Osječki matematički list 22 (2022), 143–160

Povratak ludog nuklearca

Petar Žugec*

Sažetak

Ludi nuklearac dočepao se izvora neutrona pa to koristi kao izliku za rješavanje diferencijalnih jednadžbi i rekurzivnih relacija.

Ključne riječi: *nuklearne reakcije, radioaktivni raspad, diferencijalne jednadžbe, rekurzivne relacije*

Return of a mad nuclear scientist

Abstract

A mad nuclear scientist got hold of a neutron source and he is using it as an excuse for solving some differential equations and recurrence relations.

Keywords: *nuclear reactions, radioactive decay, differential equations, recurrence relations*

*Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, email: pzugec@phy.hr

1 Zavrzlama

Ludi nuklearac – lud k'o šiba – vratio se s novim, još luđim pokusom nego prije (vidi [1] za prvu nuklearčevu vragoliju)! U svojoj opsesiji periodičnim mjerenjima nuklearac se dočepao izvora neutrona i počeo periodički izlagati uzorak stabilnih atomskih jezgara neutronskome snopu. Apsorpcijom neutrona na prvotno stabilnim jezgrama nastaju nove, nestabilne jezgre – bilo samo za neutron bogatije jezgre, bilo jezgre nekog sasvim drugog elementa ako je u primarnoj neutronskoj reakciji iz početne jezgre izbijena neka čestica protonskog sadržaja, poput samog protona ili, na primjer, α-čestice. Nove nestabilne jezgre β-radioaktivne su s prosječnim vremenom života τ te se raspadaju s vremenskom zadrškom u odnosu na početnu neutronsku reakciju koja ih je proizvela. Nuklearac izlaže uzorak neutronskome snopu tijekom vremenskog intervala T_n te ga zatim uklanja iz snopa u vremenskom trajanju T_β i taj postupak periodički ponavlja, što ga neopisivo usrećuje. Sve to vrijeme nuklearac mjeri β-aktivnost uzorka (broj β-raspada u jedinici vremena) detektorima koje je postavio u blizinu uzorka. Dok je izložen neutronskome snopu, u uzorku se apsorbira η neutrona u jedinici vremena (npr. 100 neutrona u sekundi). Ako se novonastale atomske jezgre (na koje je utjecaj neutronskog snopa zanemariv) raspadaju u stabilne jezgre koje su različite od početnih jezgara uzorka, između kojih vrijednosti oscilira β-aktivnost uzorka nakon dovoljno dugog vremena?

2 Neka igre počnu!

Neka je $n(t)$ broj proizvedenih β-radioaktivnih jezgara prisutnih u uzorku u trenutku t. Tijekom čitavog računa n će biti funkcija vremena, no radi jednostavnosti u većini ćemo izraza izostavljati eksplicitnu oznaku vremenske ovisnosti. Vremenska evolucija količine tih jezgara sastoji se od dviju odvojenih faza koje ludi nuklearac naizmjenično ponavlja: faze ozračivanja neutronskih snopom (trajanja T_n) koju ćemo zvati fazom *aktivacije* uzorka, te faze bez ozračivanja snopom (trajanja T_β) koju ćemo zvati fazom *relaksacije* uzorka. Tijekom aktivacije β-radioaktivne jezgre se stvaraju – a neke od već stvorenih i raspadaju – dok se tijekom relaksacije samo raspadaju. Aktivnost $A(t)$ uzorka definirana je brojem raspada u jedinici vremena, što će očito ovisiti o trenutnoj količini radioaktivnih jezgara u uzorku. Kasnije ćemo vidjeti da je (i zašto je) taj izraz jednak upravo: $A(t) = n(t)/\tau$, odakle je još očitija potreba izračunavanja trenutnog broja jezgara $n(t)$. Iako je potrebna početna aktivacija uzorka da bismo uopće pokrenuli relaksaciju, prvo ćemo obraditi fazu relaksacije jer je matematički jednostavnija i bitna za uspostavu važnih konceptualnih pojmova.

2.1 Relaksacija

Tijekom faze neometanog raspada radioaktivnih jezgara – bez njihova dodatnog stvaranja ili pojačanog uništavanja vanjskim utjecajima – broj tih jezgara u uzorku opisan je poznatim zakonom[1] radioaktivnog raspada: $n(t) = n_0 e^{-t/\tau}$, uz n_0 kao broj jezgara u početnom trenutku. Iako se taj zakon često zapisuje u bazi 2 (uz korištenje vremena poluživota $t_{1/2}$ kao: $n(t) = n_0 2^{-t/t_{1/2}}$), sami ćemo uskoro vidjeti da je u svakom ozbiljnijem računu prirodnije koristiti bazu e prirodnog logaritma i prosječno vrijeme života τ koje se pod njom pojavljuje jer e „prirodno iskače" u diferencijalnim računima[2]. No kako možemo tvrditi da je taj τ – pridružen bazi e – upravo prosječno vrijeme života, i to još svake pojedine radioaktivne jezgre? Sad ćemo to pokazati.

Izvod vremenske ovisnosti broja radioaktivnih jezgara pri *nesmetanom* raspadu počinje od diferencijalne jednadžbe koja opisuje promjenu broja tih jezgara u vremenu:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = -\lambda n. \tag{1}$$

Ova jednadžba odražava činjenicu da je raspad nestabilnih jezgara potpuno slučajan proces, za pojedinu jezgru *neovisan* i o povijesti te same jezgre i o tome što se događa s ostalim jezgrama. U jednadžbi (1) to se manifestira kroz očekivanje da količina raspalih jezgara u jedinici vremena, odnosno promjena broja preživjelih jezgara, ovisi *samo* o trenutnom broju jezgara na raspolaganju: $\mathrm{d}n/\mathrm{d}t \propto -n$. Pri tome se minus pojavljuje jer se raspadom broj jezgara smanjuje, odnosno promjena $\mathrm{d}n$ je negativna. Faktor proporcionalnosti λ – koji se obično naziva konstantom raspada i, primijetimo, mora imati dimenziju recipročnog vremena – regulira brzinu raspada, tj. vjerojatnost raspada pojedinih jezgara u jedinici vremena, kao odraz složenih procesa unutar jezgara. Jednadžba (1) rješava se dovođenjem u oblik spreman za integraciju, uz implementaciju prikladnih početnih uvjeta:

$$\frac{\mathrm{d}n}{n} = -\lambda \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \int_{n_0}^{n(t)} \frac{\mathrm{d}n'}{n'} = -\lambda \int_0^t \mathrm{d}t'. \tag{2}$$

1 Valja naglasiti da taj nesretno nazvani „zakon" nije nikakav temeljni zakon, već samo vrlo specifično rješenje u vrlo specifičnim okolnostima kad imamo neometani raspad nestabilnih jezgara, u odsustvu dodatnih utjecaja koji utječu na njihovo stvaranje ili uništavanje. Radioaktivni raspadi nisu „gotove formule", već *diferencijalne jednadžbe*! Općenito, te jednadžbe je potrebno svaki put iznova postaviti i ispočetka riješiti, ovisno o nizu nuklearnih procesa koje opisuju. Tipičan primjer sloma valjanosti izraza $n(t) = n_0 e^{-t/\tau}$ jest lanac radioaktivnih raspada. Upravo ćemo se u ovome članku susresti sa slučajevima kada $n(t) = n_0 e^{-t/\tau}$ više nije primjereno rješenje.

