac{3.0 \text{ m/s}}{2(0.707)} = 2.1 \text{ m/s}.$$

# ROTACIJA KRUTOG TIJELA



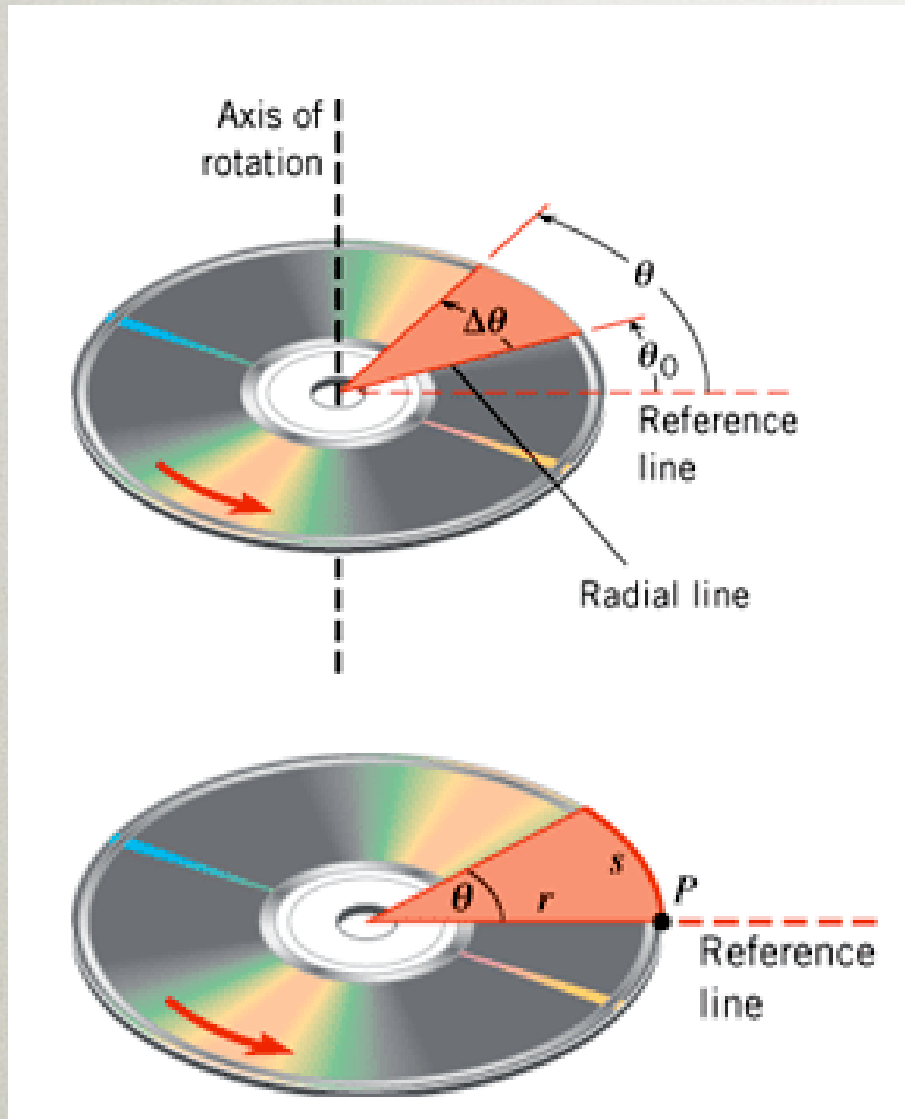

Rotacija krutog tijela: točke tijela gibaju se po kružnim putanjama. Centar tih kružnih putanja naziva se os rotacije. Kut za koji se kruto tijelo zarotira oko osi rotacije naziva se kutni pomak.

Kut definira položaj (pomak) točke krutog tijela u nekom trenutku. Kada tijelo rotira oko fiksne osi, definiramo kut koji je prešla spojnica osi rotacije i točke tijela.

Kut je pozitivan ako se giba u smjeru SUPROTNOM od kazaljke na satu.

SI jedinica je: radijan (rad)

# ROTACIJA KRUTOG TIJELA




$$\Theta(\text{rad}) = \frac{\text{duljina luka}}{\text{radijus}} = \frac{s}{r}$$

Puni krug (360°): $\Theta = \dfrac{2r\pi}{r} = 2\pi$

Primjer: rotacija DVD-a

# JEDNADŽBE ROTACIONE KINEMATIKE

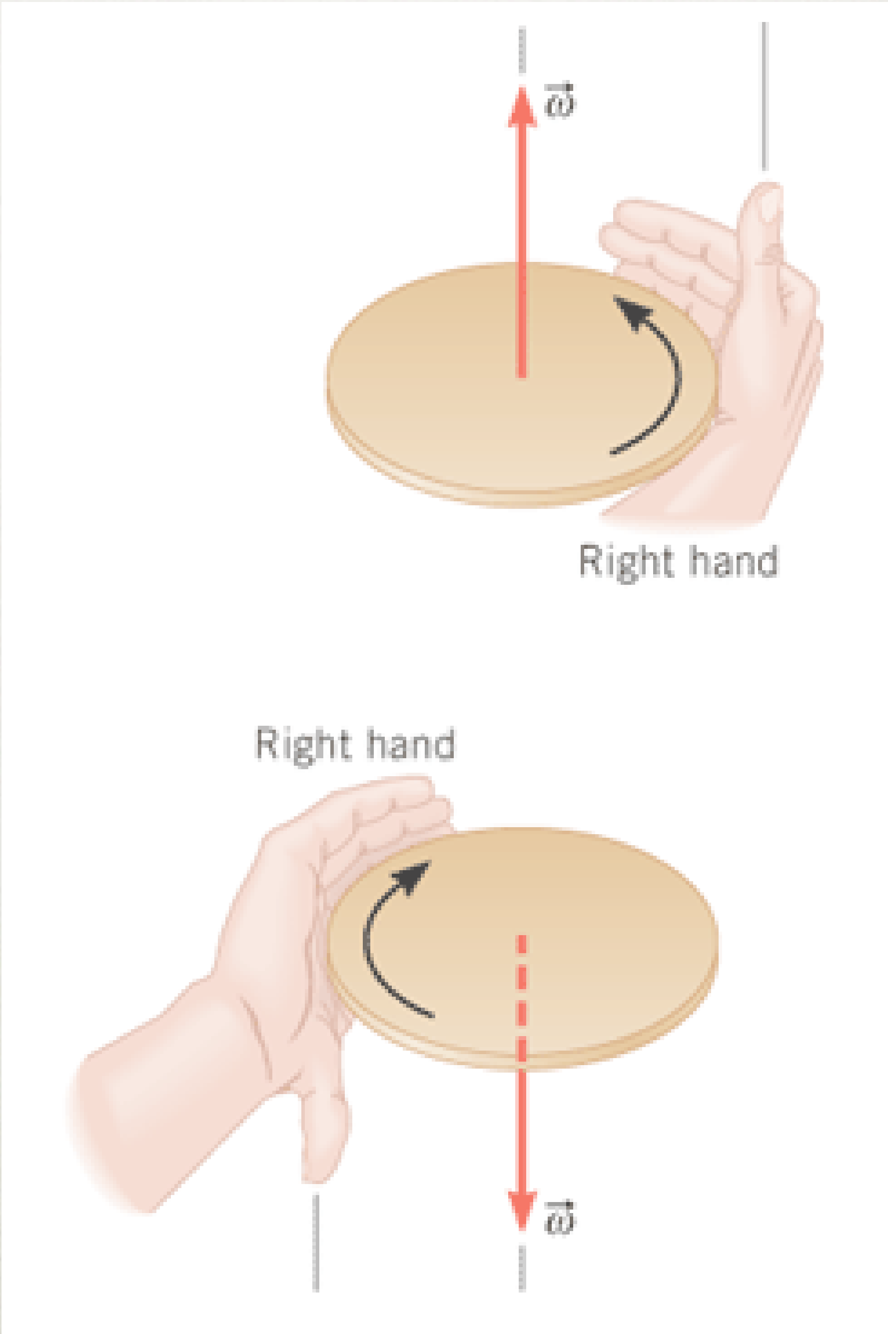
$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$\alpha = \frac{a_t}{r}$$

| Rotational Motion ($\alpha$ = constant) | Linear Motion ($a$ = constant) |
|---|---|
| $\omega = \omega_0 + \alpha t$ | $v = v_0 + at$ |
| $\theta = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$ | $x = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$ |
| $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ | $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ |
| $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$ | $v^2 = v_0^2 + 2ax$ |

