Igre gladi

Petar Žugec[1]

Problem

Ako ste bili u prilici gledati film *Igre gladi: Plamen* (eng. *Hunger games: Catching fire*), drugi dio filmskog serijala snimljenog prema istoimenoj trilogiji romana autorice Suzanne Collins, možda vam se ukazalo zanimljivo i ne sasvim trivijalno kombinatorno pitanje, na koje ćemo pokušati odgovoriti u ovom prilogu. No idemo redom...

Znanstvenofantastični serijal *Igre gladi* opisuje antiutopijsku budućnost u kojoj se jednom godišnje održavaju tzv. Igre gladi – borba 24 mladih ljudi iz 12 pokrajina, među kojima su jedan mladić i jedna djevojka iz svake pokrajine. Pri tome iz svake borbe izlazi samo jedan pobjednik (do na jednu očitu iznimku koja je upravo predmet radnje serijala). Drugi dio serijala uvodi dodatni zaplet: na 75. Igrama gladi mogu sudjelovati samo pobjednici prethodnih Igara, s time da pravila sudjelovanja ostaju istima: ponovno mora sudjelovati 24 ljudi, i to po jedan muškarac i jedna žena iz svake od 12 pokrajina. Ono što prvo plijeni pažnju je da je sada broj kandidata vrlo ograničen, s obzirom da u obzir dolaze samo živući pobjednici prethodnih Igara. Pitanje koje se sada nameće jest: koliko je zapravo vjerojatno da ćemo u vrlo ograničenom uzorku ljudi naći toliko heterogenu skupinu koja doista pokriva 24 distinktne kategorije?

Reformulirajmo pitanje na konkretnom primjeru. Zamislimo da imamo 24 kandidata na raspolaganju, upravo onoliko koliko je kategorija. Pri tome pod kategorijom smatramo kombinaciju pokrajine i spola sudionika. Na primjer, žena iz 1. pokrajine je prva kategorija, muškarac iz 12. pokrajine je posljednja kategorija. Intuicija nam nalaže da će *u prosjeku* svi kandidati pripadati različitim kategorijama. No sagledamo li moguće raspodjele po kategorijama (uz pretpostavku da je pripadnost kategorijama slučajna), broj mogućnosti da 24 kandidata raspodijelimo u sve 24 kategorije daleko je manji od ukupnog broja svih mogućih raspodjela, među kojima neke kategorije ostaju nepopunjene. Vodeći se prvenstveno time kako je radnja predstavljena u filmskoj adaptaciji i ne ulazeći u diskusiju opravdavaju li izvorni romani heterogenost skupine kandidata, odnosno je li ona slučajna ili ne (na kraju krajeva, već i sami filmovi sugeriraju da pobjednički ishod nije sasvim slučajan, s obzirom da voditelji Igara uvelike manipuliraju njima), postavljamo si sljedeći zadatak: izračunati točan broj kombinacija na koje je moguće raspodijeliti kandidate u sve 24 kategorije, spram ukupnog broja svih mogućih raspodjela, a uz pretpostavku da je raspodjela kandidata po kategorijama sasvim *slučajna* i *uniformna*. Drugim riječima, osnovna pretpostavka koja čini pitanje zanimljivim i izazovnim – umjesto da ga odmah diskvalificira narativnim objašnjenjem – jest da pobjede pojedinih kandidata u prethodnim Igrama možemo smatrati slučajnim, a ne uvjetovanim vanjskim determinističkim faktorima (poput manipulacija voditelja Igara).

Rješenje

Problem ćemo riješiti za općenit broj kategorija k (koji ćemo kasnije postaviti na $k = 24$) te općenit broj kandidata K. Očito, mora biti $K \geqslant k$ da bi problem imao smisla. Vrijednosti od K koje će se pokazati posebno zanimljivima su:

[1] Autor je s Fizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu;
e-pošta `pzugec@phy.hr`

- $K = 24$. Ovo je slučaj minimalnog broja kandidata za dani broj kategorija. Poučan je jer će pokazati koliko intuitivno rasuđivanje na temelju prosječne raspodjele kandidata zapravo odražava ili ne stvarnu vjerojatnost pojave prosječne raspodjele.
- $K = 59$. Sudeći prema podacima koji se mogu pronaći na internetu, ukupan broj kandidata za 75. Igre gladi (odnosno, živućih pobjednika prethodnih Igara) iznosi 59. Dakle, ovaj rezultat dat će nam odgovor na pitanje koje smo postavili u kontekstu filma.
- $K = 74$. Ovo će biti "najsvjetliji" scenarij koji će nam dati gornju granicu (unutar parametara priče) na vjerojatnost nalaženja dovoljno heterogene skupine kandidata u slučaju da su kandidati pobjednici svih 74 prethodnih Igara. (Zanemarujemo činjenicu da je iz posljednjih Igara izašlo dvoje pobjednika, s obzirom da su izašli korelirano, tj. nisu nezavisni pobjednici, već su "slučajni" kao čitav par.)

