OBRADA REZULTATA MJERENJA

Pogreške pri mjerenju

Zadatak nekog fizikalnog mjerenja jest utvrditi brojčanu vrijednost neke fizikalne veličine. Zbog nesavršenosti mjernih instrumenata i naših osjetila nijedno mjerenje nije apsolutno točno. Budući da je svako mjerenje podložno mnogobrojnim vanjskim utjecajima, a oštrina ljudskog razlučivanja kao i razlučivanja mjernih instrumenata je ograničena, pojedinačni se rezultati mjerenja neće potpuno podudarati. Stoga svakoj izmjerenoj veličini pridajemo pogrešku. Pretpostavljamo da postoji neka prava vrijednost X određene fizikalne veličine. Tada rezultat pojedniog mjerenja x, odstupa od prave vrijednost X, a odstupanje

$$\Delta X = x - X$$

naziva se ***pravom pogreškom*** tog mjerenja.

Cilj je uzastopnih mjerenja i računa pogrešaka što ***preciznije i pouzdanije*** odrediti pravu vrijednost fizikalne veličine, tj. dati granice pogreške unutar kojih se najvjerojatnije nalazi prava vrijednost. Svako iskazivanje rezultata mjerenja koje uz rezultat ne daje i podatak o njegovoj pouzdanosti, nema vrijednost.

Postoje tri vrste pogrešaka:

1. Sistematske
2. Grube
3. Slučajne

1. Sistematske pogreške

Nastaju zbog neispravnih mjernih instrumenata, izbora pogrešne metode mjerenja ili njenog pogrešnog izvođenja, i sl. One su ponovljive i prilikom ponavljanja mjerenja javljaju se u istom smjeru i iznosu. Ove vrste pogrešaka mogu se smanjiti i ukloniti provjerom i poboljšanjem aparature. Ako smo svjesni mogućnosti nastanka sistematske pogreške u nekom mjerenju, često je moguće osmisliti eksperiment tako da se takve pogreške uklone. Dijelimo ih prema uzroku:

a) Instrument: Loše baždaren instrument, npr. termometar koji pokazuje 102°C u kipućoj, a 2°C u zaleđenoj vodi pri normiranom atmosferskom tlaku. Takav instrument pokazivat će izmjerene vrijednosti koje su konzistentno previsoke.
b) Opažač: Npr. očitavanje skale metra pod nekim kutem.
c) Okolina: Npr. pad napona u gradskoj mreži uslijed kojeg će izmjerene struje biti stalno preniske.

2. Grube pogreške
Nastaju ljudskim propustima u toku mjerenja, naglim poremećajem u okolini ili u mjernom uređaju. Rezultat je i grubog, subjektivno uvjetovanog propusta u mjernom postupku. Opažač može zabilježiti krivu vrijednost, krivo očitati sa skale, zaboraviti znamenku prilikom očitavanja sa skale ili učiniti drugi sličan propust. Rezultati s ovakvim pogreškama trebali bi vidljivo odskakati od ostalih, ako je učinjeno više mjerenja ili ako jedna osoba provjerava rad druge. Oni se u pravilu isključuju iz analize podataka.

3. Slučajne pogreške
U vezi su s neizbježnom nesavršenosti opažača i uređaja, mogu se smanjivati, ali se ne daju potpuno izbjeći. To su pogreške koje donosi samo mjerenje. Boljom izolacijom od okoline i savršenijim uređajem mogu se smanjivati do granica tehnoloških mogućnosti. Slučajne pogreške imaju važno svojstvo – proizvoljno su distribuirane oko prave vrijednosti. Prema zakonima vjerojatnosti najvjerojatnija prava vrijednost izmjerene veličine je aritmetička sredina svih izmjerenih podataka. (Sistematske pogreške ne podliježu zakonima vjerojatnosti.)
Moguću uzroci su:

a) Opažač: Npr. greška u prosudbi opažača kad očitava vrijednosti na najmanjem podjeljku skale
b) Okolina: Npr. nepredvidive fluktuacije mrežnog napona, temperature ili mehaničkih vibracija uređaja.