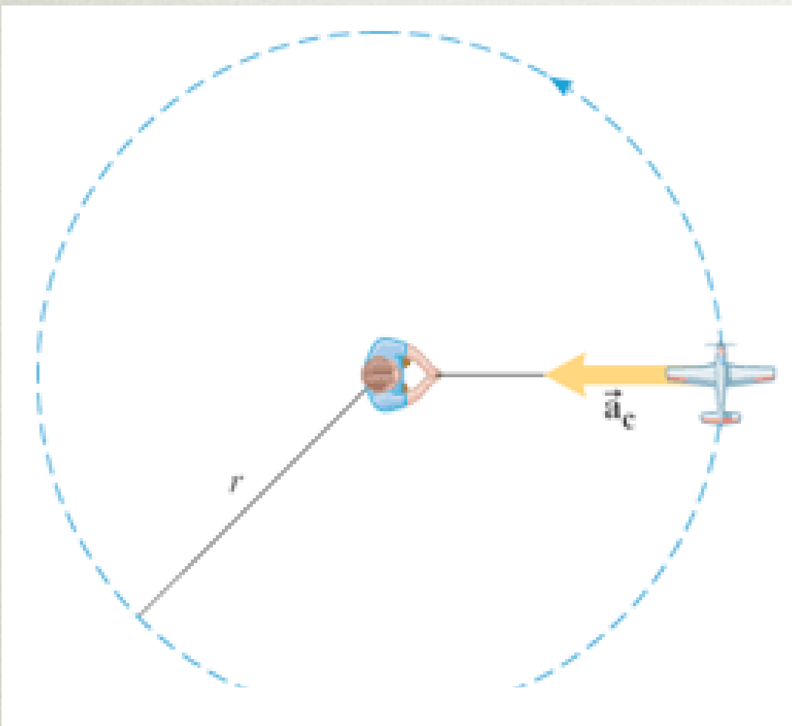
| rotaciono gibanje | | linearno gibanje |
|---|---|---|
| $\theta$ | pomak | $x$ |
| $\omega_0$ | početna brzina | $v_0$ |
| $\omega$ | konačna brzina | $v_0$ |
| $\alpha$ | ubrzanje | $a$ |
| $t$ | vrijeme | $t$ |

