6. zadaća iz kvantne fizike

19. travnja 2010.

Zadatak 1

Čestica se raspršuje na potencijalu : $V(r) = \frac{g}{r^2}$, $g > 0$.

(a) Zapišite radijalnu jednadžbu i njena rješenja

(b) Pokažite da su parcijalni valovi dani sa :

$$\delta_\ell = \frac{\pi}{2}\left[\ell + \frac{1}{2} - \sqrt{\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2mg}{\hbar^2}}\,\right]$$

(c) Nađite ovisnost udarnog presjeka o energiji za konstantan kut raspršenja.

(d) Nađite fazne pomake za $\frac{2mg}{\hbar^2} << 1$ te pokažite da je diferencijalni udarni presjek jednak :

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{g^2 m \pi^3}{2\hbar^2 E}\cot\frac{\theta}{2}$$

(e) Za isti potencijal izračunajte udarni presjek u Bornovoj aproksimaciji i usporedite sa gornjim rezultatom.

(a) Radijalna Schrödingerova jednadžba je :

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[V(r) - E\right]R(r) = \ell(\ell+1)R(r)$$

Potencijal je $V(r) = \frac{g}{r^2}$. Ako uvedemo pokrate $G = \frac{2mg}{\hbar^2}$ i $k^2 = \frac{2mE}{\hbar}$ radijalna jednadžba je:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{G + l(l+1)}{r^2}R(r) + k^2 R(r) = 0$$

Uvedimo bezdimenzionalnu varijablu: $\rho = kr$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{G + l(l+1)}{\rho^2}\right)R(\rho) = 0$$

Ako uvedemo $n(n+1) = G + l(l+1)$ imamo radijalnu jednadžbu:

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{n(n+1)}{\rho^2}\right)R(\rho) = 0$$

čija su rješenja sferne Besselove $j_n(\rho)$ i sferne Neumannove $n_n(\rho)$ funkcije. Za za $\rho \to 0$ funkcije $n_n(\rho)$ divergiraju pa nisu fizikalno prihvatljive.

$$\Rightarrow \quad \underline{R_n(r) = N_n\, j_n(kr)} \qquad (1)$$

Za indeks ovisan o angularnom momentu imamo da je:

$$n(n+1) = n^2 + n = G + l(l+1)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{n = -\frac{1}{2} + \sqrt{G + l(l+1) + \frac{1}{4}}} \qquad (2)$$

(b) Zamislimo na trenutak da potencijal ima jako veliki, ali konačan doseg r_0. Tada opće rješenje radijalne jednadžbe na području $r > r_0$ ima oblik:

$$R_\ell(r) = A_\ell j_\ell(kr) + B_\ell n_\ell(kr)$$

Asimptotski oblik tog rješenja za $kr \gg 1$ je:

$$R_\ell(r) \sim A_\ell \frac{\sin(kr - \frac{\ell\pi}{2})}{kr} - B_\ell \frac{\cos(kr - \frac{\ell\pi}{2})}{kr}$$

U odsustvu potencijala imali bismo za rješenje samo sfernu Besselovu funkciju (zbog regularnosti u $r=0$), tako da je A_ℓ / B_ℓ neka mjera raspršenja. Fazni pomak je definiran kao $\tan\delta_\ell = B_\ell / A_\ell$ i uz to asimptotski oblik rješenja je:

$$R_\ell(r) \sim W_\ell \frac{\sin(kr + \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell)}{kr} \qquad (3)$$

Pošto u ovom slučaju $r_0 \to \infty$ ono što moramo napraviti jest slaganje gornjeg asimptotskog rješenja (3) na "području izvan dosega potencijala" i asimptotskog oblika rješenja (1). Na području $kr \gg 1$ imamo za rješenje (1):

$$R_n(r) \sim N_n \frac{\sin(kr + \frac{n\pi}{2})}{kr} \qquad (4)$$

Moramo izjednačiti logaritamske derivacije (3) i (4) što se svodi na:

$$\Longrightarrow \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell\right) = \sin\left(kr - \frac{n\pi}{2}\right)$$

(n je funkcija od ℓ).

$$\Longrightarrow \quad \underline{\frac{\ell\pi}{2} - \delta_\ell = \frac{n\pi}{2}} \qquad (5)$$

U (5) uvrstimo (2) za n i imamo traženi izraz:

$$\delta_\ell = \frac{\pi}{2}\left[\ell + \frac{1}{2} - \sqrt{G + \ell(\ell+1) + \frac{1}{4}}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\ell + \frac{1}{2} - \sqrt{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2mg}{\hbar^2}}\right] \qquad (6)$$

(c) Izraz za diferencijalni udarni presjek raspisan preko faznih pomaka je:

$$D(\theta) = |f_k(\theta)|^2 = \frac{1}{k^2}\left|\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)e^{i\delta_\ell}\sin\delta_\ell P_\ell(\cos\theta)\right|^2 \qquad (7)$$

Fazni pomaci općenito ovise o k, tj. o energiji, međutim to nije slučaj ovdje: $\delta_\ell(k) = \delta_\ell$.