2 To je zato jer je eksponencijalna funkcija e^x jedina funkcija koja je jednaka svojoj derivaciji: $\mathrm{d}e^x/\mathrm{d}x = e^x$, a prema tome i (jednoj) svojoj primitivnoj funkciji (malo manje formalno ali „popularno" rečeno i zapisano, svojem integralu: $\int e^x \mathrm{d}x = e^x$).

Crtica nad podintegralnim veličinama samo označava da su podintegralne varijable formalno različite od onih iz granica integracije. Uvrštavanjem granica integracije u primitivne funkcije:

$$\ln n'\Big|_{n_0}^{n(t)} = -\lambda t'\Big|_0^t \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{n(t)}{n_0} = -\lambda t, \tag{3}$$

te završnim sređivanjem ostaje poznati zakon radioaktivnog raspada: $n(t) = n_0 e^{-\lambda t}$. Sasvim je jasno da je famozni „zakon" koji smo dobili samo specifično rješenje specifičnih okolnosti raspada obuhvaćenih specifičnom polaznom jednadžbom (1), koju ćemo uskoro izmijeniti tijekom opisa aktivacijske faze.

Konačni izraz za $n(t)$ opisuje broj preživjelih jezgara do trenutka t uz uvjet da ih je u početnom trenutku bilo n_0. No kako interpretirati ovaj rezultat ako smo u početku imali samo jednu jezgru: $n_0 = 1$? Tada izraz $e^{-\lambda t}$ više ne može predstavljati ukupan broj preživjelih jezgara jer se odnosi samo na jednu jedinu jezgru i kontinuirano se mijenja između 1 i 0. U tom slučaju $P(t) = e^{-\lambda t}$ predstavlja *vjerojatnost* preživljavanja pojedine jezgre do trenutka t! Međutim, dok je $P(t)$ vjerojatnost da jezgra preživi (tj. ne raspadne se) *barem do* t, korisnija bi nam bila informacija o vjerojatnosti da preživi *točno do* t. Nju možemo odrediti preko vjerojatnosti raspada, i to *baš u* t. Kumulativna vjerojatnost $R(t)$ za raspad u bilo kojem trenutku do t komplementarna je vjerojatnosti preživljavanja: $R(t) = 1 - P(t)$. Odavde vjerojatnost raspada $\mathrm{d}R(t)$ tijekom beskonačno kratkog vremenskog intervala $\mathrm{d}t$ oko trenutka t (tj. „baš u" t) nalazimo jednostavnim diferenciranjem: $\mathrm{d}R(t) = -\mathrm{d}P(t) = \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$. Sada je lako izračunati očekivanu vrijednost bilo koje vremenske veličine vezane uz život pojedine jezgre. Nas zanima prosječno vrijeme života τ, koje računamo uprosječivanjem mogućnosti za raspad u bilo kojem trenutku – tj. za preživljavanje jezgre do kojeg god trenutka – uzimajući u obzir vjerojatnosnu težinu pojedinih ishoda:

$$\tau = \int_{t=0}^{\infty} t\,\mathrm{d}R(t) = \lambda\int_0^{\infty} te^{-\lambda t}\mathrm{d}t = 1/\lambda. \tag{4}$$

Ovime smo pokazali da je konstanta raspada λ u izravnoj vezi s prosječnim vremenom života pojedinih atomskih jezgara: $\lambda = 1/\tau$, tj. otkrili smo njezinu fizikalnu interpretaciju. Nakon što smo to jednom za svagda ustanovili, možemo se vratiti sve do početne diferencijalne jednadžbe i svaku pojavu konstante raspada λ zamijeniti prosječnim vremenom života τ:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = -\frac{n}{\tau} \quad \Rightarrow \quad n(t) = n_0 e^{-t/\tau} \tag{5}$$

te slobodno možemo nastaviti koristiti tu spoznaju u svim kasnijim tretmanima nuklearnih procesa.

2.2 Aktivacija

Tijekom aktivacije, tj. ozračivanja neutronskim snopom, vremenska evolucija $\mathrm{d}n/\mathrm{d}t$ broja radioaktivnih jezgara i dalje ima doprinos $-n/\tau$ njihova spontanog raspada – nikakve fizikalne okolnosti na Zemlji[3] ne mogu to promijeniti. Međutim, sada imamo i dodatan doprinos stvaranja tih jezgara, koji je prema uvjetu zadatka konstantan u vremenu i svodi se na stvaranje η novih jezgara u jedinici vremena. Koristeći raniju spoznaju o mjestu koje u matematičkom opisu zauzima prosječno vrijeme života, odmah možemo napisati diferencijalnu jednadžbu za evoluciju broja radioaktivnih jezgara tijekom aktivacijske faze:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \eta - \frac{n}{\tau}. \tag{6}$$

Kao i ranije, ovu jednadžbu pripremamo za integraciju svođenjem svih varijabli istoga tipa na zasebnu stranu jednakosti:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\eta\tau - n} = \frac{\mathrm{d}t}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \int_{n_0}^{n(t)} \frac{\mathrm{d}n'}{\eta\tau - n'} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}t'}{\tau}, \tag{7}$$

da bismo integriranjem dobili:

$$-\ln(\eta\tau - n')\Big|_{n_0}^{n(t)} = \frac{t'}{\tau}\Big|_0^t \quad \Rightarrow \quad -\ln\frac{\eta\tau - n(t)}{\eta\tau - n_0} = \frac{t}{\tau}. \tag{8}$$

Ponovno koristimo oznaku n_0 za broj radioaktivnih jezgara u nekome početnome trenutku, koji će se mijenjati između uzastopnih faza aktivacije i relaksacije te razlikovati od onoga iz (5). Završnim sređivanjem preostaje vremenska ovisnost broja radioaktivnih jezgara:

$$n(t) = \eta\tau(1 - e^{-t/\tau}) + n_0 e^{-t/\tau} \tag{9}$$

koja je tijekom aktivacijske faze očito različita od tipičnog „zakona“ radioaktivnog raspada. Ovaj novi „zakon“ odraz je njihova istovremenog stvaranja i raspadanja. Primijetimo da kad bismo aktivaciju mogli održavati dovoljno dugo, došlo bi do zasićenja količine ovih jezgara: $n(t \gg \tau) \approx \eta\tau$, koje nastupa kad se brzina raspadanja jezgara izjednači s brzinom njihova stvaranja (koliko ih se stvori, toliko ih se i raspadne u jedinici vremena).

[3] Za razliku od uvjeta na Zemlji, u svemiru zaista postoje toliko ekstremni uvjeti da mogu utjecati na spontane nuklearne procese, utječući tako i na stabilnost atomskih jezgara. Takve uvjete nalazimo u neutronskim zvijezdama.

2.3 Nuklearac u akciji

Sad se napokon možemo pridružiti nuklearcu u njegovoj opsesiji (zabava nikad ne prestaje kad si malo lud i imaš izvor neutrona). Aktivnost $A(t)$ uzorka koju on mjeri definirana je brojem raspada u jedinici vremena:

$$A(t) = \left|\frac{\mathrm{d}n(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{raspad}} = \frac{n(t)}{\tau}. \tag{10}$$

Pri tome je drugi član u jednakosti samo simbolički zapis *doprinosa* raspada ukupnoj vremenskoj promjeni broja radioaktivnih jezgara, a za koji već znamo da je u svim slučajevima – i u (5) i u (6) – opisan članom n/τ. Drugim riječima, taj simbolički zapis *doprinosa ukupnoj* derivaciji ne smijemo shvatiti kao uputu za naivno deriviranje čitavih rješenja iz (5) i (9) jer bismo tim postupkom aktivnosti uzorka – izazvanoj samo raspadom jezgara – pripisali i doprinos njihova stvaranja iz (9). Stoga vidimo da se u daljnjoj analizi možemo zadržati na promatranju broja jezgara $n(t)$ jer nas od tražene aktivnosti dijeli samo faktor proporcionalnosti $1/\tau$.