# VEKTORSKO PORIJEKLO KUTNIH VARIJABLI



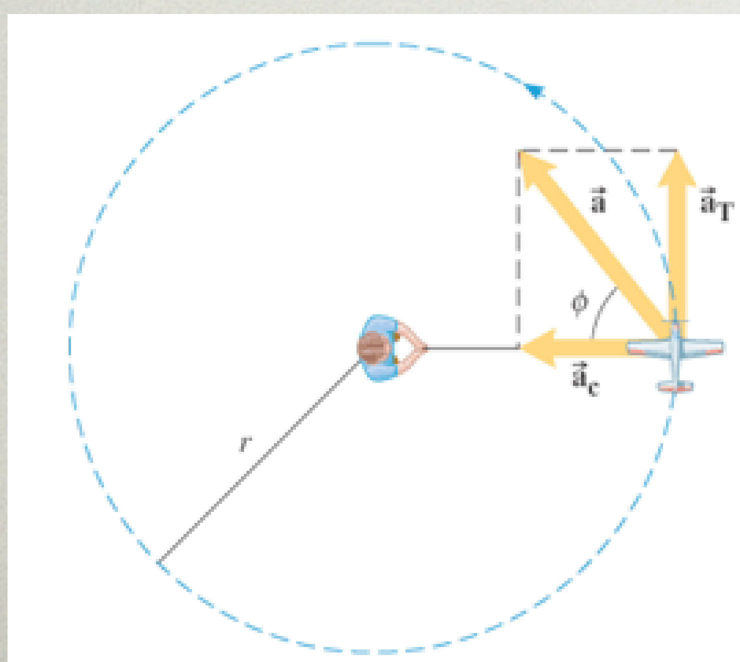

Smjer kutne brzine određujemo pravilom desne ruke

# CENTRIPETALNO I TANGENCIJALNO UBRZANJE



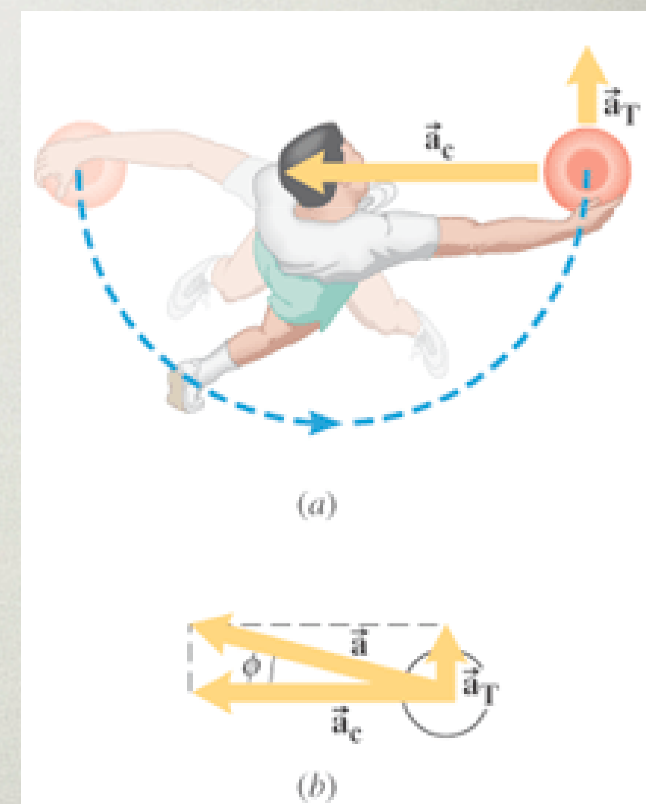

Jednoliko kružno gibanje

$$a_c = \frac{v_T^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2$$



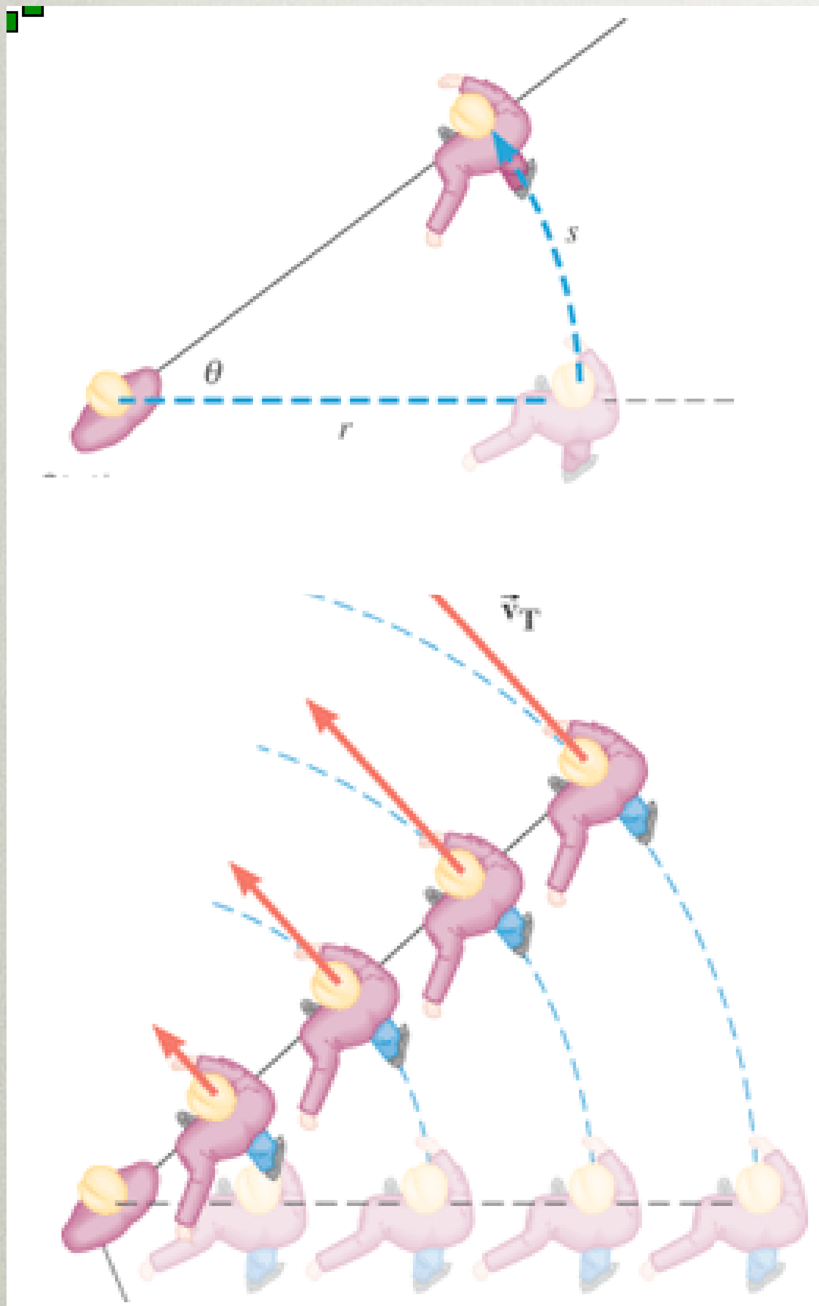

Nejednoliko kružno gibanje

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$$




Bacač diska izbacuje disk ukupnim ubrzanjem *a*

# CENTRIPETALNO I TANGENCIJALNO UBRZANJE




$$s = r\theta$$

$$s/t = r(\theta/t)$$

$$v_T = r\omega$$ - tangencijalna brzina

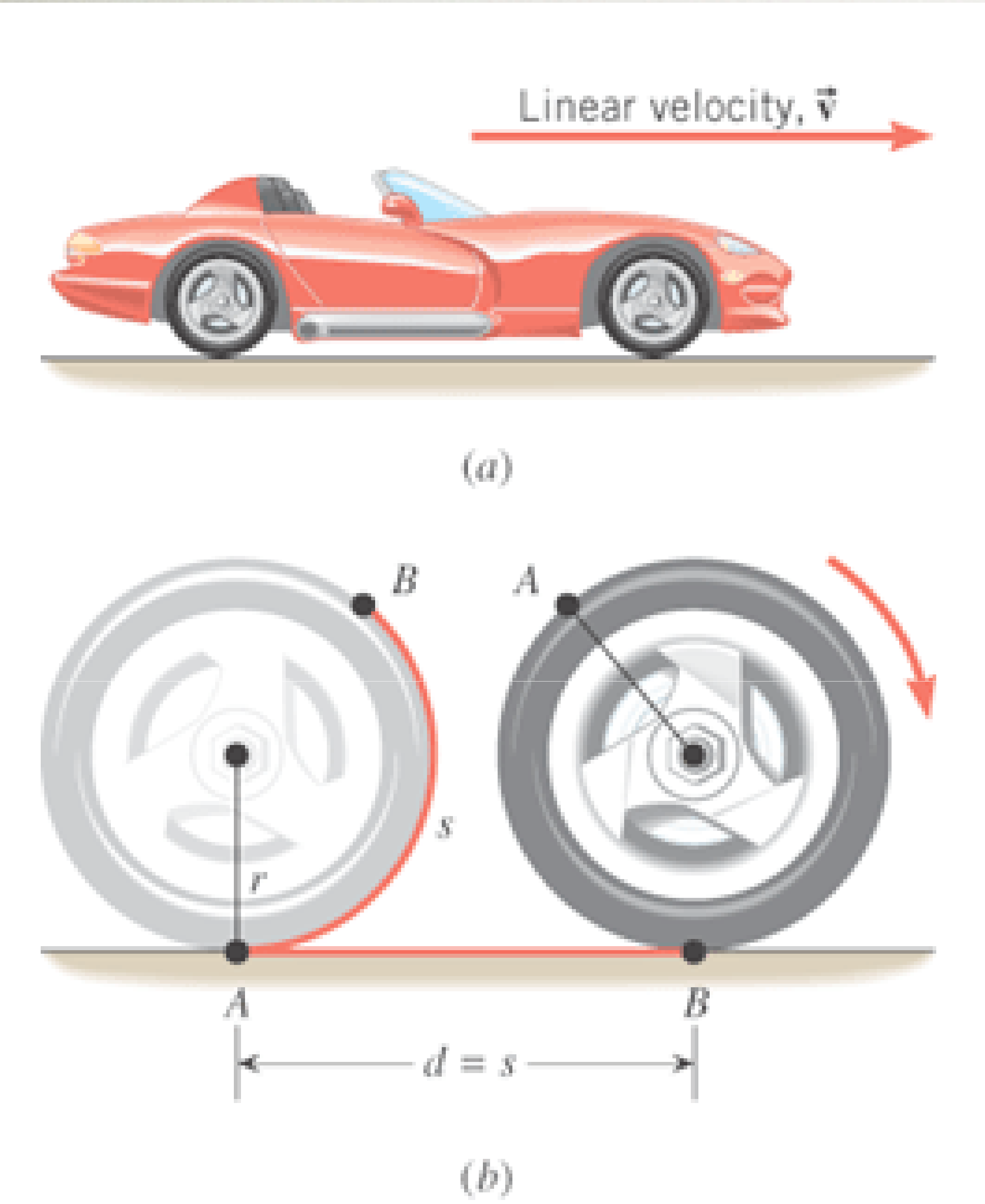
$$a_T = \frac{v_T - v_{T0}}{t} = \frac{(r\omega)-(r\omega_0)}{t} = r\left(\frac{\omega - \omega_0}{t}\right)$$

- tangencijalno ubrzanje

$$a_T = r\alpha$$

Klizači kližu istom kutnom a različitim tangencijalnim brzinama

# KOTRLJANJE



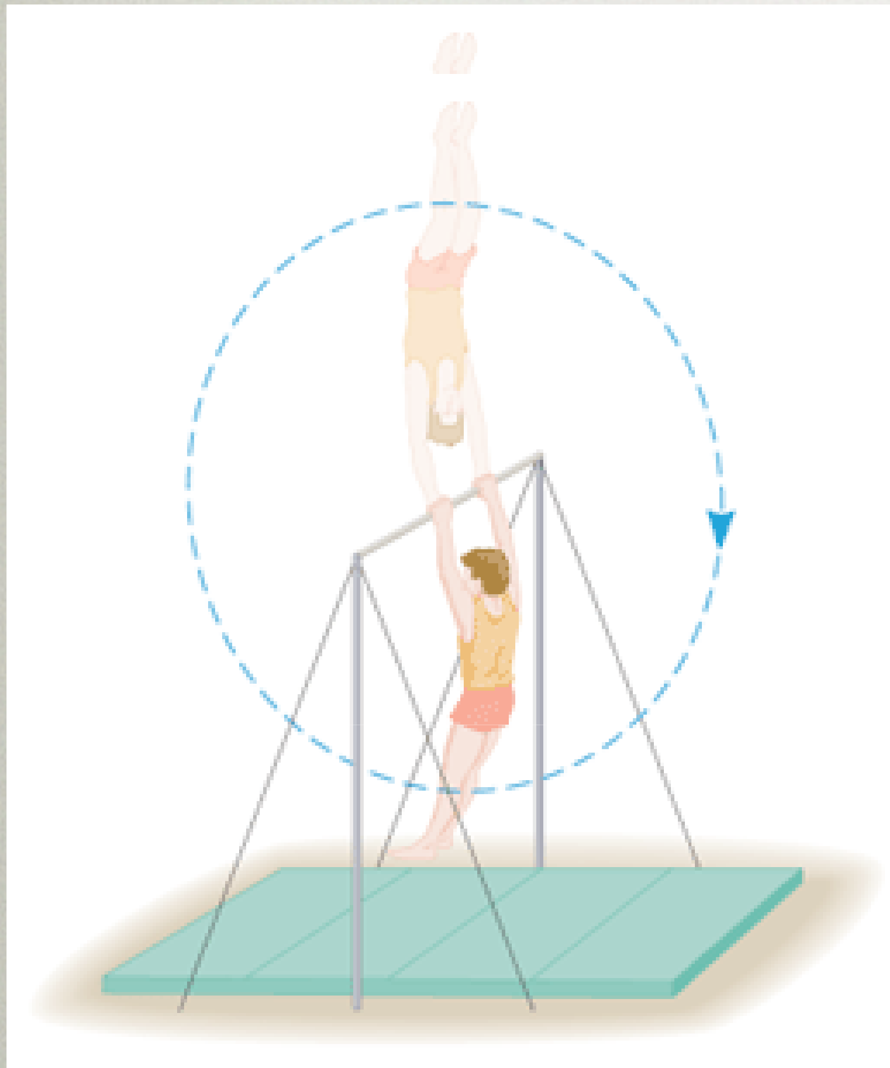

$$v = r\omega$$

linearna brzina — tangencijalna brzina

$$a = r\alpha$$

linearno ubrzanje — tangencijalno ubrzanje

# ROTACIJA KRUTOG TIJELA



Definicija prosječne kutne brzine
- omjer prosječnog kuta i vremena

$$\bar{\omega} = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Definicija prosječnog kutnog ubrzanja
- omjer promjene kutne brzine i vremena