Riješimo prvo jednostavniji od ova dva problema: koliki je ukupan broj N mogućnosti da K kandidata raspodijelimo između k kategorija? Pri tome kandidate smatramo raspoznatljivima jer ih sve možemo označiti godinom, odnosno rednim brojem Igara iz kojih su izašli kao pobjednici. U sklopu takvog prebrojavanja rješenje je vrlo jednostavno:

$$N = k^K \tag{1}$$

jer je svake od K prethodnih godina bilo koji od k sudionika Igara mogao izaći kao pobjednik (prve godine bilo je k mogućnosti; druge dodatnih k, što je ukupno k^2 mogućnosti u kombinaciji s prvom godinom, i tako dalje).

Drugi dio problema – koliki je broj mogućnosti n da se u svakoj od k kategorija nađe barem po jedan od K kandidata – nije toliko trivijalan. Za rješenje ovog problema oslonit ću se na izvrstan članak iz jednog od ranijih brojeva MFL-a [1] – koji svakako preporučam čitatelju – u kojem je odgovor na prethodno pitanje razrađen u detalje, i na apstraktnijoj razini i uz vrlo ilustrativne i matematički putpuno ekvivalentne primjere raspodjele knjiga po policama, predmeta po kutijama i slično. Osnovna ideja je primjena komplementarnog pristupa: broj mogućnosti da se u svakoj kategoriji nađe barem jedan kandidat izraziti preko razlike broja svih mogućnosti i broja mogućnosti da barem jedna kategorija ostane nepopunjena. Broj svih mogućih raspodjela kandidata već nam je poznat iz (1). Stoga preostaje odrediti broj mogućnosti da između k kategorija ostavimo praznom jednu, dvije, tri, itd. Od k kategorija, njih ℓ koje ćemo ostaviti praznima možemo izabrati na $\binom{k}{\ell}$ načina. Za svaki takav izbor K kandidata možemo raspodijeliti između preostalih $k-\ell$ kategorija na $(k-\ell)^K$ načina. Prema tome, ukupno je $\binom{k}{\ell}(k-\ell)^K$ načina za ostaviti (barem) ℓ kategorija nepopunjenima, odnosno za raspodjelu kandidata između (najviše) $k-\ell$ kategorija. Međutim, primijetimo sljedeće: recimo da smo odlučili ne popuniti ciljanih ℓ kategorija. Između svih preostalih raspodjela, uvijek će se naći takve među kojima će dodatne kategorije biti nepopunjene. Npr. jedna od uvijek dostupnih raspodjela je popuniti jednu jedinu kategoriju svim kandidatima, pri čemu sve ostale ostaju prazne. Stoga zaključujemo da se prethodno navedenih $\binom{k}{\ell}(k-\ell)^K$ mogućnosti doista odnosi na popunjenje *najviše* $k-\ell$ kategorija, a ne točno toliko njih. Stoga moramo uzeti u obzir da smo prebrojavanjem mogućnosti da *barem* ℓ kategorija ostavimo praznima već djelomično obuhvatili i mogućnosti za više od ℓ nepopunjenih. Ponovno, upućujem čitatelja na članak [1] u kojem je izveden izraz koji pravilno provodi korekciju prebrojavanja te za krajnje rješenje – ukupan broj mogućnosti n da svaku kategoriju popunimo barem jednim kandidatom – daje rezultat

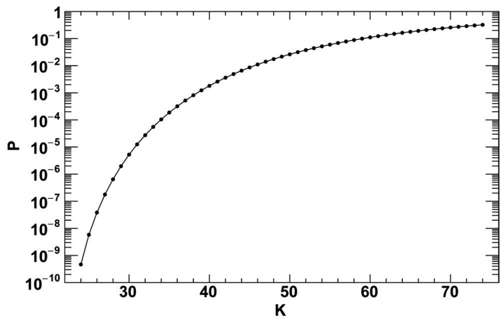
$$n = \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^\ell \binom{k}{\ell} (k-\ell)^K. \tag{2}$$

Primijetimo da je član $(-1)^\ell$ pod sumom upravo taj netrivijalan faktor koji je odgovoran za korekciju prebrojavanja. U konačnici, tražena vjerojatnost P da K kandidata doista budu raspodijeljeni između svih k kategorija – ako je raspodjela pobjednika prethodnih Igara *slučajna* i *uniformna* – jednaka je

$$P = \frac{n}{N}. \tag{3}$$

Priložena tablica ispisuje vrijednosti od n, N i P, za nekoliko različitih brojeva kandidata koracima od $\Delta K = 5$, počevši od minimalnog potrebnog $K = 24$, do – unutar konteksta priče – maksimalnog $K = 74$. Među ispisanim vrijednostima nalazimo i onu za $K = 59$, koliko je ukupno kandidata podvrgnuto izboru za 75. Igre gladi. Vidimo da je u tom slučaju tražena vjerojatnost gotovo 10 %, što je odgovor na problem s početka teksta.