Iako nam neće biti sasvim nužno, zapišimo punu vremensku ovisnost broja radioaktivnih jezgara, koja na pravilan način odražava izmjenu aktivacijske i relaksacijske faze, tj. nuklearčevo uključivanje i isključivanje neutronskoga snopa. Prisjetimo se: trajanje svake aktivacijske faze iznosi T_n, a svake relaksacijske T_β. Definiramo *period izmjene faza*, koji očito obuhvaća obje faze te iznosi $T_\mathrm{n} + T_\beta$. Mjereći vrijeme t od početka nuklearčeve ekshibicije, vrlo lako određujemo redni broj k aktivnog perioda kao:

$$k = \left\lceil \frac{t}{T_\mathrm{n} + T_\beta} \right\rceil, \tag{11}$$

uz $\lceil x \rceil$ kao poznatu strop-funkciju koja vraća najmanji cijeli broj veći od ili jednak x. Za potrebe korištenja rješenja (5) i (9) potrebno nam je vrijeme t proteklo od početka danog perioda, koje jednostavno određujemo kao:

$$\mathrm{t} = t - (k-1)(T_\mathrm{n} + T_\beta). \tag{12}$$

U kontekstu nuklearčeva problema početni broj n_0 radioaktivnih jezgara iz (5) i (9) odnosi se početak svake pripadne faze. To znači da vrijeme t koje stoji u tim dvjema relacijama općenito nije jednako vremenu od početka nuklearčeve ludorije, već se *u sklopu tih relacija* redefinira kao $t = 0$ s početkom svake nove faze. Da bismo odredili početne vrijednosti n_0 s početka pojedinih faza, definiramo sljedeće dvije ključne veličine:

N_k: broj jezgara po završetku k-te relaksacije,

$\mathcal{N}_k$: broj jezgara po završetku k-te aktivacije.

Očito, završni broj jezgara $\mathcal{N}_k$ na kraju k-te aktivacije služi kao početni broj jezgara za sljedeću relaksaciju (unutar istog, k-tog perioda). S duge strane, završni broj jezgara N_k nakon k-te relaksacije služi kao početni broj jezgara za nadolazeću aktivaciju (unutar sljedećeg, $(k+1)$-tog perioda). Stoga iz (5) i (9) punu vremensku ovisnost broja jezgara možemo konstruirati kao:

$$n(t) = \begin{cases} \eta\tau(1-e^{-\mathsf{t}/\tau}) + N_{k-1}e^{-\mathsf{t}/\tau} & \text{ako} \quad \mathsf{t} \le T_\mathrm{n} \\ \mathcal{N}_k e^{-(\mathsf{t}-T_\mathrm{n})/\tau} & \text{ako} \quad \mathsf{t} \ge T_\mathrm{n} \end{cases} \tag{13}$$

gdje se, ovako zapisana, oba dijela ovisnosti odnose na isti, k-ti period, a ovisnost o vremenu t mjerenom od početka nuklearčeva nestašluka skriva se unutar članova k i t. Pri tome se za početni trenutak dane aktivacije podrazumijeva $\mathsf{t} = 0$, a za početni trenutak dane relaksacije $\mathsf{t} = T_\mathrm{n}$.

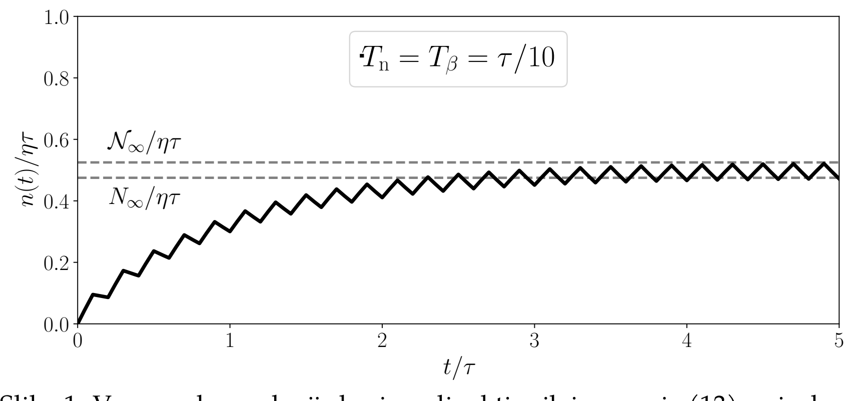
Egzaktne izraze za N_k i $\mathcal{N}_k$ tek ćemo odrediti. U međuvremenu, slika 1 prikazuje punu ovisnost iz (13) za izabrani slučaj $T_\mathrm{n} = T_\beta = \tau/10$, kako bismo s nuklearcem podijelili ideju koja ga opsjeda od samog početka.

* * *

Da bismo odredili skup vrijednosti N_k i $\mathcal{N}_k$, koristimo ranije prepoznatu činjenicu da broj jezgara na kraju jedne faze (aktivacije ili relaksacije) služi kao početni broj jezgara za drugu fazu, što spajanjem dijelova rješenja iz (13) na prijelazu faza vodi na sljedeći par vezanih rekurzivnih relacija:

$$\mathcal{N}_k = \eta\tau(1-e^{-T_\mathrm{n}/\tau}) + N_{k-1}e^{-T_\mathrm{n}/\tau}, \tag{14}$$

$$N_k = \mathcal{N}_k e^{-T_\beta/\tau}. \tag{15}$$



Slika 1. Vremenska evolucija broja radioaktivnih jezgara iz (13) za izabran odnos vremenskih parametara, uz naznačene (kasnije određene) asimptotske granice $\mathcal{N}_\infty$ i N_∞ iz (20) i (21).

Kako bismo si olakšali zapis te razotkrili jednostavnost ovih rekurzija, privremeno uvodimo sljedeće pokrate:

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv \eta\tau(1 - e^{-T_\mathrm{n}/\tau}) \\ b \equiv e^{-T_\mathrm{n}/\tau} \\ c \equiv e^{-T_\beta/\tau} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{N}_k = a + bN_{k-1} \\ N_k = c\mathcal{N}_k \end{array}\right. . \tag{16}$$

Pomak indeksa u posljednjem članu, tako da $N_{k-1} = c\mathcal{N}_{k-1}$, omogućava nam supstituirati N_{k-1} član u izrazu za $\mathcal{N}_k$, čime dobivamo razvezanu rekurziju po samo jednome od dvaju članova (po $\mathcal{N}$, bez N):

$$\mathcal{N}_k = a + bc\mathcal{N}_{k-1}. \tag{17}$$

Za potrebe rješavanja svake rekurzije potrebni su nam početni uvjeti. Kako prema definiciji rednog broja perioda iz (11) prvu fazu nuklearčeve nepodopštine brojimo od $k = 1$, a ona počinje aktivacijom, tada broj jezgara N_0 na kraju „prethodne" (fiktivne) relaksacije služi kao početni broj jezgara za prvu aktivaciju. A upravo za tu početnu vrijednost znamo da odgovara početnom broju β-radioaktivnih jezgara $n(0)$ sa samog početka nuklearčeva eksperimenta: $N_0 = n(0)$. Kako nuklearac tek počinje stvarati te jezgre igrajući se neutronskim snopom, iz njihova početnog odsustva $n(0) = 0$ izravno zaključujemo: $N_0 = 0$. Iz relacije (15), koja vrijedi za svaki k, napokon imamo i $\mathcal{N}_0 = 0$, što je početna vrijednost potrebna za rješavanje razvezane rekurzije (17). Iako postoje razne formalne metode za rješavanje rekurzija ovog tipa [2], vjerojatno najjednostavnija svodi se na ispis prvih nekoliko članova uz pokušaj uočavanja pravilnosti i induktivnog poopćenja rješenja: $\mathcal{N}_0 = 0$, $\mathcal{N}_1 = a$, $\mathcal{N}_2 = a(1 + bc)$, $\mathcal{N}_3 = a[1 + bc + (bc)^2]$, itd. Sada slutnju rješenja lako možemo formalizirati kao:

$$\mathcal{N}_k = a\sum_{i=0}^{k-1}(bc)^i. \tag{18}$$

Matematičkom indukcijom ovu slutnju i strogo bismo dokazali, što ostavljamo za vježbu čitatelju. U (18) prepoznajemo sumu prvih članova geometrijskog reda, čije je rješenje dobro poznato:

$$\mathcal{N}_k = a\frac{1 - (bc)^k}{1 - bc} = \eta\tau(1 - e^{-T_\mathrm{n}/\tau})\frac{1 - e^{-k(T_\mathrm{n}+T_\beta)/\tau}}{1 - e^{-(T_\mathrm{n}+T_\beta)/\tau}}. \tag{19}$$

Ovime smo u potpunosti odredili rješenje rekurzije (17), a posredstvom (15) i rješenje za N_k.

Sada napokon imamo sve što nam treba za odgovoriti na početno pitanje: između kojih vrijednosti oscilira β-aktivnost uzorka nakon dovoljno dugo vremena? Iz (10) već znamo da je aktivnost u izravnoj vezi s brojem radioaktivnih jezgara, stoga samo moramo izračunati limese[4]:

$$\mathcal{N}_\infty = \lim_{k\to\infty} \mathcal{N}_k = \eta\tau \frac{1-e^{-T_\mathrm{n}/\tau}}{1-e^{-(T_\mathrm{n}+T_\beta)/\tau}} = \eta\tau \frac{\sinh(T_\mathrm{n}/2\tau)}{\sinh[(T_\mathrm{n}+T_\beta)/2\tau]}\, e^{T_\beta/2\tau}, \qquad (20)$$

$$N_\infty = \lim_{k\to\infty} N_k = e^{-T_\beta/\tau}\mathcal{N}_\infty = \eta\tau \frac{\sinh(T_\mathrm{n}/2\tau)}{\sinh[(T_\mathrm{n}+T_\beta)/2\tau]}\, e^{-T_\beta/2\tau}, \qquad (21)$$

te zaključiti da nakon dovoljno dugo vremena aktivnost oscilira između N_∞/τ i $\mathcal{N}_\infty/\tau$.

3 Komentar rješenja

Što u kontekstu nuklearčeva problema uopće znači „dovoljno dugo"? Treba li doista čekati „gotovo beskonačno dugo", prema receptu koji smo koristili pri izračunu limesa, da bi napokon nastupilo zasićenje broja radioaktivnih jezgara? Ovo pitanje ekvivalentno je sljedećem: nakon kojeg vremena eksponencijalna ovisnost dovoljno utrne za praktične potrebe? Već i puna vremenska ovisnost $n(t)$ sa slike 1, na kojoj su asimptotske vrijednosti N_∞ i $\mathcal{N}_\infty$ prikazane isprekidanim linijama, jasno pokazuje da se asimptotski režim uspostavlja u razumnom vremenu. Od velike je praktične važnosti činjenica da se eksponencijalna ovisnost $e^{-t/\tau}$ za većinu praktičnih potreba „ugasi" nakon 5τ (općenitije iskazano, za argument eksponencijale e^{-x} veći od 5). Iz (19) vidimo da vremensku evoluciju prema asimptotskoj vrijednosti nosi član s k: $\mathcal{N}_k = \mathcal{N}_\infty(1-e^{-k(T_\mathrm{n}+T_\beta)/\tau})$. Prema tome, nuklearac se nada vidjeti ujednačene oscilacije aktivnosti uzorka nakon onog broja ponavljanja uzastopnih aktivacija i relaksacija – koji ćemo označiti s k_5 – za koji vrijedi $k_5(T_\mathrm{n}+T_\beta)/\tau = 5$. Drugim riječima, aktivnost uzorka ulazi u asimptotski režim nakon izmjene k_5 aktivacijsko-relaksacijskih perioda, do čega treba proći svega $t = k_5(T_\mathrm{n}+T_\beta) = 5\tau$ vremena, što se također lijepo vidi sa slike 1. Sada vidimo da je nuklearčeva vlastita odgovornost izabrati takav uzorak da je prosječno vrijeme života τ stvorenih radioaktivnih jezgara dovoljno kratko da mu igra s neutronskim snopom ne dosadi prije uspostave željenog asimptotskog ishoda.

[4] Asimptotsko rješenje $\mathcal{N}_\infty$, uz pretpostavku da doista postoji, također se može odrediti izravno iz rekurzije:

$$\mathcal{N}_\infty = a + bc\mathcal{N}_\infty \quad\Rightarrow\quad \mathcal{N}_\infty = \frac{a}{1-bc},$$

bez potrebe za nalaženjem eksplicitnog rješenja za $\mathcal{N}_k$ iz (19).

Osvrnimo se još na pretpostavku konstante brzine apsorpcije neutrona (η), tj. konstantne brzine trošenja početnih jezgara uzorka. Da je ovaj model načelno aproksimativan jasno je iz činjenice da će, izlažemo li uzorak neutronskome snopu dovoljno dugo, prije ili kasnije sve jezgre uzorka transmutirati. Nakon toga više neće biti jezgara potrebnih za održavanje reakcije pa stoga njezina brzina ne može vječno ostati konstantna. Međutim, koliko je ta aproksimacija opravdana? Je li manje vrijedna samim time što načelno jest aproksimacija? Procijenimo to na realističnom primjeru jednog od najintenzivnijih izvora neutrona na svijetu: n_TOF (eng. *neutron time of flight*) postrojenja u CERN-u [3]. Postrojenje ima dvije eksperimentalne prostorije, priključene na isti izvor neutrona. Ove dvije prostorije razlikuju se, među ostalim radnim značajkama, i prema prosječnom intenzitetu neutronskog snopa koji dolazi do njih. Prosječan tok neutrona u onoj prostoriji do koje dolazi intenzivniji snop iznosi otprilike 10^7 neutrona po sekundi. Pretpostavimo da smo u taj snop postavili makroskopski uzorak koji se sastoji od Avogadrovog broja (6×10^{23}) početnih jezgara. Od 10^7 dolaznih neutrona u sekundi samo se manji dio njih apsorbira u uzorku. Budimo velikodušni pa pretpostavimo da ih se svake sekunde apsorbira milijun (10^6). Kad bismo godinu dana neprekidno ozračivali uzorak tim snopom[5], ovolikom brzinom apsorpcije potrošili bismo 3×10^{13} početnih jezgara. Impresivno, zar ne? Međutim, koliki je to udio početnog broja jezgara? Tek 5×10^{-11}! Drugim riječima, u godinu dana ozračivanja jednim od najintenzivnijih izvora neutrona na svijetu „načeli" bismo samo 0.000 000 000 05-ti dio uzorka. Što znači da bismo istom brzinom apsorpcije uzorak morali trošiti 20 milijardi godina. Ovo je dulje od starosti svemira, koji je star tek nekih 13.8 milijardi godina. Ostavljamo čitatelju da samostalno izvuče zaključke o valjanosti korištene aproksimacije.