Za razliku od sistematskih, slučajne pogreške mogu se obraditi statističkom analizom, pouzdanije odrediti pravu vrijednost mjerene veličine te dati granice pogreške unutar kojih se najvjerojatnije nalazi prava vrijednost.

ANALIZA REZULTATA MJERENJA

Analiza rezultata mjerenja odnosi se na analizu slučajnih pogrešaka pri mjerenju, dok se smatra da su grube i sistematske pogreške pri mjerenju otklonjene prije analize. Ukoliko postoji neka sustavna pogreška pri mjerenju, njezin utjecaj na rezultate mjerenja se objašnjava u raspravi rezultata mjerenja (posljednjem dijelu laboratorijskog izvješća). Analiza i proračun slučajnih pogrešaka pri mjerenju radi se prema zakonima vjerojatnosti i statistike.

1. Statistička analiza rezultata mjerenja

Pod pretpostavkom da su pri mjerenju otkonjeni svi izvori grubih i sustavnih (sistematskih) pogrešaka mjerenja, mjerene vrijednosti fizikalnih veličina sadrže samo slučajne pogreške mjerenja. Za dobivanje što pouzdanijeg rezultata mjerenja neke fizikalne veličine, slučajne pogreške pri mjerenju obrađivat će se prema zakonima vjerojatnosti i statistike. Analiza i proračun slučajnih pogrešaka pri mjerenju neke fizikalne veličine prema statističkim zakonima ima svoju punu vrijednost kod velikog broja mjerenja. Međutim, zbog vremenskog ograničenja pri izvođenju mjerenja u laboratoriju predviđeno je da se obavlja niz od 5 do 10 istovrsnih mjerenja neke fizikalne veličine.

a) Slučajne pogreške izravno mjerenih fizikalnih veličina

Pri izvođenju niza istovrsnih mjerenja neke fizikalne veličine, zbog neizbježnih (slučajnih) pogrešaka pri mjerenju, dobiva se niz od *n* različitih $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ mjerenih vrijednosti za tu fizikalnu veličinu. Izmjerene vrijednosti fizikalnih veličina uvijek je potrebno prikazati tablično.

PRORAČUN POGREŠAKA PRI MJERENJU U OKVIRU STATISTIČKE ANALIZE REZULTATA MJERENJA MOŽE SE PODIJELITI U NEKOLIKO KORAKA:

1. KORAK: IZRAČUNAVANJE ARITMETIČKE SREDINE ILI SREDNJE VRIJEDNOSTI NIZA MJERENJA

Aritmetička srednja vrijednost niza mjerenja *x* računa se prema relaciji

$$\overline{x} = \langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_n}{n}$$

i predstavlja najvjerojatniji iskaz nepoznate prave vrijednosti fizikalne veličine X_p.

2. KORAK: IZRAČUNAVANJE SLUČAJNE POGREŠKE IZRAVNO MJERENIH VELIČINA

a) broj mjerenja <5, apsolutna pogreška niza mjerenja

Odstupanja pojedinog mjerenja od aritmetičke sredine iznose $\overline{x}-x_1, \overline{x}-x_2, ..., \overline{x}-x_n$ i zapisana su u tabl.1. (u stupcu označenom s $\overline{x}-x_i$). Za svako *i*-to mjerenje određuje se odstupanje od aritmetičke srednje vrijednosti

$$\Delta x_i = \overline{x} - x_i$$

pri čemu vrijedi da je $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 0$, što služi za kontrolu vrijednosti aritmetičke srednje vrijednosti $\overline{x}$.