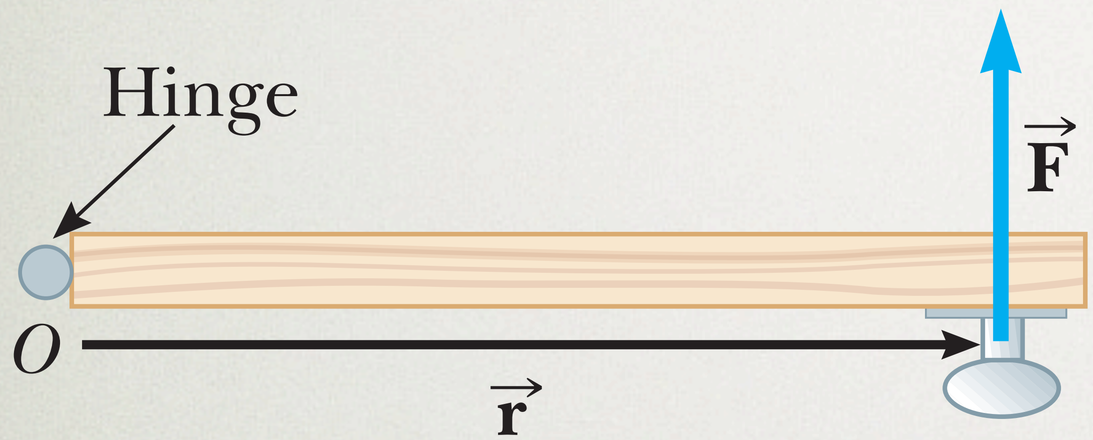
$$\bar{\alpha} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

SI jedinica: $\mathrm{rad/s^2}$

Trenutna kutna brzina i trenutno ubrzanje su veličine koje su dane u određenom vremenskom trenutku

Kada su trenutne vrijednosti kutne brzine ili ubrzanja jednake prosječnim?

# MOMENT SILE

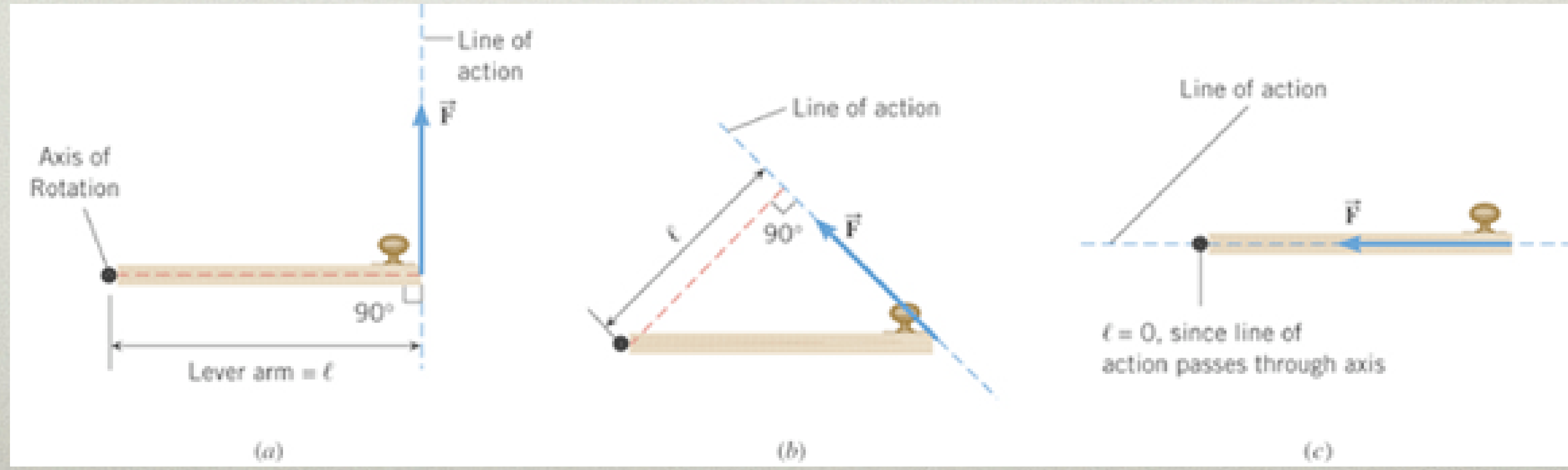



Sila izaziva akceleraciju, moment sile izaziva kutnu akceleraciju!

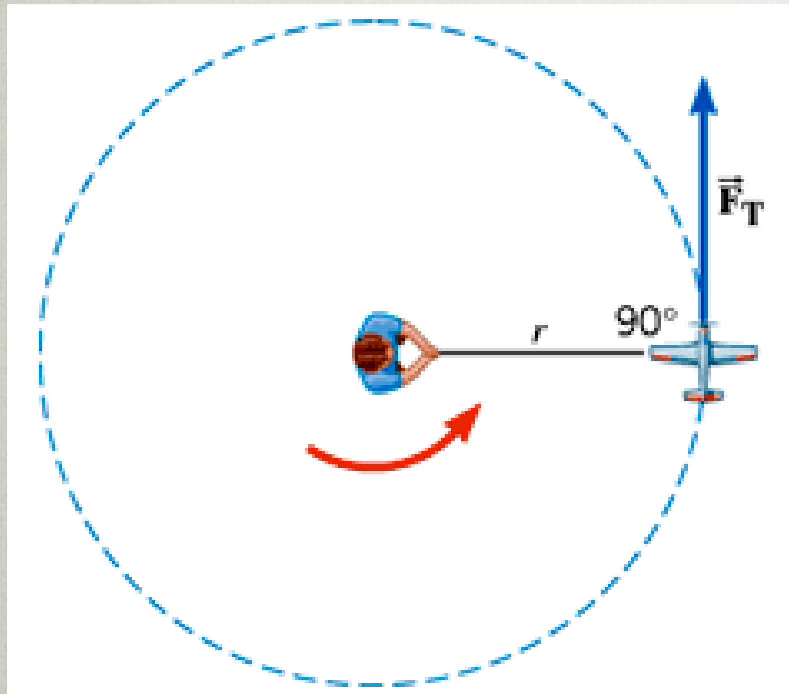
**Moment sile = Iznos sile x krak sile**

$$\tau = F \times l$$

Krak sile je udaljenost od osi rotacije okomito na pravac djelovanja sile.
Moment sile je veličina koja mijenja kutnu brzinu rotacije.



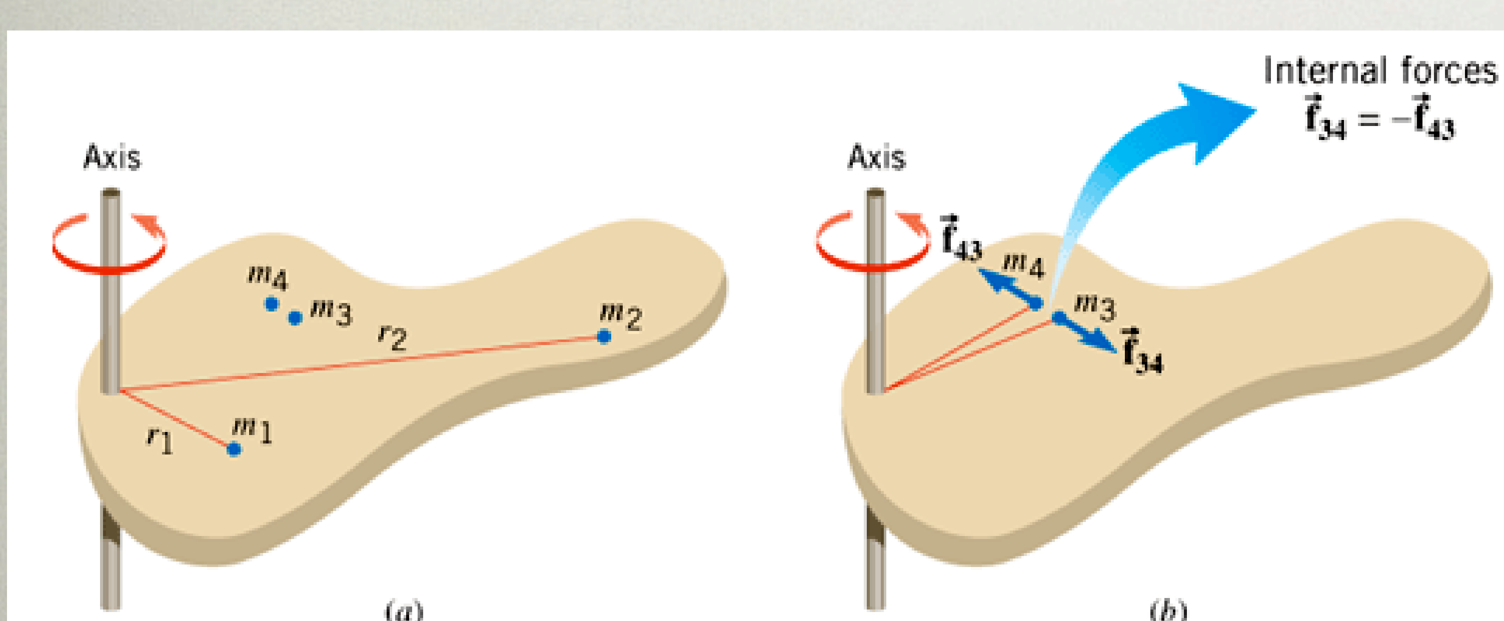
# MOMENT SILE




$$\tau = F_T r = m a_T r = \boxed{\left(mr^2\right)}\alpha$$

$$a_T = r\alpha$$

$I$ = moment tromosti




Zbrojimo momente sila pojedinih čestica krutog tijela

$$\tau_1 = \left(m_1 r_1^2\right)\alpha$$

$$\tau_2 = \left(m_2 r_2^2\right)\alpha$$

...