Međutim, kad bismo iz vlastitog zadovoljstva htjeli na načelno ispravan način uzeti u obzir i trošenje početnog uzorka, kako bismo to napravili? U tome nam pomaže jednostavna činjenica da je apsorpcija neutrona *inducirana* reakcija te spoznaja da inducirane reakcije prate iste statističke zakonitosti kao i *spontane* reakcije. To znači da unutar svojih diferencijalnih jednadžbi apsorpciju neutrona možemo tretirati na potpuno isti način kao i spontani raspad jezgara, uvedemo li prosječno vrijeme τ_n potrebno za apsorpciju neutrona na pojedinoj jezgri. Sada osim broja $n(t)$ stvorenih jezgara moramo aktivno pratiti i evoluciju broja početnih jezgara, koji ćemo označiti s $\widetilde{n}(t)$. Dok je uzorak izložen neutronskome snopu, tj. *tijekom aktivacije* trošenje njegovih jezgara opisujemo diferencijalnom jednadžbom „induciranih raspada": $\mathrm{d}\widetilde{n}/\mathrm{d}t = -\widetilde{n}/\tau_\mathrm{n}$, u potpunoj analogiji s tretmanom spontanih raspada iz (5). Rješenje te jednadžbe također je potpuno ana-

[5]Usputna zanimljivost: u godini je približno $\pi \times 10^7$ sekundi.

logno: $\widetilde{n}(t) = \widetilde{n}_0 e^{-t/\tau_\mathrm{n}}$ uz $\widetilde{n}_0$ kao početni broj jezgara uzorka. Sada u jednadžbi (6) za evoluciju broja β-radioaktivnih jezgara samo moramo zamijeniti ranije pretpostavljenu konstantnu brzinu stvaranja načelno ispravnom brzinom koja je jednaka brzini trošenja početnih jezgara: $\eta \to \widetilde{n}/\tau_\mathrm{n}$. Kako se sad pojavilo dodatno prosječno vrijeme τ_n za apsorpciju neutrona, ranije prosječno vrijeme za β-raspad nadalje ćemo označavati kao τ_β. Sada *tijekom aktivacije* imamo:

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{n}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\widetilde{n}}{\tau_\mathrm{n}}, \tag{22}$$

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \frac{\widetilde{n}}{\tau_\mathrm{n}} - \frac{n}{\tau_\beta}, \tag{23}$$

gdje smo naveli diferencijalne jednadžbe za obje vrste jezgara radi preglednosti tijekom nadolazećeg postupka. Uvrstimo li već poznato rješenje za $\widetilde{n}(t)$ u (23), ostaje nam diferencijalna jednadžba:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \frac{\widetilde{n}_0}{\tau_\mathrm{n}} e^{-t/\tau_\mathrm{n}} - \frac{n}{\tau_\beta}. \tag{24}$$

Sada više ne možemo jednostavnim manipulacijama svesti svu ovisnost o traženoj funkciji $n(t)$ na jednu stanu jednadžbe, a svu ovisnost o vremenu t na drugu stranu, čime bismo je pripremili za izravnu integraciju kao u (2) i (7). Stoga je moramo rješavati drugačijim metodama. Najjednostavnija od njih je pretpostavka oblika rješenja [4]: $n(t) = ae^{-t/\tau_\mathrm{n}} + be^{-t/\tau_\beta}$, pri čemu bismo nepoznate konstante a i b u nekoliko jednostavnih koraka odredili iz početnih uvjeta. No ta metoda zahtijeva izrazit intuitivan uvid ili ranije iskustvo u rješavanju diferencijalnih jednadžbi, stoga početnicima u ovome području može ostaviti dojam neuvjerljivosti. Zato je nećemo ovdje koristiti. Od „šablonskih" metoda za rješavanje tzv. nehomogenih linearnih diferencijalnih jednadžbi poput (24) ističe se *metoda varijacije parametara* [5]. Međutim, ona zahtijeva ponešto teorijskog uvoda te je pretjerano komplicirana za jednostavan problem poput našega. Stoga ćemo koristiti jednostavniji postupak koji spaja najbolje iz obaju svjetova: konceptualnu jednostavnost i primjenjivost bez potrebe za poznavanjem oblika rješenja unaprijed. U tu svrhu pokušavamo konstruirati neku linearnu kombinaciju funkcija $\widetilde{n}(t)$ i $n(t)$ za koju bi se diferencijalna jednadžba (23) „razvezala" od (22). Drugim riječima, tražimo takvu linearnu kombinaciju $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{N} = a\widetilde{n} + bn \tag{25}$$

za koju možemo napisati homogenu diferencijalnu jednadžbu u kojoj se više ne pojavljuje ikakva druga funkcija pored $\mathbf{N}$, što isključuje i bilo kakvu

eksplicitnu ovisnost o vremenu t. Nepoznate koeficijente a i b odredit ćemo iz upravo opisanog zahtjeva. S time na umu prvo deriviramo (25) kako bismo posredstvom (22) i (23) odredili diferencijalnu jednadžbu za sam $\mathbf{N}$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}t} = a\frac{\mathrm{d}\widetilde{n}}{\mathrm{d}t} + b\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \frac{b-a}{\tau_\mathrm{n}}\widetilde{n} - \frac{b}{\tau_\beta}n. \tag{26}$$

Sada bismo željeli osigurati proporcionalnost $\mathrm{d}\mathbf{N}/\mathrm{d}t \propto \mathbf{N}$ jer jednadžbu takvog tipa znamo riješiti. To možemo postići kad su koeficijenti uz $\widetilde{n}$ i n iz (26) u istome odnosu kao i pripadni koeficijenti iz (25):

$$\left(\frac{b-a}{\tau_\mathrm{n}}\right) : a = \left(-\frac{b}{\tau_\beta}\right) : b, \tag{27}$$

što je uvjet kojim ćemo odrediti a i b. Njegovim sređivanjem nalazimo:

$$\frac{b}{a} = 1 - \frac{\tau_\mathrm{n}}{\tau_\beta}, \tag{28}$$

što znači da jednoznačno možemo naći omjer koeficijenata, dok jedan od njih možemo slobodno birati. Sasvim očekivano, jer je željena ovisnost $\mathrm{d}\mathbf{N}/\mathrm{d}t \propto \mathbf{N}$ neosjetljiva na skaliranje traženog $\mathbf{N}$ bilo kojim konstantnim faktorom. Radi jednostavnosti biramo $a = 1$, što jasno definira b, odakle:

$$\mathbf{N} = \widetilde{n} + \left(1 - \frac{\tau_\mathrm{n}}{\tau_\beta}\right) n. \tag{29}$$

Ovime smo odredili traženu linearnu kombinaciju. Sada članove a i b samo treba uvrstiti u (26) te povezati izraz s (29):

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\widetilde{n}}{\tau_\mathrm{n}} + \left(1 - \frac{\tau_\mathrm{n}}{\tau_\beta}\right)\left(\frac{\widetilde{n}}{\tau_\mathrm{n}} - \frac{n}{\tau_\beta}\right) = -\frac{\mathbf{N}}{\tau_\beta}. \tag{30}$$

