1. kolokvij iz kvantne fizike

23. studeni 2009.

Zadatak 1

Neka se čestica mase m nalazi u 2D beskonačnoj potencijalnoj jami oblika pravokutnika sa omjerom stranica $a:b = 1:2$. Odrediti:

(a) najniže degenerirano stanje

(b) kvantne brojeve stanja u kojem se čestica nalazi, ako ima energiju $E = \frac{13}{4}\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$, gdje je a duljina kraće stranice.

Energijski spektar:

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} n_a^2 + \frac{\pi^2\hbar^2}{2mb^2} n_b^2$$

$$b = 2a \rightsquigarrow \underline{E = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}\left(4n_a^2 + n_b^2\right)}$$

(a) $4n_a^2 + n_b^2 = N \quad , \quad N \geq 5$

Tražimo degenerirano stanje tako da gornja relacija mora biti zadovoljena za dva različita para (n_a, n_b) za isti N.

$(1,1)$ je nedegenerirano stanje.

Za dvije različite kombinacije $(n_a^{(1)}, n_b^{(1)})$ i $(n_a^{(2)}, n_b^{(2)})$ moramo imati:

$$n_a^{(1)} \neq n_a^{(2)} \quad i \quad n_b^{(1)} \neq n_b^{(2)}$$

Dakle, u jednom slučaju n_a mora biti ≥ 2. $\Rightarrow$ $\underline{N \geq 4 \cdot 2^2 + 1^2 = 17}$

$N = 17$ ~ nedegenerirano

$N = 18$ ~ nemoguće

$N = 19$ ~ nemoguće

$N = 20 = 4 \cdot 2^2 + 2^2 = 4 \cdot 1^2 + 4^2$

$$\Rightarrow \quad (n_a, n_b) = \underline{\underline{(2,2), (1,4)}}$$

dva stanja iste energije.

(b) $$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8 m a^2} \times 13 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8 m a^2} \left(4 n_a^2 + n_b^2 \right)$$

$$\longrightarrow \quad (n_a, n_b) = \underline{\underline{(1,3)}}$$

Zadatak 2

Pokažite da je očekivana vrijednost operatora p^2 veća od 0 za proizvoljnu valnu funkciju.

$$\langle p^2 \rangle = \int d^3x\, \psi^*(\vec{x})\, p^2\, \psi(\vec{x}) =$$

$$= -\hbar^2 \int d^3x\, \psi^* \nabla^2 \psi =$$

$$= -\hbar^2 \int d^3x \left(\vec{\nabla} \cdot (\psi^* \vec{\nabla}\psi) - \vec{\nabla}\psi^* \cdot \vec{\nabla}\psi \right) =$$

$$= \hbar^2 \int d^3x\, |\vec{\nabla}\psi|^2 - \hbar^2 \int d^3x\, \vec{\nabla} \cdot (\psi^* \vec{\nabla}\psi) =$$

{ prema teoremu o divergenciji }

$$= \hbar^2 \int d^3x\, |\vec{\nabla}\psi|^2 - \underbrace{\hbar^2 \oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot (\psi^* \vec{\nabla}\psi)}_{\text{iščezava jer } \psi \text{ dovoljno brzo trne u beskonačnosti}} =$$

$$= \hbar^2 \int d^3x\, |\vec{\nabla}\psi|^2 \geq 0$$

Ovo bi moglo biti jednako nula jedino za $\vec{\nabla}\psi(\vec{x}) = 0 \quad \forall \vec{x}$, no to bi podrazumijevalo da je $\psi(\vec{x}) = \text{konst.}$, što nije normalizabilno.

$$\Longrightarrow \quad \underline{\langle p^2 \rangle > 0}$$

Zadatak 3

Zadana je normirana valna funkcija dolika

$$\psi(x) = \varphi(x)\, e^{-\frac{ip_0 x}{\hbar}}$$

gdje je $\varphi(x)$ realna funkcija. Odrediti:

(a) $\int_V \varphi^2(x)\, dx$

(b) fizikalno značenje konstante p_0.
(Napomena: razmotrite očekivanu vrijednost operatora impulsa u stanju ψ).

(a)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x)\psi(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi^*(x)\, \cancel{e^{\frac{ip_0 x}{\hbar}}}\, \varphi(x)\, \cancel{e^{-\frac{ip_0 x}{\hbar}}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi^2(x)$$

(b)

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x)\, p\, \psi(x) =$$

$$= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^* \frac{d\psi}{dx} =$$

$$= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi(x)\, \cancel{e^{\frac{ip_0 x}{\hbar}}} \left(\frac{d\varphi}{dx}\, \cancel{e^{-\frac{ip_0 x}{\hbar}}} - \frac{ip_0}{\hbar}\varphi(x)\, \cancel{e^{-\frac{ip_0 x}{\hbar}}} \right) =$$

$$= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi \frac{d\varphi}{dx} - p_0 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi^2(x)}_{=1} =$$

$$= -p_0 - \frac{i\hbar}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{d(\varphi^2)}{dx} =$$

$$= -p_0 - \frac{i\hbar}{2} \underbrace{\left(\varphi^2(x)\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} = \underline{\underline{-p_0}}$$

$\Longrightarrow$ p_0 je iznos srednjeg impulsa valnog paketa koji se giba prema $-\infty$.

Zadatak 4

Izvrijednuiti komutator

$$[L_i, [L_j, L_k]].$$

Koristiti relacije $[L_a, L_b] = i\,\varepsilon_{abc} L_c$

$$\varepsilon_{abc}\varepsilon_{ade} = \delta_{bd}\delta_{ce} - \delta_{be}\delta_{cd}$$

$$[L_i, [L_j, L_k]] =$$

$$= [L_i, i\,\varepsilon_{jkm} L_m] =$$

$$= i\,\varepsilon_{jkm} [L_i, L_m] =$$

$$= (i)^2 \varepsilon_{jkm}\varepsilon_{ime} L_e =$$

$$= -\varepsilon_{mjk}\varepsilon_{mei} L_e =$$

$$= -(\delta_{je}\delta_{ki} - \delta_{ji}\delta_{ke}) L_e =$$

$$= \underline{\delta_{ij} L_k - \delta_{ik} L_j}$$

Zadatak 5

Izračunati vjerojatnost da se elektron u 1s stanju vodikovog atoma nalazi izvan Bohrovog polumjera. Valna funkcija elektrona je

$$\psi_{100}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{a_0^3 \pi}} e^{-\frac{r}{a_0}}$$

$$P = \int_{r=a_0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \, \psi_{100}^*(\vec{r}) \psi_{100}(\vec{r})$$

$$= \frac{1}{\pi a_0^3} \int_r \int_\theta \int_\varphi r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi =$$

$$= \frac{4}{a_0^3} \int_{a_0}^{\infty} dr \, r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Bronštejn} \\ \text{ili parcijalna} \\ \text{integracija} \end{array} \right.$$

$$= \frac{4}{a_0^3} \left(-\frac{a_0}{4} e^{-\frac{2r}{a_0}} \left(a_0^2 + 2a_0 r + 2r^2 \right) \right) \Big|_{a_0}^{\infty} =$$

$$= \underline{\underline{5 e^{-2}}} \quad (= 0.6767)$$