$$\boxed{\sum \tau = \left(\sum mr^2\right)\alpha = I\alpha}$$

2. Newtonov zakon za rotaciju

# MOMENT SILE

**Drugi Newtonov zakon za rotaciju krutog tijela oko fiksne osi**

$$\sum \tau = \left(\sum mr^2\right)\alpha = I\alpha$$

ukupni vanjski moment sile

moment tromosti

kutno ubrzanje

translacija $\longleftrightarrow$ rotacija

$$\sum F = ma \qquad \sum \tau = I\alpha$$

# RAVNOTEŽA KRUTOG TIJELA

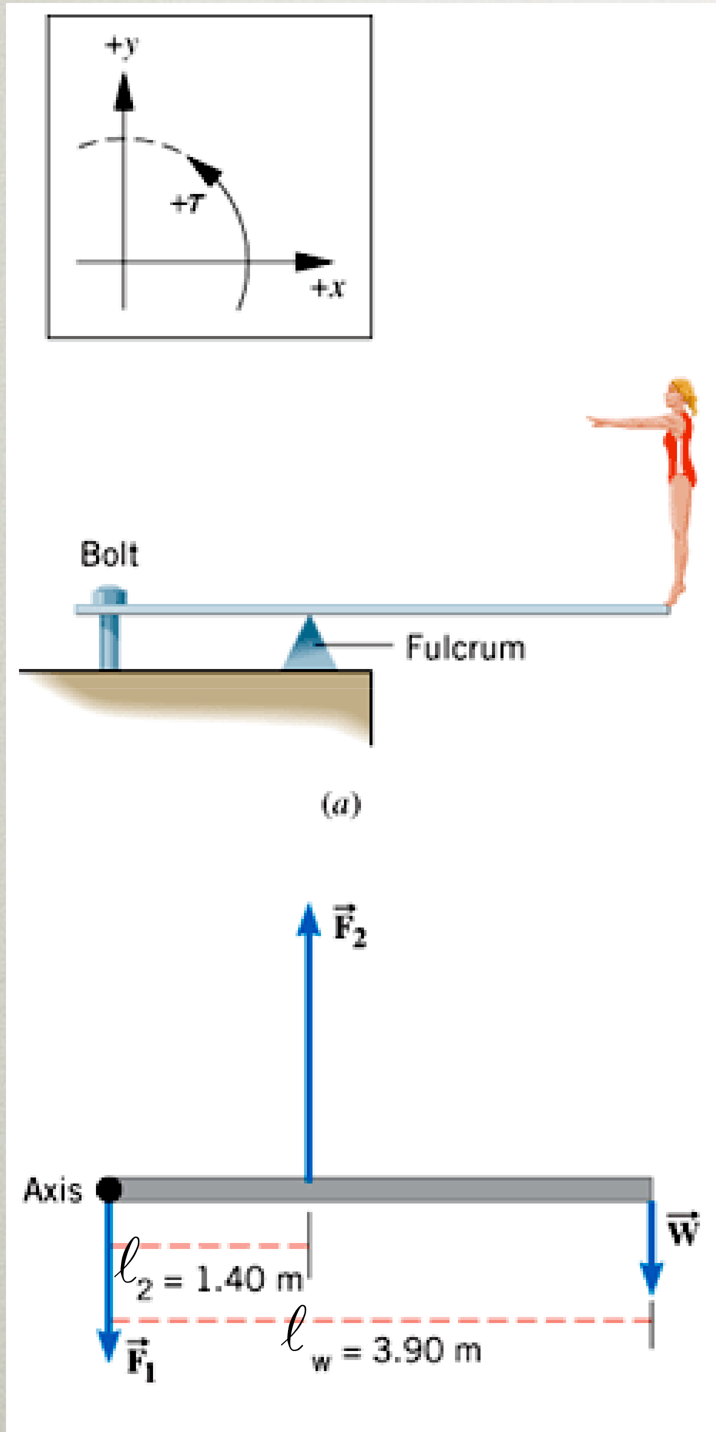
Kruto tijelo je u ravnoteži ako je njegovo linearno ubrzanje i kutno ubrzanje 0.
U ravnoteži je zbroj vanjskih sila i zbroj momenata sile 0.

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum \tau = 0$$

# PRIMJER: SKAKAČICA U VODU



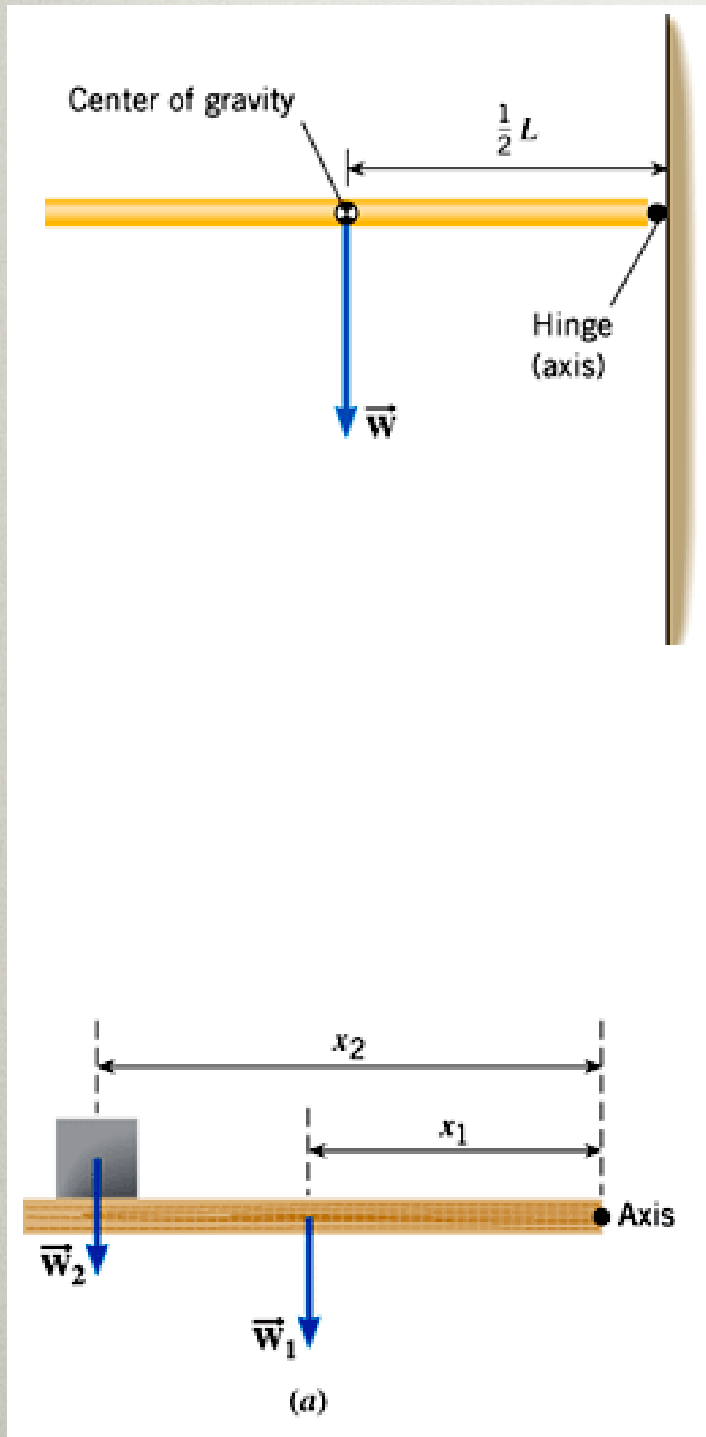
(b) Free-body diagram of the diving board