Rješenje ovakve jednadžbe – kakvoj smo se upravo nadali – već nam je poznato iz (5), stoga ga odmah možemo zapisati kao: $\mathbf{N}(t) = \mathbf{N}_0 e^{-t/\tau_\beta}$. Početna vrijednost $\mathbf{N}_0$ određena je početnim vrijednostima $\widetilde{n}_0$ i n_0 uvrštenima u (29). Uz podsjetnik da $\widetilde{n}_0$ i n_0 iznova definiramo na početku svake aktivacijske faze, napokon možemo zapisati konačno rješenje:

$$\mathbf{N}(t) = \left[\widetilde{n}_0 + \left(1 - \frac{\tau_\mathrm{n}}{\tau_\beta}\right) n_0\right] e^{-t/\tau_\beta}. \tag{31}$$

Budući da sve vrijeme tražimo vremensku ovisnost $n(t)$ β-radioaktivnih jezgara stvorenih neutronskim snopom, samo moramo invertirati (29):

$$n(t) = \frac{\tau_\beta}{\tau_\beta - \tau_n}\left[\mathbf{N}(t) - \widetilde{n}(t)\right]. \tag{32}$$

Oba potrebna člana su nam poznata: $\mathbf{N}(t)$ iz (31), dok za $\widetilde{n}(t)$ još otprije znamo: $\widetilde{n}(t) = \widetilde{n}_0 e^{-t/\tau_\mathrm{n}}$. Nakon sređivanja imamo:

$$n(t) = n_0 e^{-t/\tau_\beta} + \frac{\widetilde{n}_0 \tau_\beta}{\tau_\beta - \tau_\mathrm{n}}\left(e^{-t/\tau_\beta} - e^{-t/\tau_\mathrm{n}}\right), \tag{33}$$

što je konačno rješenje za evoluciju broja radioaktivnih jezgara tijekom aktivacijske faze koja kreće s početnim vrijednostima $\widetilde{n}_0$ i n_0.

* * *

Rješenje (33) formalno je ispravnija inačica rješenja (9) u koje je usađena pretpostavka da se broj početnih jezgara uzorka ne mijenja pa je brzina njihova trošenja konstantna ($\mathrm{d}\widetilde{n}/\mathrm{d}t = -\eta$). Primjena ove pretpostavke opravdana je sve dok je količina jezgara transmutiranih neutronskim snopom zanemariva spram njihova početnog broja, što je okolnost koju smo već komentirali na realističnom primjeru s n_TOF postrojenja.

Kako bismo sa zaluđenim nuklearcem još malo dijelili njegovo opsesivno, ali neupitno zabavno viđenje svijeta – jer ludost je lakša udvoje – ponovit ćemo postupak rekurzivnog nalaženja količine $\mathcal{N}_k$ i N_k radioaktivnih jezgara po završetku k-te aktivacije ili relaksacije. Međutim, za nalaženje odgovora od praktične važnosti tijekom nuklearčeva eksperimenta sada uopće ne bismo mogli iskoristiti jednostavno promatranje granične vrijednosti $k \to \infty$ kao u (20) i (21) . Zašto? Upravo zato jer tretman iz (22) i (23) pravilno uzima u obzir trošenje početnih jezgara, što znači da će se nakon dovoljno dugog izlaganja neutronskome snopu uzorak u potpunosti potrošiti, a sve stvorene β-radioaktivne jezgre raspasti! Stoga unutar ovakvog modela, čak i bez nalaženja $\mathcal{N}_k$ i N_k, unaprijed znamo da vrijedi: $\lim_{k\to\infty} \mathcal{N}_k = \lim_{k\to\infty} N_k = 0$. Prema tome, sasvim je jasno da su u stvarnim eksperimentalnim okolnostima određene aproksimacije ne samo praktične već i nužne!

U svakome slučaju, pridružimo se nuklearcu u nastavku njegova otpora zdravoj pameti. Opsesija ne čeka ni na koga! Analogno oznakama $\mathcal{N}_k$ i N_k za broj β-radioaktivnih jezgara, sada uvodimo i oznake $\widetilde{\mathcal{N}}_k$ i $\widetilde{N}_k$ za broj početnih jezgara uzorka po završetku k-te aktivacije ili relaksacije. Prisjetimo se da rješenje (33) opisuje evoluciju broja β-radioaktivnih jezgara tijekom aktivacije. Tijekom relaksacije samo se raspadaju, tipičnom vremenskom

evolucijom $n(t) = n_0 e^{-t/\tau_\beta}$. S druge strane, inače stabilne početne jezgre uzorka induciranim raspadima troše se tijekom aktivacije: $\widetilde{n}(t) = \widetilde{n}_0 e^{-t/\tau_\mathrm{n}}$, dok u vrijeme ugašenog neutronskog snopa – tj. tijekom relaksacije stvorenih nestabilnih jezgara – samo stagniraju: $\widetilde{n}(t) = \mathrm{const.}$ Spajanjem ovih rješenja na prijelazima aktivacijskih i relaksacijskih faza, baš kao u (14) i (15), dolazimo do sljedećih rekurzivnih relacija:

$$\mathcal{N}_k = N_{k-1} e^{-T_\mathrm{n}/\tau_\beta} + \frac{\widetilde{N}_{k-1}\tau_\beta}{\tau_\beta - \tau_\mathrm{n}}\left(e^{-T_\mathrm{n}/\tau_\beta} - e^{-T_\mathrm{n}/\tau_\mathrm{n}}\right), \tag{34}$$

$$\widetilde{\mathcal{N}}_k = \widetilde{N}_{k-1} e^{-T_\mathrm{n}/\tau_\mathrm{n}}, \tag{35}$$

$$N_k = \mathcal{N}_k e^{-T_\beta/\tau_\beta}, \tag{36}$$

$$\widetilde{N}_k = \widetilde{\mathcal{N}}_k, \tag{37}$$

koje ponovno moramo razvezati. Uvrštavanjem (35) u (37) odmah nalazimo prvu razvezanu relaciju $\widetilde{N}_k = \widetilde{N}_{k-1} e^{-T_\mathrm{n}/\tau_\mathrm{n}}$, čija je rješenja jednostavno prepoznati kao članove geometrijskog niza. Pri tome za početni član tog niza uvodimo posebnu oznaku N_0 koja predstavlja ukupan broj jezgara uzorka na samome početku nuklearčeva podviga: $\widetilde{N}_0 = \mathsf{N}_0$. Posredstvom (37) također smo odredili i rješenje za $\widetilde{\mathcal{N}}_k$:

$$\widetilde{N}_k = \widetilde{\mathcal{N}}_k = \mathsf{N}_0 e^{-kT_\mathrm{n}/\tau_\mathrm{n}}, \tag{38}$$

što je po potrebi jednostavno dokazati matematičkom indukcijom. Uvrštavanjem relacije (36) – indeksa pomaknutog za jedno mjesto unatrag – i eksplicitnog rješenja (38) u (34), dolazimo do središnje razvezane relacije:

$$\mathcal{N}_k = \mathcal{N}_{k-1} e^{-(T_\mathrm{n}+T_\beta)/\tau_\beta} + \frac{\mathsf{N}_0\tau_\beta}{\tau_\beta - \tau_\mathrm{n}}\left(e^{-T_\mathrm{n}/\tau_\beta} - e^{-T_\mathrm{n}/\tau_\mathrm{n}}\right) e^{-(k-1)T_\mathrm{n}/\tau_\mathrm{n}}. \tag{39}$$

