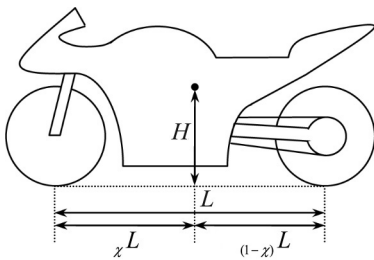


## Nagib u vožnji – 2. dio

Petar Žugec<sup>14</sup>

Ovaj prilog izravno se nastavlja na prvi dio iz ranijeg broja Matematičko-fizičkog lista<sup>15</sup> te upućujemo čitatelja da ga ima pri ruci kao osnovu za praćenje ovog dijela. Posebice stoga jer ćemo se tijekom rasprave nesmetano pozivati na niz jednadžbi i slika iz prvoga dijela, čije oznake radi prepoznatljivosti počinju slovom A; npr. jednadžba (A.1). Nasuprot tome, oznake svih jednadžbi i slika iz ovoga dijela počinju slovom B, poput slike B.1.

### Potpuniji model motocikla

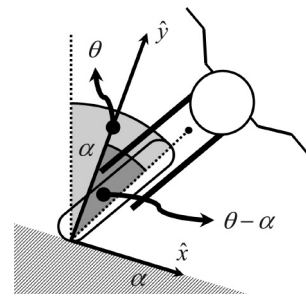


Slika B.1

različitih temperatura guma uzrokovanih različitim stupnjem naprezanja, itd.

Ovako poopćena geometrija motocikla u bitnim je elementima prikazana na slici B.1. Bitni novouvedeni parametri su udaljenost  $L$  dodirnih točaka guma s tлом te uzdužni odmak  $\chi L$  zajedničkog centra mase motocikla i vozača od prednje dodirne točke ( $0 < \chi < 1$ ). Odmak  $H$  centra mase od uporišne osi već smo uveli pri izračunu komponente  $M_z$  iz (A.2).

Uvedena trodimenzionalnost omogućuje nam provesti puni vektorski račun momenata sila, od kojeg smo se do sada zadržali samo na komponenti  $M_z$ , odgovornoj za stabilnost ili prevrtanje motocikla oko uporišne osi. U tu svrhu postavimo koordinatni sustav kao na slici B.2:  $x$ -os neka leži duž površine ceste, ali je uvijek usmjerena prema unutrašnjosti zavoja;  $y$ -os neka je okomita na površinu ceste, a  $z$ -os neka gleda u smjeru gibanja motocikla. Preciznije,  $z$ -os također leži u ravnini ceste, okomita je na  $x$ -os te zajedno s preostalim dvjema razapinje desni koordinatni sustav (stoga gleda van slike B.2, prema čitatelju). Osim što će uz ovako postavljene osi račun



Slika B.2

<sup>14</sup> Autor je docent Fizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: pzugec@phy.hr

<sup>15</sup> P. Žugec, *Nagib u vožnji – 1. dio*, MFL LXIX-3/ 275 (2019.). U prvome dijelu potkrala se greška u zapisu izraza (A.19). Ovdje navodimo pravilan oblik:

$$v_{\min}^+(\mu = 0) \leq v_0 \leq v_{\max}^+(\mu = 0)$$

$$\theta_{\min}^+(\mu = 0) \leq \theta_0 \leq \theta_{\max}^+(\mu = 0).$$

momenata sila biti najjednostavniji, svakoj pojedinoj osi odgovara jedan od prepoznatljivih oblika zakretanja motocikla:

$x$ -os  $\rightarrow$  os *podizanja* (na prednji/ stražnji kotač)

$y$ -os  $\rightarrow$  os *zanošenja* (pri proklizavanju jedne od guma)

$z$ -os  $\rightarrow$  os *prevrtanja* (ranije nazvana uporišnom osi)

Krenimo s računom. Prvo raspisujemo po vektorskim komponentama sve sile koje djeluju na motocikl:

$$\begin{aligned}\vec{G} &= mg(\sin \alpha \hat{x} - \cos \alpha \hat{y}) \\ \vec{F}_{cf} &= \frac{mv^2}{R}(-\cos \alpha \hat{x} - \sin \alpha \hat{y}) \\ \vec{N}^{(i)} &= N^{(i)}\hat{y} \\ \vec{F}_{tr}^{(i)} &= \mu_{eff}^{(i)}N^{(i)}\hat{x}.\end{aligned}\tag{B.1}$$

Kao što vidimo, u ovakvom sustavu je usmjerenje dviju reakcija podloga i dvaju trenja trivijalno ( $i = 1, 2$ : 1 za prednju, 2 za stražnju gumu). Uvjet ravnoteže sila, raspisan po komponentama, ovaj put vodi na:

$$\begin{aligned}\frac{mv^2}{R} \cos \alpha - mg \sin \alpha &= \mu_{eff}^{(1)}N^{(1)} + \mu_{eff}^{(2)}N^{(2)} \\ \frac{mv^2}{R} \sin \alpha + mg \cos \alpha &= N^{(1)} + N^{(2)}.\end{aligned}\tag{B.2}$$

