WKB aproksimacija

T. Marketin

Zavod za teorijsku fiziku
Fizički odsjek
Prirodoslovno-matematički Fakultet
Sveučilište u Zagrebu

Zad: Koristeći WKB aproksimaciju pronaći energije vezanih stanja za potencijal oblika

$$V(x) = \alpha |x|^{\nu}$$

gdje je $\nu > 0$. Provjeriti rezultate u slučaju $\nu = 2$.

Rj: Uvjet za potencijal bez okomitih zidova glasi

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

U slčaju zadanog potencijala vrijedi

$$p(x) = \sqrt{2m(E - \alpha x^{\nu})},$$

a granice integracije su

$$x_{1,2} = \pm \left(\frac{E}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\nu}}$$

Uvodimo supstituciju

$$t = \frac{\alpha}{E} x^{\nu}$$

kojom integral postaje

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx &= 2\sqrt{2mE} \int_0^{x_2} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{E} x^{\nu}} dx \\ &= \frac{2\sqrt{2mE}}{\nu} \left(\frac{E}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\nu}} \int_0^1 \sqrt{1 - t} t^{\frac{1}{\nu}-1} dt\end{aligned}$$

Konačan izraz integrala odgovara beta funkciji definiranoj kao

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Možemo identificirati

$$x = \frac{1}{\nu}, \quad y = \frac{3}{2}$$

Koristeći jednakosti

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \frac{1}{\nu}\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{\nu} + 1\right)$$

integral postaje

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = \sqrt{2\pi mE}\left(\frac{E}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}+\frac{3}{2}\right)} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\hbar$$

Svojstvene energije su, dakle

$$E_n = \left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi\hbar\alpha^{1/\nu}}{\sqrt{2\pi m}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}+1\right)}\right]^{\frac{2\nu}{\nu+2}}$$

U slučaju $\nu = 2$ potencijal postaje potencijal harmoničkog oscilatora kada vrijedi

$$\alpha = \frac{1}{2} m\omega^2 .$$

Energije postaju

$$E_n = \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi\hbar\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2\pi m}} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \right]^1 = \left(n - \frac{1}{2} \right) \hbar\omega, n = 1, 2, 3, \ldots$$

$n = 1$ odgovara osnovnom stanju harmoničkog oscilatora, ako indeks pomaknemo na način da odgovara standardnom indeksu harmoničkog oscilatora slijedi

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega, n = 0, 1, 2, \ldots$$