U svrhu olakšanog uvida u jednostavnost relacije uvodimo pokrate:

$$\left.\begin{aligned} a &\equiv e^{-(T_\mathrm{n}+T_\beta)/\tau_\beta} \\ b &\equiv \frac{\mathsf{N}_0\tau_\beta}{\tau_\beta - \tau_\mathrm{n}}\left(e^{-T_\mathrm{n}/\tau_\beta} - e^{-T_\mathrm{n}/\tau_\mathrm{n}}\right) \\ c &\equiv e^{-T_\mathrm{n}/\tau_\mathrm{n}} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}_k = a\mathcal{N}_{k-1} + bc^{k-1}. \tag{40}$$

Ponovno ćemo pokušati naslutiti oblik općeg rješenja promatranjem prvih članova. Početnim ozračivanjem nuklearac je tek počeo stvarati nestabilne jezgre, kojih u početnome trenutku čitavog nuklearčevog pothvata nije bilo u uzorku: $N_0 = 0$. Odavde, u kombinaciji s (36), za potrebnu početnu vrijednost izravno imamo: $\mathcal{N}_0 = 0$. Uzastopnom primjenom kompaktnog izraza (40) lako izgrađujemo prvih nekoliko članova: $\mathcal{N}_1 = b, \mathcal{N}_2 = b(a+c)$, $\mathcal{N}_3 = b(a^2+ac+c^2), \mathcal{N}_4 = b(a^3+a^2c+ac^2+c^3)$.

Nije teško uočiti pravilnost koja se pojavljuje. Sumacijskom oznakom zapisujemo naslućeni oblik te postavljenu sumu odmah rješavamo prepoznajući u njoj članove geometrijskog niza:

$$\mathcal{N}_k = b\sum_{i=0}^{k-1} a^{(k-1)-i}c^i = ba^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}(c/a)^i = ba^{k-1}\frac{1-(c/a)^k}{1-c/a} = b\frac{a^k-c^k}{a-c}. \tag{41}$$

Sasvim pitomo rješenje ispočetka zastrašujućeg niza relacija (34)–(37). Kao što smo i očekivali, u limesu $k \to \infty$ broja aktivacijsko-relaksacijskih perioda vrijedi $\lim_{k\to\infty} \mathcal{N}_k = 0$ jer su relevantni članovi a i c prema definiciji iz (40) manji od jedinice. Preko (36) isti rezultat slijedi i za N_k. Budući da smo unaprijed znali za ovaj rezultat, čitav postupak možda i jest ispao pomalo uzaludan. No barem smo udovoljili svojoj i nuklearčevoj potrebi za rješavanjem rekurzija. Malo zadovoljstvo za kojim nam se ne pruža često prilika.

* * *

Konačno, kako uspostaviti vezu između aproksimativnog tretmana – gdje se u limesu uspostavi netrivijalna vrijednost β-aktivnosti – i načelno egzaktnog tretmana u kojem je asimptotska aktivnost 0, no daleko od tog „pravog" asimptotskog režima postoje dugotrajni vremenski intervali unutar kojih se ona mijenja sasvim zanemarivo za praktične potrebe? Usporedbom diferencijalnih jednadžbi! Aproksimacija „netaknutog" uzorka vrijedi sve dok je promjena broja početnih jezgara zanemariva s obzirom na početnu vrijednost N_0 iz (38), koja i kasnije tijekom eksperimenta odgovara ukupnom broju *svih* jezgara u uzorku, ako neutronskim reakcijama samo transmutiramo postojeće, bez proizvodnje dodatnih jezgara (npr. fisijom ili emisijom lakih jezgara poput α-čestica). Uvrštavanjem $\widetilde{n}(t) \approx \mathsf{N}_0$ u (23) i usporedbom sa (6) imamo korespondenciju parametara iz dvaju tretmana:

$$\eta = \frac{\mathsf{N}_0}{\tau_\mathrm{n}} \tag{42}$$

koja, naravno, vrijedi sve dok su uvjeti aproksimacije opravdani. Ova relacija nije samo od marginalnog značaja, već je od velike praktične važnosti jer omogućava mjerenje prosječnog vremena τ_n za uhvat neutrona, a time i vjerojatnost te reakcije (koja je u fizici u izravnoj vezi s tzv. *udarnim presjekom* reakcije). Naime, izložimo li kontinuirano uzorak neutronskome snopu, definicija aktivacije iz (10) preko (9) nam daje asimptotsku vrijednost $A_\infty = \eta$ jer, sjetimo se, aktivnost se ujednači kad se u jedinici vremena toliko radioaktivnih jezgara raspada koliko ih se i stvori. A kako se aktivnost razmjerno lako mjeri, prosječno vrijeme za neutronsku reakciju na pojedinoj jezgri posredstvom (42) lako možemo izračunati kao $\tau_\mathrm{n} = \mathsf{N}_0/A_\infty$ jer se i početni broj N_0 jezgara u uzorku lako određuje iz njegove mase.

4 Za samostalnu vježbu

Do sada smo pretpostavljali niz reakcija A $\to$ B $\to$ C u kojem se β-radioaktivne jezgre B raspadaju u jezgre C različite od početnih jezgara A. Upravo zbog toga početne jezgre uzorka nepovratno su se trošile. Međutim, moguće su i reakcije tipa A $\rightleftarrows$ B u kojima se novonastale jezgre B raspadaju u početne jezgre A, čime se početni uzorak „reciklira“. Na primjer, jedna od takvih neutronski induciranih reakcija na jezgrama ugljika-12 jest neelastični izboj protona: $\mathrm{n} + {}^{12}\mathrm{C} \to {}^{12}\mathrm{B} + \mathrm{p}$, za kojim ostaju β-radioaktivne jezgre bora-12 koje se raspadaju natrag u početne jezgre ugljika: ${}^{12}\mathrm{B} \to {}^{12}\mathrm{C}$. U stvarnosti, naravno, na danoj vrsti jezgara redovito se pokreću i druge reakcije kojima početne jezgre (ovdje ${}^{12}\mathrm{C}$) prelaze u neke druge jezgre koje se više ne vraćaju u početne. Neutronski snop također utječe i na same novonastale jezgre (ovdje ${}^{12}\mathrm{B}$), čime se i one troše dodatnim reakcijama za kojima tipično ne ostaju početne jezgre. Stoga se u stvarnom eksperimentu uvijek može očekivati nepovratno trošenje početnog uzorka, koje tek može biti više ili manje usporeno djelomičnim recikliranjem. Međutim, nuklearčeve ambicije ne poznaju granice! Čim je naslutio da postoji mogućnost kvalitativno novog toka reakcija A $\rightleftarrows$ B, njegova opsesija više se ne može oduprijeti iskušenju za ponavljanjem računa u sklopu tog svježeg scenarija. Prilika je jednostavno predobra da je se propusti!

Otkrij što te usrećuje i pusti da te to ubije.
(Nuklearčeva mudrost.)

Čitatelju koji također ne može odoljeti nuklearčevim porivima ovaj problem ostavljamo za samostalnu vježbu, uz nekoliko uputa za rješavanje i par kontrolnih točaka u računu. Pretpostavit ćemo da imamo slučaj potpunog recikliranja uzorka, tj. samo dvije reakcije kojima se izmjenjuju dvije vrste jezgara: A $\rightleftarrows$ B. Kao i ranije, neutronski induciranom reakcijom prosječnog vremena τ_n jezgre A prelaze u B, a β-raspadom prosječnog vremena τ_β jezgre B vraćaju se u A. Ponovno nas zanima između kojih vrijednosti oscilira β-aktivnost uzorka nakon dovoljno dugog vremena. Primijetimo da nam u ovom slučaju nisu potrebne aproksimacije. U limesu $t \to \infty$ egzaktnog rješenja očekujemo netrivijalnu aktivnost, s obzirom da se početni uzorak sve vrijeme učinkovito obnavlja, tj. njegove jezgre se ne troše nepovratnim „bijegom“ u druge vrste jezgara. Upravo u ovome leži matematička zanimljivost problema koja svojom primamljivošću izluđuje nuklearca. U nastavku navodimo nekoliko kontrolnih točaka u računu, za slučaj da postupak „zapne“ u kojem ključnom koraku.