Apsolutna vrijednost odstupanja *i*-tog mjerenja od aritmetičke sredine $\left|\overline{x}-x_i\right|$ naziva se apsolutnom pogreškom $\left|\Delta x_i\right|$ i upisana je za svako mjerenje u tabl.1. (u stupcu označenom s $\left|\overline{x}-x_i\right|$).. Apsolutna pogreška niza mjerenja je

$$\Delta x = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left|\Delta x_i\right|}{n}$$

Aspolutna vrijednost najvećeg odstupanja od aritmetičke srednje vrijednosti naziva se maksimalnom apsolutnom pogreškom $\Delta x_{\max}$,

$$\Delta x_{\max} = \left|\overline{x} - x_{\max}\right| \quad .$$

Rezultat mjerenja izražen pomoću apsolutne pogreške je

$$x = \left(\overline{x} \pm \Delta x\right)_{broj\ mjerenja} \quad , \quad\quad x = \left(\overline{x} \pm \Delta x_{\max}\right)_{broj\ mjerenja} \quad .$$

b) broj mjerenja >5, srednje kvadratne pogreške pojedinog mjerenja (standardna devijacija aritmetičke sredine Mn)

Srednja pogreška pojedinog mjerenja je mjera odstupanja pojedinih vrijednosti x_i od srednje vrijednosti $\overline{x}$. Standardna devijacija pojedinog mjerenja računa se prema relaciji

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1}} \quad ,$$

a, za dovoljan broj mjerenja (obično $n \approx 10$), poprima stalnu vrijednost, tj. ne mijenja se znatno povećanjem broja mjerenja. Ona iskazuje prosječno rasipanje rezultata mjerenja koje je posljedica nepreciznosti mjernih uređaja.

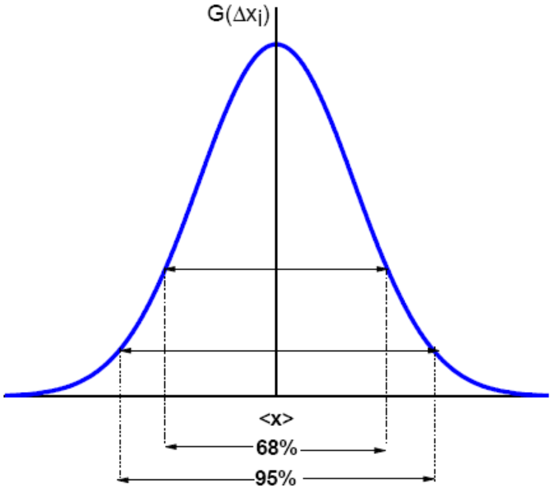
Izvedbom većeg broja mjerenja može se očekivati da će mjerena fizikalna veličina biti pouzdanije određena. Mjera nepouzdanosti rezultata mjerenja je srednja kvadratna pogreška aritmetičke sredine (standardna pogreška):

$$M_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n\left(n-1\right)}} \quad ,$$

koja je za faktor $\frac{1}{\sqrt{n}}$ manja od standardne devijacije pojedinog mjerenja (tj. nepreciznosti uređaja):