K	*n*	*N*	*P*
24	$6.20 \cdot 10^{23}$	$1.33 \cdot 10^{33}$	$4.65 \cdot 10^{-10}$
29	$2.09 \cdot 10^{34}$	$1.06 \cdot 10^{40}$	$1.97 \cdot 10^{-6}$
34	$8.83 \cdot 10^{42}$	$8.46 \cdot 10^{46}$	$1.04 \cdot 10^{-4}$
39	$8.29 \cdot 10^{50}$	$6.73 \cdot 10^{53}$	$1.23 \cdot 10^{-3}$
44	$3.52 \cdot 10^{58}$	$5.36 \cdot 10^{60}$	$6.57 \cdot 10^{-3}$
49	$9.22 \cdot 10^{65}$	$4.27 \cdot 10^{67}$	$2.16 \cdot 10^{-2}$
54	$1.76 \cdot 10^{73}$	$3.40 \cdot 10^{74}$	$5.17 \cdot 10^{-2}$
59	$\mathbf{2.69 \cdot 10^{80}}$	$\mathbf{2.71 \cdot 10^{81}}$	$\mathbf{9.94 \cdot 10^{-2}}$
64	$3.52 \cdot 10^{87}$	$2.16 \cdot 10^{88}$	$1.63 \cdot 10^{-1}$
69	$4.11 \cdot 10^{94}$	$1.72 \cdot 10^{95}$	$2.39 \cdot 10^{-1}$
74	$4.40 \cdot 10^{101}$	$1.37 \cdot 10^{102}$	$3.22 \cdot 10^{-1}$



Priloženi graf iscrtava raspon vjerojatnosti P između minimalnog potrebnog $(K = 24)$ i maksimalnog razmatranog $(K = 74)$ broja kandidata. Kao što vidimo i iz tablice i s grafa, vjerojatnost za maksimalno heterogenu raspodjelu 24 kandidata između jednako toliko kategorija je ugrubo $5 \cdot 10^{-10}$, što je krajnje nevjerojatno. Drugim riječima, morali bismo slučajno birati 24-rku kandidata otprilike $1/P \approx 2 \cdot 10^9$, odnosno dvije milijarde puta da bismo ih u prosjeku jednom našli raspodijeljene kroz sve 24 kategorije! S druge strane, vjerojatnost od $P \approx 1/3$ u slučaju $K = 74$ sasvim je razumna, jer možemo očekivati da bismo u svega 3 slučajna izbora 74-rke kandidata našli dovoljno heterogenu raspodjelu. U slučaju $K = 59$, kad vjerojatnost iznosi $P \approx 10$ %, potrebno je 10 slučajnih izbora 59-rke kandidata. Navedimo još da su minimalni brojevi kandidata potrebni da bi vjerojatnost P iznosila barem 1 %, 50 % ili 99 % redom: 46, 85 i 183.

Još samo završni komentar o pretpostavci uniformonsti raspodjele kandidata po kategorijama. Primijetimo da ako je pobjeda u Igrama doista slučajan proces, tada upravo uniforma raspodjela pobjednika po kategorijama maksimizira vjerojatnost da među K-torkom kandidata nađemo heterogenu skupinu. Naime, kad bi pobjeda igrača iz ijedne kategorije bila vjerojatnija od pobjede onih iz bilo koje druge, tada bismo pri pokušaju sastavljanja heterogene skupine teže popunili onu kategoriju kojoj nedostaje kandidata za izbor. Ekstreman primjer je slučaj kad igrači iz barem jedne kategorije imaju toliko malu vjerojatnost pobjede da uopće nemamo na raspolaganju ijednog pobjednika iz iste kategrije. Tada bi, naravno, bilo potpuno nemoguće sastaviti grupu koja sadrži članove svih kategorija. A već prvi film iz serijala jasno uspostavlja da kandidati iz 1. i 2. pokrajine češće pobjeđuju na Igrama jer pohađaju posebnu borbenu akademiju. . .

Literatura

[1] PETAR VRANJKOVIĆ, *Razdioba različitih predmeta u različite kutije*, MFL LVII-1/ 225, 2006.