$$\sum F_y = -F_1 + F_2 - W = 0$$

$$\sum \tau = +F_2 l_2 - W l_W = 0$$

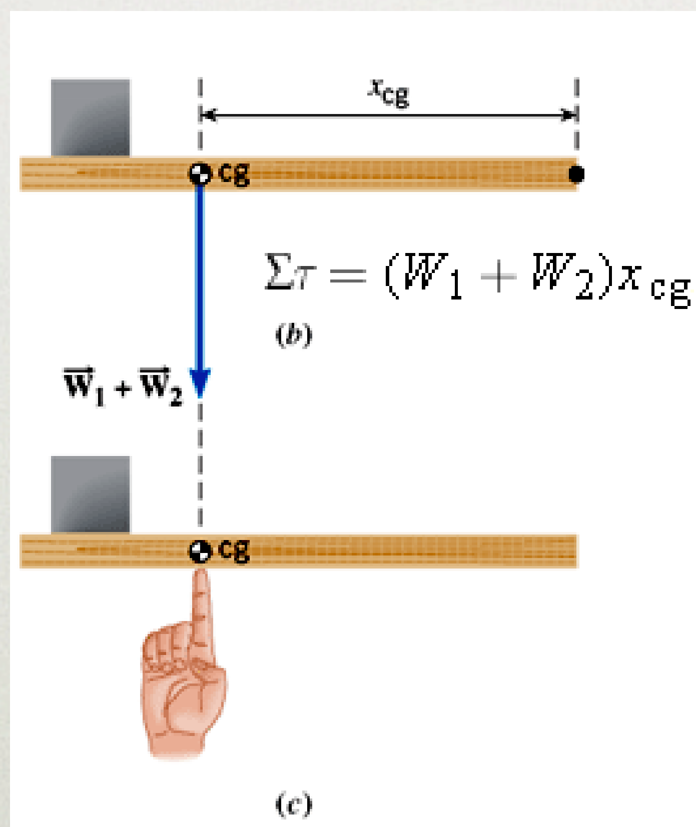
$$F_2 = \frac{W l_W}{l_2}$$

# CENTAR MASE




**Definicija centra mase**

Centar mase krutog tijela je točka u kojoj djeluje njena težina uzrokujući moment sile.




Kutija miruje kraj kraja horizontalne daske.
Ukupna težina $w_1$ i $w_2$ djeluje u centru mase.

$$w_1x_1 + w_2x_2 = (w_1 + w_2)x_{CM}$$

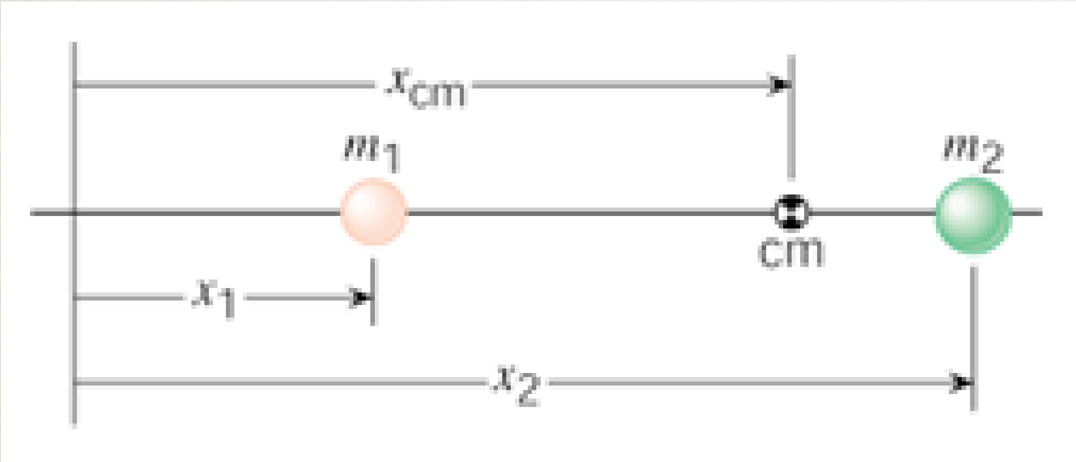
$$x_{CM} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots}{w_1 + w_2 + \ldots}$$

položaj centra mase

$$\sum \tau = w_1x_1 + w_2x_2$$

# CENTAR MASE

Centar mase je točka koja predstavlja prosječnu lokaciju ukupne mase sustava. Ako imamo sustav od dvije mase, centar mase dan je s:




$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

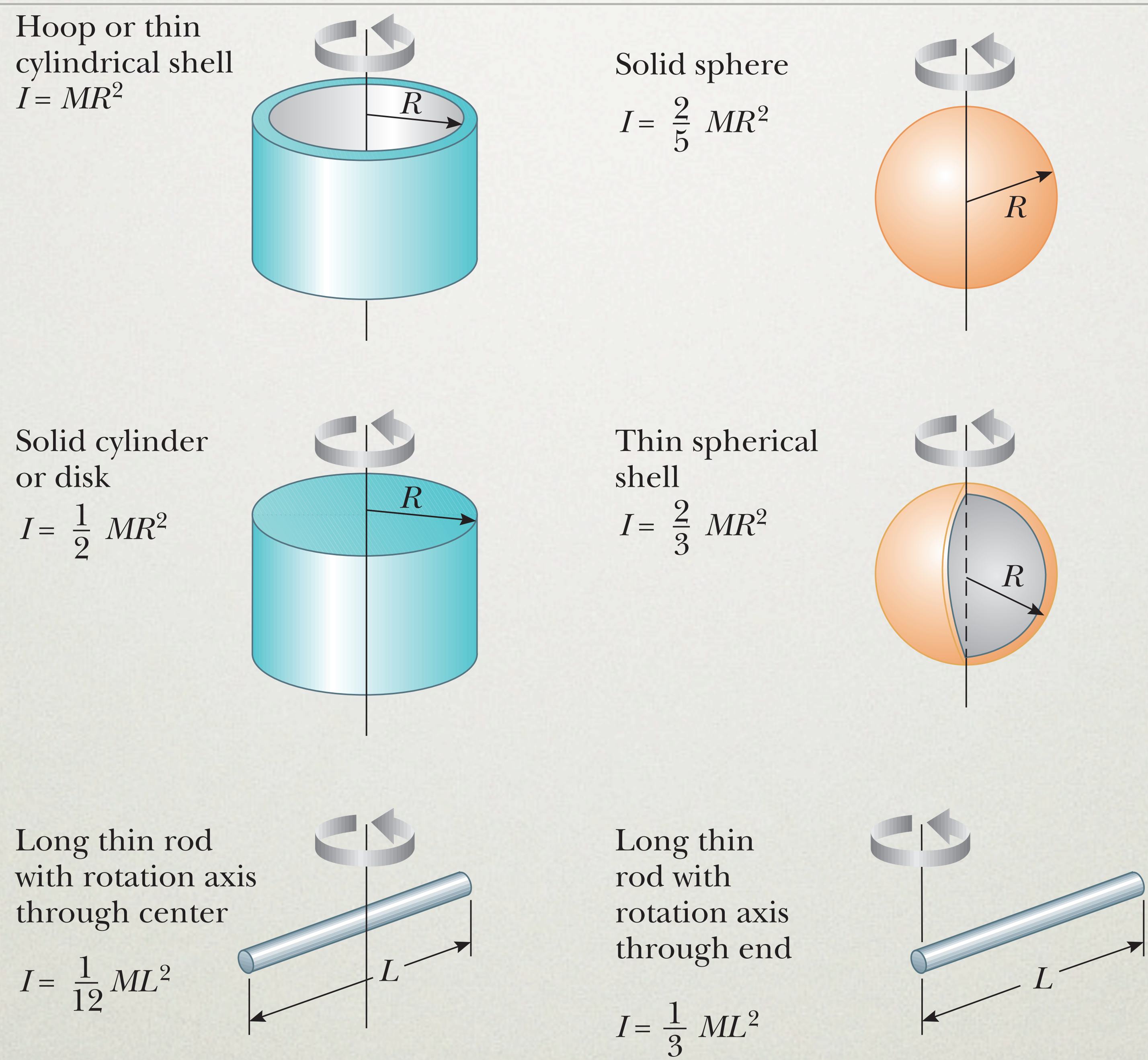
Dođe li do pomaka mase, doći će i do promjene položaja centra mase:

$$\Delta x_{CM} = \frac{m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2}{m_1 + m_2}$$

Podijelimo li relaciju s vremenskim intervalom $\Delta t$, dobivamo brzinu centra mase:

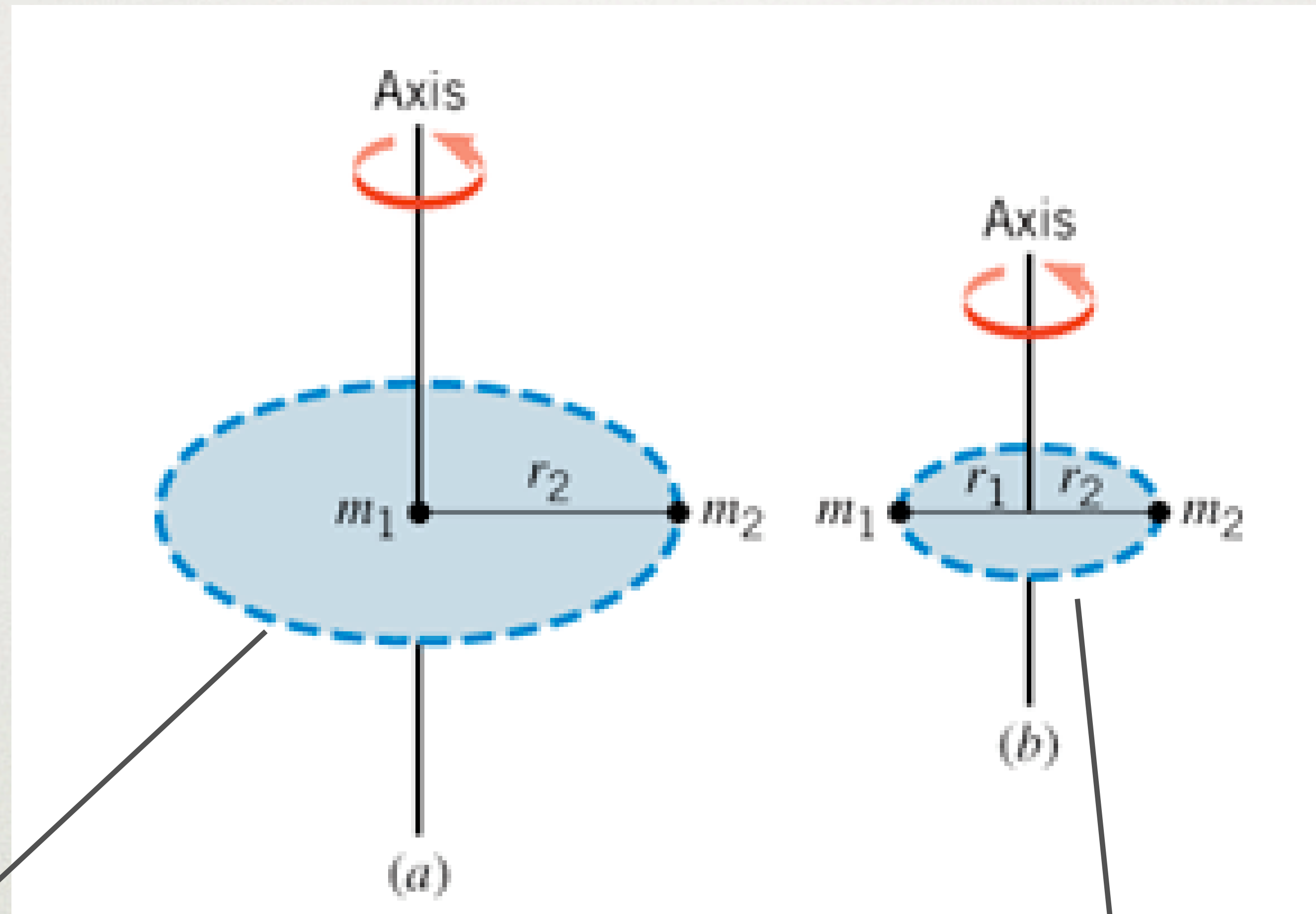
$$v_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

# MOMENT TROMOSTI




Moment tromosti ovisi o obliku tijela, te o izboru osi rotacije.
Teorem o paralelenim osima: $I = I_{CM} + Md^2$

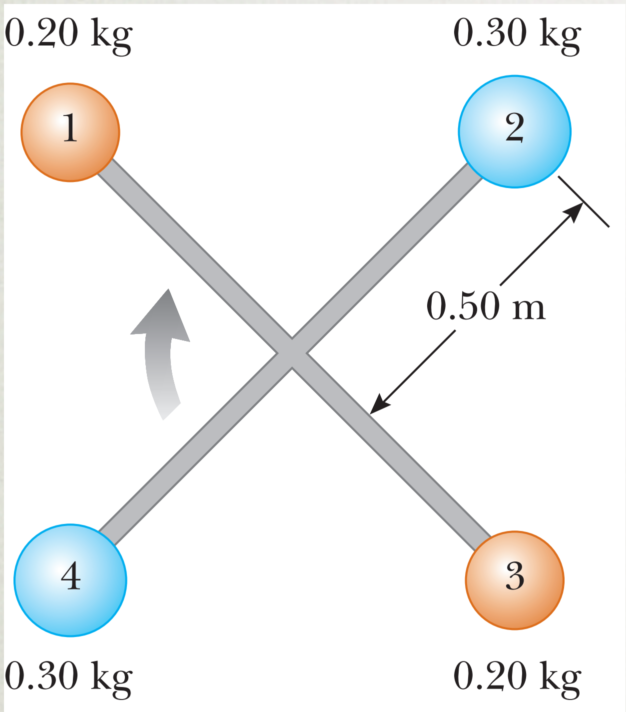
# PRIMJER: OVISNOST MOMENTA TROMOSTI O IZBORU OSI ROTACIJE




$$I = \sum mr^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = m(0)^2 + m(L)^2 = mL^2$$

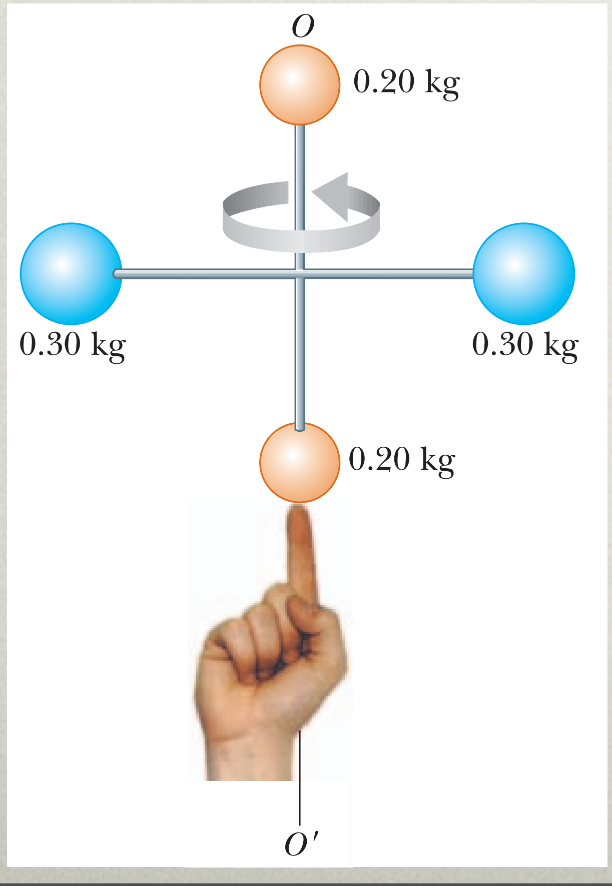
$$I = \sum mr^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = m(L/2)^2 + m(L/2)^2 = \frac{1}{2} mL^2$$

# PRIMJER: MOMENT TROMOSTI




$$I = \sum mr^2 = m_1 r_1{}^2 + m_2 r_2{}^2 + m_3 r_3{}^2 + m_4 r_4{}^2$$
$$= (0.20\ \text{kg})(0.50\ \text{m})^2 + (0.30\ \text{kg})(0.50\ \text{m})^2 + (0.20\ \text{kg})(0.50\ \text{m})^2 + (0.30\ \text{kg})(0.50\ \text{m})^2$$

$$I = \boxed{0.25\ \text{kg} \cdot \text{m}^2}$$




$$I = \sum mr^2 = m_1 r_1{}^2 + m_2 r_2{}^2 + m_3 r_3{}^2 + m_4 r_4{}^2$$
$$= (0.20\ \text{kg})(0)^2 + (0.30\ \text{kg})(0.50\ \text{m})^2 + (0.20\ \text{kg})(0)^2 + (0.30\ \text{kg})(0.50\ \text{m})^2$$

$$I = \boxed{0.15\ \text{kg} \cdot \text{m}^2}$$

# ROTACIJA - TRANSLACIJA

| Fizikalni koncept | ROTACIJA | TRANSLACIJA |
|---|---|---|
| pomak | $\theta$ | $s$ |
| brzina | $\omega$ | $v$ |
| ubrzanje | $\alpha$ | $a$ |
| uzrok ubrzanja | $\tau$ | $F$ |
| inercija | $I$ | $m$ |
| 2. Newtonov zakon | $\sum \tau = I\alpha$ | $\sum F = ma$ |
| rad | $\theta\tau$ | $Fs$ |
| kinetička energija | $(1/2)I\omega^2$ | $(1/2)mv^2$ |
| količina gibanja | $L = I\omega$ | $p = mv$ |

# KUTNA KOLIČINA GIBANJA

Definiramo kutnu količinu gibanja:

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

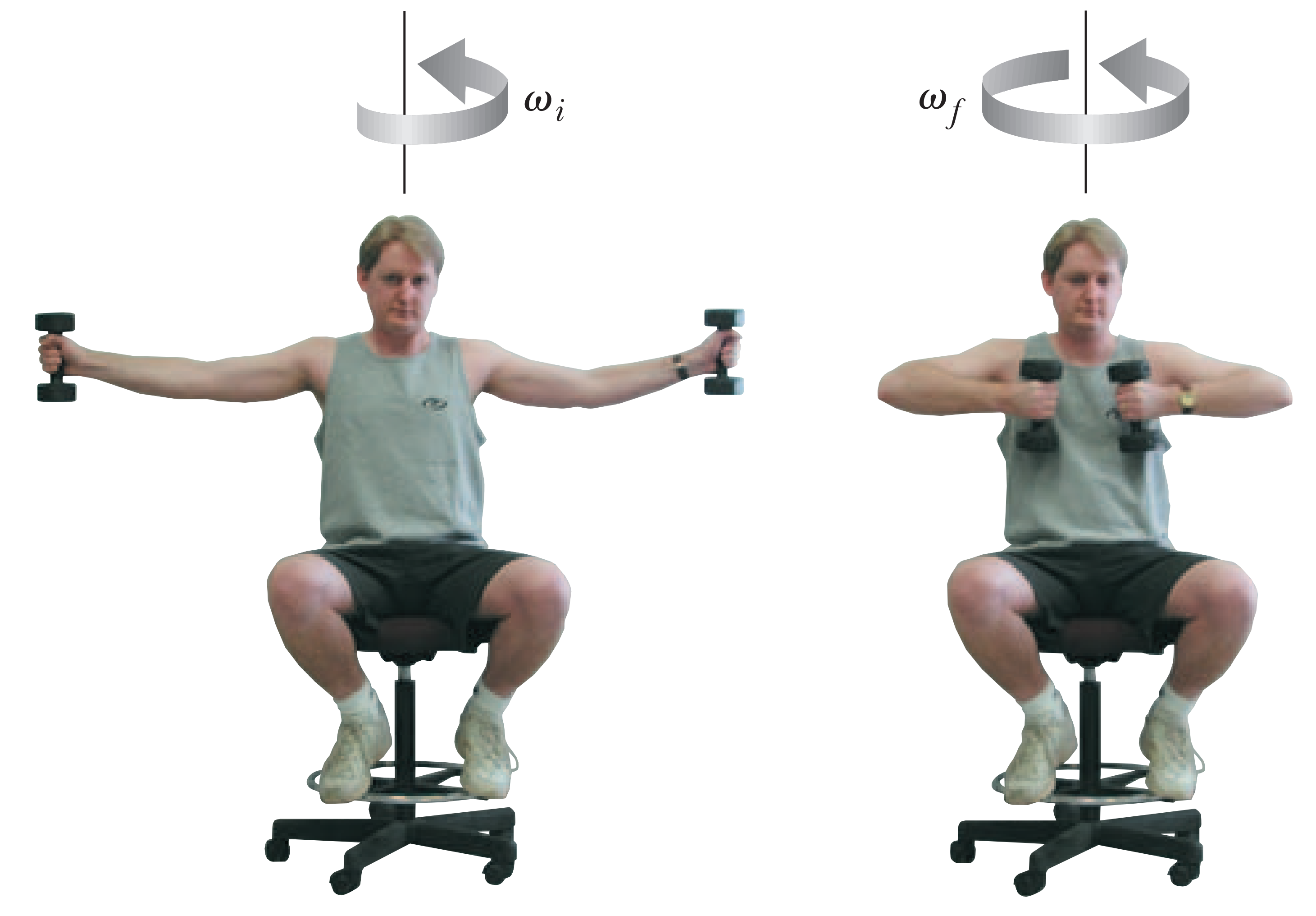
SI jedinica $[\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \ / \ \mathrm{s}]$

Zakon očuvanja kutne količine gibanja:
Ukupna kutna količina gibanja sustava ostaje konstantna (očuvana) ako je ukupni moment sile koji djeluje na sustav 0!

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = I \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = I\alpha = \tau$$

Moment sile dan je promjenom kutne količine gibanja u vremenu.

# PRIMJER: OČUVANJE KUTNE KOLIČINE GIBANJA

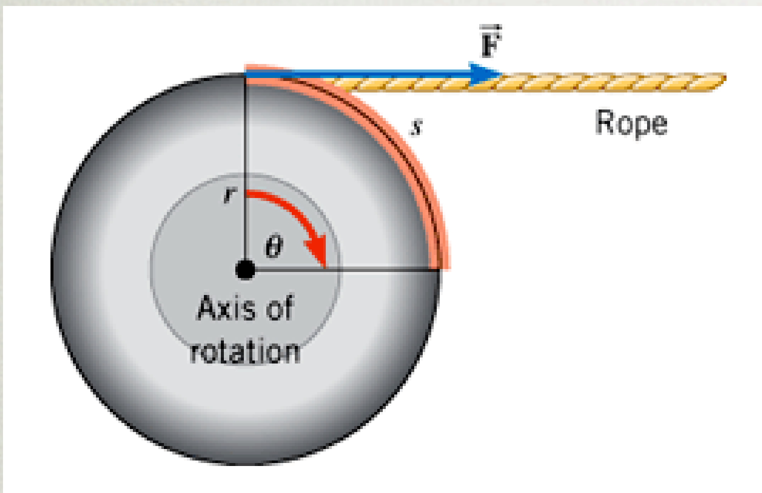


(a) (b)

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

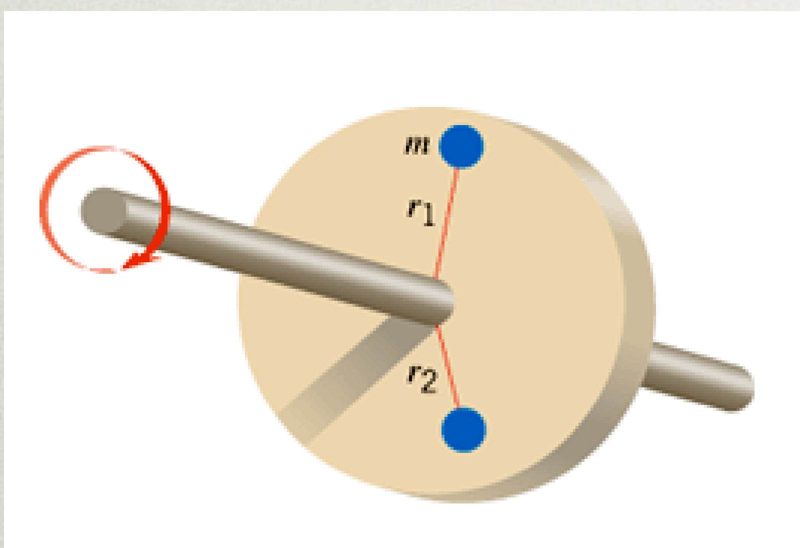
$$I_2 < I_1 \rightarrow \omega_2 > \omega_1$$

# RAD I ENERGIJA ROTACIJE



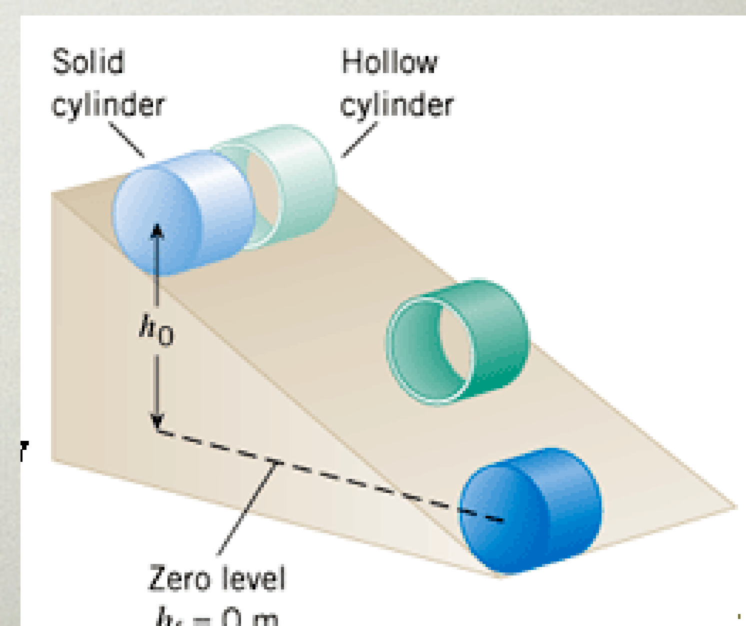

rad

$$W_R = \tau\alpha$$




kinetička energija

$$E = \sum\left(\tfrac{1}{2}mr^2\omega^2\right) = \tfrac{1}{2}\left(\sum mr^2\right)\omega^2 = \tfrac{1}{2}I\omega^2$$




ukupna energija:

$$\boxed{E_{uk} = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2 + mgh}$$

zakon očuvanja energije