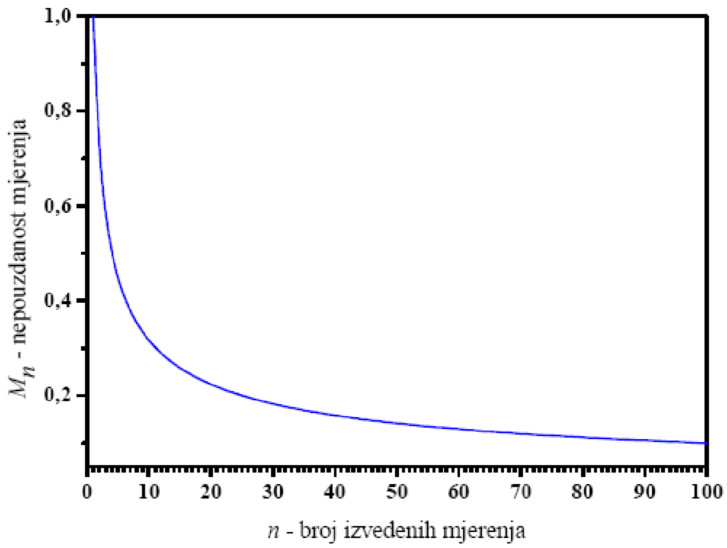
$$M_n = \frac{m}{\sqrt{n}} \quad .$$

Vjerojatnost da se prava vrijednost fizikalne veličine X^p nalazi u intervalu $\overline{x} - M_n \leq X^p \leq \overline{x} + M_n$ (unutar jedne standardne devijacije) iznosi 68.3%, a vjerojatnost da se ona nalazi u intervalu $\overline{x} - 3M_n \leq X^p \leq \overline{x} + 3M_n$ (unutar tri standardne devijacije) iznosi 99.9%.



Slika 1. Normalna ili Gaussova raspodjela slučajnih pogrešaka pri mjerenju.

Standardna pogreška M_n je mjera nepouzdnosti rezultata mjerenja. Nepouzdanost ovisi o broju mjerenja pa indeks n označava broj izvedenih mjerenja na kojima se temelji izračun standardne pogreške. Značajno manja standardna pogreška može se dobiti izvođenjem većeg broja mjerenja. Kako funkcija n raste sporije od linearne funkcije n, mjereći neku fizikalnu veličinu potrebno je odrediti povoljan odnos između nepouzdanosti mjerenja (tj. Standardne pogreške) i broja ponavljanja mjerenja n. Na slici 2. dan je grafički prikaz ovisnosti standardne pogreške o broju izvedenih mjerenja n.



Sl. 2. *Ovisnost nepouzdanosti mjerenja M_n (standardne pogreške) o broju ponavljanja mjerenja.*

Do $n \approx 10$, nepouzdanost mjerenja naglo opada, a zatim se sporo približava osi apscise. Prema tome, može se zaključiti da desetak ponovljenih mjerenja pruža dovoljno pouzdanu mjeru neke fizikalne veličine.

3. KORAK: IZRAČUNAVANJE POGREŠKE IZVEDENIH VELIČINA

Slučajne pogreške izvedenih fizikalnih veličina (ovisna mjerenja)

U slučaju da je tražena fizička veličina F, funkcija više neposredno izmjerenih veličina xi, $F=f(x_1,x_2,...,x_n)$, od kojih svaka ima svoju pogrešku Δxi (M_{ni}) tada je **najvjerojatnija** vrijednost veličine F jednaka:

$$\overline{F} = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$$

Srednja kvadratna pogreška je:

$$M_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} M_i \right)^2}$$

Rezultat se izražava u obliku:

$$F = \overline{F} \pm M_F$$

4. KORAK: IZRAŽAVANJE REZULTATA

a) Ukoliko je broj mjerenja izravno mjerene veličine veći od 5 (n>5) rezultat mjerenja se iskazuje kao:

$$\mathbf{X} = (\overline{\boldsymbol{X}} \mp \boldsymbol{M_n}) \text{ mjerna jedinica}$$

b) Često u nekom nizu mjerenja sve očitane vrijednosti imaju isti iznos. U takvim je slučajevima pogreška aritmetičke sredine jednaka nuli, što ne znači da je mjerenje izvršeno apsolutnom preciznošću. Tada procjenjujemo maksimalnu pogrešku koju označavamo s Δx_{max} i s njom dalje računamo kao da se radi o pogrešci M_n, (Primjer: kada mjerimo pad napona voltmetrom moguće je da dobijemo isti iznos svaki puta. Tada moramo procijeniti kolika je preciznost očitanja sa skale uređaja i to ćemo uzeti kao pogrešku). Pogreška se obično procjenjuje na 25% najmanjeg podioka skale. U tom slučaju rezultat mjerenja iskazuje se kao:

$$\boldsymbol{X} = \overline{\boldsymbol{X}} + \Delta \mathbf{X}_{\mathbf{max}}$$

c) Ukoliko je broj mjerenja izravno mjerene veličine manji od 5 (n<5) rezultat mjerenja se iskazuje kao:

$$\mathbf{X} = (\overline{\boldsymbol{X}} \mp \Delta \boldsymbol{X}) \text{ mjerna jedinica}$$

d) Rezultat izračuna izvedene veličine F iskazuje se kao:

$$\mathbf{F} = (\overline{\boldsymbol{F}} \mp \boldsymbol{M_f}) \text{ mjerna jedinica}$$