Stoga je ovisnost diferencijalnog udarnog presjeka o energiji : $\underline{\underline{D(\theta,k) \sim \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{E}}}$

(d) Za $\left(\frac{2mg}{\hbar^2}\right) \ll 1$ možemo razviti korijen u izrazu za fazni pomak (7) :

$$\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2mg}{\hbar^2}} = \left(l+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+\frac{2mg}{\hbar^2 (l+1/2)^2}} \approx$$

$$\approx \left(l+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{mg}{\hbar^2 \left(l+\frac{1}{2}\right)^2}\right) = l+\frac{1}{2}+\frac{mg}{\hbar^2\left(l+\frac{1}{2}\right)}$$

Ako to uvrstimo u izraz za δ_l dobijemo :

$$\delta_l \approx -\frac{\pi mg}{2\hbar^2\left(l+\frac{1}{2}\right)} = \underline{\underline{-\frac{\pi}{2}\frac{2mg}{\hbar^2}\frac{1}{2l+1}}} \qquad (8)$$

Vidimo da je i $\delta_l \ll 1$. Ako uzmemo to u obzir možemo razviti :

$$\sin\delta_l \approx \delta_l \quad , \quad \cos\delta_l \approx 1 \quad , \quad e^{i\delta_l} \approx 1$$

Uvrstimo to u izraz (7) za diferencijalni udarni presjek :

$$D(\theta) \approx \frac{1}{k^2}\left|\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\, i\, \delta_\ell P_\ell(\cos\theta)\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{k^2}\left|\sum_{\ell=0}^{\infty}\cancel{(2\ell+1)}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\frac{2mg}{\hbar^2}\frac{1}{\cancel{2\ell+1}}P_\ell(\cos\theta)\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{k^2}\,\frac{\pi^2 m^2 g^2}{\hbar^4}\left|\sum_{\ell=0}^{\infty}P_\ell(\cos\theta)\right|^2$$

Vrijedi da je: $\sum_{\ell=0}^{\infty}P_\ell(\cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{2-2\cos\theta}} = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$

$$\Rightarrow \quad D(\theta) = \frac{1}{k^2}\,\frac{\pi^2 m^2 g^2}{4\hbar^4 \sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\pi^2 m g^2}{8\hbar^2 E \sin^2\frac{\theta}{2}} \qquad (9)$$

Pošto je $D(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}$ je:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\theta\, D(\theta) = 2\pi \sin\theta\, D(\theta) =$$

$$= \frac{\pi^3 m g^2}{4\hbar^2 E}\,\frac{\sin\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\pi^3 m g^2}{4\hbar^2 E}\,\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi^3 m g}{2\hbar^2 E}\cot\frac{\theta}{2}}}$$

(e)

Za amplitudu raspršenja u Bornovoj aproksimaciji imamo (za sferno-simetrične potencijale):

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 q}\int_0^\infty dr\, r \sin(qr) V(r) = \qquad \left\{ q = 2k\sin\frac{\theta}{2}\right.$$

$$= -\frac{2mg}{\hbar^2 q}\int_0^\infty dr\, \frac{\sin(qr)}{r} = -\frac{2mg}{\hbar^2 q}\frac{\pi}{2}$$

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 = \frac{\pi^2 m^2 g^2}{\hbar^4 q^2} = \frac{\pi^2 m^2 g^2}{4\hbar^4 k^2 \sin^2\frac{\theta}{2}} =$$

$$= \frac{\pi^2 m g^2}{8\hbar^2 E \sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

Ovaj rezultat isti je kao i (9) u zadatku (d)

Razlog tomu jest što smo pretpostavili $\frac{2mg}{\hbar^2} \ll 1$, tj. slabi potencijal.

Zadatak 3

Linearni harmonički oscilator mase m, frekvencije ω_0 i naboja q je pobuđen nerezonantnim zračenjem oblika:

$$\vec{A} = \begin{cases} 2A_0 \hat{z} \cos(ky - \omega t) & , \ t > 0 \\ 0 & , \ t < 0 \end{cases}$$

gdje je $\omega \neq \omega_0$. Neka su $|n\rangle$ i $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ svojstvena stanja i energije oscilatora te neka je $|\psi(t)\rangle$ vremenski ovisan vektor stanja u prisustvu zračenja. Upotrijebite prvi red računa smetnje da biste našli izraz za $|\psi(t)\rangle$ $\left(|\psi(0)\rangle = |0\rangle\right)$.