* * *

Aktivno moramo pratiti vremensku evoluciju broja obiju vrsta jezgara, stoga trebamo pažljivo postaviti diferencijalne jednadžbe i za A i za B:

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{n}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\widetilde{n}}{\tau_\mathrm{n}} + \frac{n}{\tau_\beta}, \tag{43}$$

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = -\frac{n}{\tau_\beta} + \frac{\widetilde{n}}{\tau_\mathrm{n}}, \tag{44}$$

koje vrijede samo tijekom aktivacijske faze (relaksacijska faza jednostavna je kao i ranije). Možemo detaljnim postupkom tražiti zamjenske veličine u kojima se one razvezuju. No možemo i odmah primijetiti da bi supstitucije $\Sigma = \widetilde{n} + n$ i $\Delta = \widetilde{n} - n$ mogle biti od koristi (pokušajte zbrojiti ili oduzeti diferencijalne jednadžbe). Članovi Σ i Δ sada se određuju „izravnim napadom“, uz N_0 kao ukupan broj jezgara u uzorku te $\widetilde{n}_0$ i n_0 kao početne brojeve danih jezgara na početku dane aktivacijske faze. Pri rješavanju se pojavljuje novo relevantno prosječno vrijeme $\tau_{\mathrm{n}\beta}$, definirano kao:

$$\frac{1}{\tau_{\mathrm{n}\beta}} = \frac{1}{\tau_\mathrm{n}} + \frac{1}{\tau_\beta}. \tag{45}$$

Konačna su *aktivacijska* rješenja za $\widetilde{n}(t)$ i $n(t)$, dobivena inverzijom članova Σ i Δ:

$$\widetilde{n}(t) = \frac{\mathsf{N}_0\tau_\mathrm{n} + (\widetilde{n}_0\tau_\beta - n_0\tau_\mathrm{n})e^{-t/\tau_{\mathrm{n}\beta}}}{\tau_\mathrm{n} + \tau_\beta}, \tag{46}$$

$$n(t) = \frac{\mathsf{N}_0\tau_\beta - (\widetilde{n}_0\tau_\beta - n_0\tau_\mathrm{n})e^{-t/\tau_{\mathrm{n}\beta}}}{\tau_\mathrm{n} + \tau_\beta}. \tag{47}$$

Sada pažljivo postavljamo rekurzivne relacije koje vežu brojeve jezgara $\widetilde{\mathcal{N}}_k$ i $\mathcal{N}_k$ na kraju aktivacijske faze s brojevima jezgara $\widetilde{N}_k$ i N_k na kraju relaksacijske faze:

$$\mathcal{N}_k = \frac{\mathsf{N}_0\tau_\beta - (\widetilde{N}_{k-1}\tau_\beta - N_{k-1}\tau_\mathrm{n})e^{-T_\mathrm{n}/\tau_{\mathrm{n}\beta}}}{\tau_\mathrm{n} + \tau_\beta}, \tag{48}$$

$$\widetilde{\mathcal{N}}_k = \frac{\mathsf{N}_0\tau_\mathrm{n} + (\widetilde{N}_{k-1}\tau_\beta - N_{k-1}\tau_\mathrm{n})e^{-T_\mathrm{n}/\tau_{\mathrm{n}\beta}}}{\tau_\mathrm{n} + \tau_\beta}, \tag{49}$$

$$N_k = \mathcal{N}_k e^{-T_\beta/\tau_\beta}, \tag{50}$$

$$\widetilde{N}_k = \widetilde{\mathcal{N}}_k + (\mathcal{N}_k - N_k). \tag{51}$$

Relevantni početni uvjeti su $\widetilde{N}_0 = \mathsf{N}_0$ i $N_0 = 0$. Strpljivom manipulacijom gornjih izraza (uz uvijek uputno uvođenje pomoćnih pokrata za složene članove kako bi račun bio jednostavniji), tražimo razvezanu rekurziju za $\mathcal{N}_k$ jer je aktivnost uzorka uzrokovana samo β-radioaktivnim jezgrama. Uvođenjem sljedećih pokrata tražena rekurzija poprima oblik:

$$\left.\begin{aligned} a &\equiv \frac{\tau_\beta \mathsf{N}_0}{\tau_\mathrm{n}+\tau_\beta}\left(1-e^{-T_\mathrm{n}/\tau_{\mathrm{n}\beta}}\right) \\ b &\equiv e^{-(T_\mathrm{n}/\tau_{\mathrm{n}\beta}+T_\beta/\tau_\beta)} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}_k = a + b\mathcal{N}_{k-1}, \tag{52}$$

s kakvim smo se već susreli. Ponovnim naslućivanjem rješenja iz prvih nekoliko članova ili izravnim korištenjem ranijeg rezultata nalazimo:

$$\mathcal{N}_k = a\sum_{i=0}^{k-1} b^i = a\frac{1-b^k}{1-b}. \tag{53}$$

Konačno, u limesu $k \to \infty$ imamo $\mathcal{N}_\infty = a/(1-b)$ te $N_\infty = \mathcal{N}_\infty e^{-T_\beta/\tau_\beta}$, što se nakon raspisa svodi na:

$$\mathcal{N}_\infty = \frac{\tau_\beta \mathsf{N}_0}{\tau_\mathrm{n}+\tau_\beta}\frac{\sinh(T_\mathrm{n}/2\tau_{\mathrm{n}\beta})}{\sinh[(T_\mathrm{n}/\tau_{\mathrm{n}\beta}+T_\beta/\tau_\beta)/2]}\, e^{T_\beta/2\tau_\beta}, \tag{54}$$

$$N_\infty = \frac{\tau_\beta \mathsf{N}_0}{\tau_\mathrm{n}+\tau_\beta}\frac{\sinh(T_\mathrm{n}/2\tau_{\mathrm{n}\beta})}{\sinh[(T_\mathrm{n}/\tau_{\mathrm{n}\beta}+T_\beta/\tau_\beta)/2]}\, e^{-T_\beta/2\tau_\beta}. \tag{55}$$

Zaključujemo da aktivnost uzorka nakon dovoljno dugo vremena oscilira između N_∞/τ_β i $\mathcal{N}_\infty/\tau_\beta$. Iz analize člana b^k vidimo da se ovaj put asimptotski režim uspostavlja nakon $k_5 = 5/(T_\mathrm{n}/\tau_{\mathrm{n}\beta}+T_\beta/\tau_\beta)$ aktivacijsko-relaksacijskih perioda, odnosno nakon proteklog vremena $t = k_5(T_\mathrm{n}+T_\beta)$.

Ludi nuklearac emocionalno je ispražnjen. No dokle će to potrajati?

Literatura

[1] Petar Žugec, *Ludi nuklearac*, Matematičko fizički list Vol. **69** No. **273** (2018), 31–32 [`https://hrcak.srce.hr/221296`]

[2] [`https://en.wikipedia.org/wiki/Recurrence_relation`]

[3] [`https://ntof-exp.web.cern.ch/`]

[4] [`https://en.wikipedia.org/wiki/Method_of_undetermined_coefficients`]

[5] [`https://en.wikipedia.org/wiki/Variation_of_parameters`]