GRAFIČKO PRIKAZIVANJE REZULTATA MJERENJA

Grafičko prikazivanje zoran je način prikazivanja rezultata mjerenja.
Pretpostavimo da smo mjerenjem fizikalnih veličina ***x*** i ***y*** dobili niz parova točaka (x_i,y_i). Iz grafičkog prikaza ovih točaka možemo donijeti niz zaključaka o odnosu veličina x i y. Uobičajeno je da se kao x odabire veličina koju preciznije mjerimo, odnosno veličina koju mjerimo neovisno, te da se nanosi na apscisu.
Parove točaka u pogodnom mjerilu ucrtavamo u koordinatni sustav. Pri tome treba slijediti slijedeće upute:

1. Nacrtati graf na milimetarskom papiru dovoljne veličine, te izabrati pogodno mjerilo kako bi graf pregledno predočavao međuovisnost izmjerenih veličina.

2. Graf treba imati naslov koji izražava cilj mjerenja te eventualno podatke o ostalim parametrima i uvjetima vezanim za ucrtanu seriju mjerenja.

3. Uz krajeve svake osi označiti veličinu koja joj je pridružena, te jedinice u kojima je os baždarena u uglatim zagradama (na primjer **t[s]** je vrijeme u sekundama).Veličine moraju obavezno biti naznačene u jedinicama međunarodnog sustava (SI).

4. Dijelovi skale na obje osi ne moraju biti jednaki, ali dijelovi skale na jednoj osi moraju. Skala mora biti takva da na jediničnoj mjeri mjerene veličine odgovara višekratnik broja 1, 2, .5.. milimetara na grafu.

5. Mjerene podatke unosimo tako da točkom označimo položaj u koordinatnom sustavu, te oko svake nacrtamo kružić. Kada krivulja prolazi kroz točke dobivene mjerenjem, oznake tih točaka moraju biti jasno vidljive jer se po njima eksperimentalna krivulja razlikuje od teorijske (npr. one dobivene metodom najmanjih kvadrata).

METODA NAJMANJIH KVADRATA (MNK) ZA PRAVAC

Ovom metodom moguće je općenito odrediti matematičku funkciju koja najbolje opisuje niz mjerenja (x_i,y_i). Pretpostavimo da između promatranih veličina postoji linearna ovisnost i da su sva odstupanja od pravca *slučajne* prirode. U tom slučaju ograničit ćemo se na nalaženje pravca koji ima najmanje kvadratno odstupanje od izmjerenih točaka.

Uzmimo da smo napravili n mjerenja fizikalnih veličina ***x*** i ***y***, te dobili niz parova točaka (x_i,y_i). Kroz te točke želimo povući pravac $\boldsymbol{y = Ax + B}$. Može se pokazati da se koeficijenti tog pravca mogu dobiti preko relacija:

$$A = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$B = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

Gdje je: A – koeficjent smjera pravca; B – odsječak pravca na osi y

Pripadajuće pogreške (nepouzdanost) računaju se iz relacija:

$$M_A = \sqrt{\frac{1}{n-2}\left[\frac{n\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} - A^2\right]}$$

$$M_B = M_A\sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^2}$$

Primjer 1: **linearni graf**

Pretpostavimo da želimo odrediti **brzinu** tijela koje se giba jednoliko po pravcu, tako da mjerimo koliko mu je vremena potrebno da prijeđe različite udaljenosti od početne točke. Te udaljenosti možemo označiti sa (s1,s2,...,sn), a pripadajuća vremena sa (t1,t2,...,tn). Dobivene točke (t_i,s_i) unesemo u graf. Znamo da su za jednoliko pravocrtno gibanje put i vrijeme povezani relacijom:

$$s(t) = vt + s_0$$

gdje je v brzina tijela, a s_0 udaljenost tijela u početnom trenutku (t=0).