Schrödingerova jednadžba za linearni harmonički oscilator u polju zračenja:

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2m}\left(p_z - \frac{q}{c}A_z\right)^2 |\psi(t)\rangle + \frac{m\omega_0^2}{2} z^2 |\psi(t)\rangle$$

Budući da $\vec{A}$ ne ovisi o z:

$$\left(p_z - \frac{q}{c}A_z\right)^2 = p_z^2 - \frac{2q}{c}A_z p_z + \frac{q^2}{c^2}A_z^2$$

$\vec{A}$ je perturbacija pa zanemarujemo član kvadratičan u A_0 u odnosu na onaj linearan u A_0. Pa imamo:

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2}z^2\right)|\psi(t)\rangle - \frac{q}{mc}A_z p_z |\psi(t)\rangle$$

Za nesmetani Hamiltonijan uzimamo onaj harmoničkog oscilatora:

$$H_0 = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} z^2 \quad ,$$

a za perturbaciju:

$$H' = -\frac{q}{mc} A_z p_z = \underline{-\frac{2qA_0}{mc} \cos(ky - \omega t)\, p_z}$$

$|\psi(t)\rangle$ možemo u svakom trenutku razviti po svojstvenim stanjima H_0:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\, |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right) |n\rangle ,$$

gdje smo definirali $a(t) = c(t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right)$ iz praktičnih razloga; $H_0 |n\rangle = E_n |n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) |n\rangle$.

Uvrštavanjem $|\psi(t)\rangle$ u Schrödingerovu jednadžbu

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = (H_0 + H') |\psi(t)\rangle \qquad \text{slijedi:}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} i\hbar \frac{dc_n}{dt} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right) |n\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right) H' |n\rangle$$

Množenjem s lijeva sa $\langle k|$ dobijemo:

$$i\hbar \frac{dc_k}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \exp\left(i \frac{E_k - E_n}{\hbar} t\right) \langle k | H' | n \rangle$$

Ako je u početnom trenutku $c_0(0)=1$ i $c_{n>0}(0)=0$

je u prvoj aproksimaciji $|c_0(t)| \approx 1$ i $|c_{n>0}(t)| \ll 1$

pa imamo:

$$i\hbar \frac{dc_n}{dt} = \exp\left(i \frac{E_n - E_0}{\hbar} t\right) \langle n | H' | 0 \rangle$$

$$\Rightarrow \quad c_n(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \exp\left(i \frac{E_n - E_0}{\hbar} \tau\right) \langle n | H' | 0 \rangle$$

Da bismo našli matrični element $\langle n | H' | 0 \rangle$ raspišemo H' preko operatora podizanja i spuštanja:

$$H' = -\frac{2gA_0}{mc} \cos(ky - \omega t)\, i \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} (a^\dagger - a) =$$

$$= \alpha \cos(ky - \omega t)(a^\dagger - a) \quad ; \quad \alpha = -i \frac{gA_0}{c} \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{m}}$$

$$\Rightarrow \langle n | H' | 0 \rangle = \alpha \cos(ky - \omega t) \langle n | (a^\dagger - a) | 0 \rangle =$$

$$= \alpha \cos(ky - \omega t) \langle n | a | 0 \rangle = \alpha \cos(ky - \omega t)\, \delta_{n1}$$

$\Rightarrow$ U prvom redu aproksimacije moguć je samo prijelaz u prvo pobuđeno stanje oscilatora.

$$\Rightarrow \quad c_{n>1}(t) = 0$$

$$c_1(t) = -\frac{i}{\hbar}\alpha \int_0^t d\tau \exp(+i\omega_0\tau)\cos(ky-\omega t) =$$

$$= -\frac{i\alpha}{2\hbar}\int_0^t d\tau \exp(+i\omega_0\tau)\left[\exp(iky-i\omega\tau)+\exp(-iky+i\omega\tau)\right]$$

$$= -\frac{i\alpha}{2\hbar} e^{iky}\int_0^t d\tau \exp(i(\omega_0-\omega)\tau) -$$

$$- \frac{i\alpha}{2\hbar} e^{-iky}\int_0^t d\tau \exp(i(\omega_0+\omega)\tau) =$$

$$= -\frac{i\alpha}{2\hbar} e^{iky}\frac{e^{i(\omega_0-\omega)t}-1}{i(\omega_0-\omega)} - \frac{i\alpha}{2\hbar} e^{-iky}\frac{e^{i(\omega_0+\omega)t}-1}{i(\omega_0+\omega)} =$$

$$= i\frac{qA_0}{c}\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar m}}\left[e^{iky}\frac{e^{i(\omega_0-\omega)t}-1}{\omega_0-\omega} + e^{-iky}\frac{e^{i(\omega_0+\omega)t}-1}{\omega_0+\omega}\right]$$

U prvom redu aproksimacije je $\underline{c_0(t)=1}$.