1. Uspoređujući jednadžbu pravca s očekivanom fizikalnom relacijom koja opisuje odnos varijabli puta i vremena odredimo varijable x i y.

2. VAŽNO!!!**Odredimo fizikalni parametar koji odgovara koeficjentu smjera A u jednadžbi pravca (dolazi uz varijablu x), te parametar koji odgovara B, odsječku na osi y (koji dolazi sam u jednadžbi pravca)**:

$$s(t) = v\,t + s_0$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow$$

$$y(t) = A\,x + B$$

3. Metodom najmanjih kvadrata izračunamo vrijednosti koeficjenata A i B koji odgovaraju pravcu koji najbolje opisuje izmjerene podatke u smislu najmanjeg kvadratnog odstupanja točaka pravca od zaista izmjerenih točaka.

4. Napišemo jednadžbu pravca s izračunatim koeficjentima.

5. Izaberemo proizvoljno dvije vrijednosti za x, uvrstimo ih u jednadžbu pravca te izračunamo odgovarajuće vrijednosti y.

6. Izračunate točke (iz 5) ucrtamo u graf s izmjerenim vrijednostima crvenom bojom. Povučemo pravac kroz izračunate točke. To je traženi MNK pravac koji najbolje 'fita' izmjerene podatke.

7. Vratimo se na točku 2, te fizikalnim parametrima koji odgovaraju koeficjentima A i B pridružimo brojčane vrijednosti izračunate u točki 3.

Na taj način MNK možemo odrediti brzinu tijela i njegovu početnu udaljenost, te pripadajuću nepouzdanost:

$$v = A + M_A$$
$$s_0 = B + M_B$$

MNK metoda je široko primjenjiva pa i na ovisnosti koje nisu linearne, na primjer eksponencijalne, logaritamske i slično. Tada se dobivaju sustavi nelinearnih jednadžbi koje je teže rješavati nego linearne sustave. Na neke od njih možemo primijeniti metodu izravno, dok neke druge logaritmiranjem (ili nekom drugom operacijom nad funkcijama) svesti na linearne pa tražiti pravac regresije aproksimiranih varijabli.

Primjer 2: **logaritamski graf**

Pretpostavimo da želimo odrediti **ubrzanje** tijela koje se giba jednoliko ubrzano po pravcu, tako da mjerimo koliko mu je vremena potrebno da prijeđe različite udaljenosti od početne točke. Udaljenosti možemo označiti sa (s1,s2,...,sn), a pripadajuća vremena sa (t_1,t_2,...,t_n). Dobivene točke (t_i,s_i) unesemo u graf.
Put *s* i vrijeme *t* jednolikog ubrzanog gibanja po pravcu su povezani relacijom:

$$s(t) = 1/2\ at^2$$

gdje je ***a*** ubrzanje tijela. Budući da put ovisi o kvadratu vremena ne očekujemo da će pravac dobro opisivati dobivena mjerenja već parabola. No ako logaritamiramo relaciju dobivamo:

$$\begin{array}{ccccccc} \ln s(t) & = & 2 & \ln(t) & + & \ln(a/2) \\ \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ Y & = & A & x & + & B \end{array}$$

Dakle ako u graf umjesto točaka (t_i,s_i), unesemo (lnt_i, lns_i), očekujemo da će one ležati na pravcu. Metodom najmanjih kvadrata možemo dobiti odsječak na y-osi ***B***, a iz njega ubrzanje ***a***:

$$B = \ln(a/2) \ \rightarrow a = 2\ e^B$$