Time smo odredili stanje $|\psi(t)\rangle$ u prvom redu aproksimacije.

Zadatak 4

Čestica naboja nula, spina $\frac{1}{2}$, giromagnetskog omjera $g=2$ i magnetskog momenta μ_B (Bohrov magneton) nalazi se u homogenom magnetskom polju $\vec{B}=B\hat{x}$. U trenutku $t=0$ spin čestice je orijentiran u $-\hat{z}$ (dolje) smjeru. Treba naći vjerojatnost da čestica ima spin gore ili spin dolje u trenutku $t>0$ (s obzirom na z-os).

Stanja čestice određena su sa:

$$\vec{S}^2|\uparrow\rangle = \frac{3\hbar^2}{4}|\uparrow\rangle \quad , \quad \vec{S}^2|\downarrow\rangle = \frac{3\hbar^2}{4}|\downarrow\rangle$$

$$S_z|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle \quad , \quad S_z|\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle$$

U početnom trenutku je: $\underline{|\psi(0)\rangle = |\downarrow\rangle}$

Hamiltonijan sistema je:

$$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\mu_x B$$

Spin i magnetski moment čestice povezani su preko giromagnetskog omjera kao:

$$\vec{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{S} = 2\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{S} \qquad \mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$$

$$\Longrightarrow \quad H = -2\frac{\mu_B B}{\hbar}S_x$$

Nađimo svojstvena stanja H, tj. svojstvena stanja S_x.
Za S_x raspisanog preko operatora podizanja i spuštanja imamo:

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$$

Svojstvene vrijednosti od S_x su $\pm\frac{\hbar}{2}$ (isto kao i za S_z).
Pa za svojstvene vektore imamo:

$$S_x\left(a_\pm|\uparrow\rangle + b_\pm|\downarrow\rangle\right) = \pm\frac{\hbar}{2}\left(a_\pm|\uparrow\rangle + b_\pm|\downarrow\rangle\right)$$

$$S_x\left(a_\pm|\uparrow\rangle + b_\pm|\downarrow\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(S_+ + S_-)\left(a_\pm|\uparrow\rangle + b_\pm|\downarrow\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\hbar a_\pm|\downarrow\rangle + \hbar b_\pm|\uparrow\rangle\right) =$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(b_\pm|\uparrow\rangle + a_\pm|\downarrow\rangle\right) = \pm\frac{\hbar}{2}\left(a_\pm|\uparrow\rangle + b_\pm|\downarrow\rangle\right)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{b_\pm = \pm a_\pm}}$$

Pa su svojstvena stanja S_x:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right) \quad \text{sa projekcijom na x-os } +\frac{\hbar}{2}$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right) \quad \text{sa projekcijom na x-os } -\frac{\hbar}{2}$$

$|+\rangle$ i $|-\rangle$ su stanja određenje energije jer su svojstvena stanja od S_x pa tako i od H.

$$H|+\rangle = E_+|+\rangle = -\mu_B B$$

$$H|-\rangle = E_-|-\rangle = \mu_B B$$

Početno stanje prikazano preko $|+\rangle$ i $|-\rangle$ je:

$$|\psi(0)\rangle = |\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - |-\rangle\right)$$

Pa znamo vremensku evoluciju:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_+ t\right)|+\rangle - \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_- t\right)|-\rangle\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\exp\left(i\frac{\mu_B B}{\hbar}t\right)|+\rangle - \exp\left(-i\frac{\mu_B B}{\hbar}t\right)|-\rangle\right]$$

Projekcije na z-os su: $|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)$

$$|\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - |-\rangle\right)$$

Pa imamo za vjerojatnosti projekcija na z-os:

$$P_\uparrow = |\langle\uparrow|\psi(t)\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}\exp\left(i\frac{\mu_B B}{\hbar}t\right) - \frac{1}{2}\exp\left(-i\frac{\mu_B B}{\hbar}t\right)\right|^2 =$$

$$= \sin^2\left(\frac{\mu_B B}{\hbar}t\right)$$

$$P_\downarrow = |\langle\downarrow|\psi(t)\rangle|^2 = 1 - P_\uparrow = \cos^2\left(\frac{\mu_B B}{\hbar}t\right)$$