Da bismo ovaj skup jednadžbi izravno usporedili s ranijim iz (A.7), treba ga riješiti po članu težine i centrifuge, ili sile treba raspisati u koordinatnom sustavu nevezanom za cestu (baš kao i ranije), kako bismo došli do ekvivalentnog sustava:

$$\begin{aligned}\frac{mv^2}{R} &= (N^{(1)} + N^{(2)}) \sin \alpha + (\mu_{eff}^{(1)}N^{(1)} + \mu_{eff}^{(2)}N^{(2)}) \cos \alpha \\ mg &= (N^{(1)} + N^{(2)}) \cos \alpha - (\mu_{eff}^{(1)}N^{(1)} + \mu_{eff}^{(2)}N^{(2)}) \sin \alpha.\end{aligned}\tag{B.3}$$

Ovdje odmah možemo prepoznati ukupnu reakciju podloge kao:  $N = N^{(1)} + N^{(2)}$ . Međutim, uz pretpostavku nezavisnih trenja prednje i stražnje gume ( $\mu_{eff}^{(1)} \neq \mu_{eff}^{(2)}$ ) više ne možemo ukupno trenje  $F_{tr} = \mu_{eff}^{(1)}N^{(1)} + \mu_{eff}^{(2)}N^{(2)}$  jednostavno povezati s ukupnom reakcijom podloge ( $F_{tr} \neq \mu_{eff}N$ ), posredstvom nekog artifičijalnog, ali jedinstvenog  $\mu_{eff}$  koji bi bio funkcija samo od  $\mu_{eff}^{(1)}$  i  $\mu_{eff}^{(2)}$ . Stoga nam ove jednadžbe, kao rezultat ravnoteže sila, više nisu dovoljne za izraziti brzinu  $v$  kao u (A.8) – samo u ovisnosti o primijenjenom trenju, a bez upletanja reakcije podloge – jer se radi o dvjema jednadžbama s trima nepoznanicama:  $v$ ,  $N^{(1)}$  i  $N^{(2)}$ . Podatke koji nam nedostaju osigurati će nam upravo momenti sila, za koje nam je pored već raspisanih sila još potreban i raspis pripadnih krakova sila po komponentama. Ovaj put ćemo iz praktičnih razloga ishoditi se računom momenata postaviti u centar mase sustava. Odmah možemo predvidjeti da će uz takav izbor momenti težine i centrifuge iščeznuti zbog iščezavanja njihova kraka  $\vec{r}_0$ . Krakove koji povezuju centar mase s dodirnim točkama prednje i stražnje gume s tlom označit ćemo s  $\vec{r}_1$  i  $\vec{r}_2$  te im komponente lako možemo iščitati sa

slika B.1 i B.2:

$$\begin{aligned}\vec{r}_0 &= \vec{0} \\ \vec{r}_1 &= -H \sin(\theta - \alpha)\hat{x} - H \cos(\theta - \alpha)\hat{y} + \chi L\hat{z} \\ \vec{r}_2 &= -H \sin(\theta - \alpha)\hat{x} - H \cos(\theta - \alpha)\hat{y} - (1 - \chi)L\hat{z}.\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

U (B.1) i (B.4) imamo sve što nam je potrebno za izračun ukupnog momenta sile:

$$\vec{M}_{\text{uk}} = \vec{r}_0 \times (\vec{G} + \vec{F}_{\text{cf}}) + \vec{r}_1 \times (\vec{N}^{(1)} + \vec{F}_{\text{tr}}^{(1)}) + \vec{r}_2 \times (\vec{N}^{(2)} + \vec{F}_{\text{tr}}^{(2)}). \quad (\text{B.5})$$

Sve što trebamo je znati izračunati vektorski produkt za svaki pojedini doprinos:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (r_y F_z - r_z F_y)\hat{x} + (r_z F_x - r_x F_z)\hat{y} + (r_x F_y - r_y F_x)\hat{z}. \quad (\text{B.6})$$

Primjenom ovog pravila, za pojedine komponente ukupnog momenta preostaje:

$$(\vec{M}_{\text{uk}})_x = L[-\chi N^{(1)} + (1 - \chi)N^{(2)}] \quad (\text{B.7})$$

$$(\vec{M}_{\text{uk}})_y = L[\chi \mu_{\text{eff}}^{(1)} N^{(1)} - (1 - \chi) \mu_{\text{eff}}^{(2)} N^{(2)}] \quad (\text{B.8})$$

$$(\vec{M}_{\text{uk}})_z = H[(\mu_{\text{eff}}^{(1)} N^{(1)} + \mu_{\text{eff}}^{(2)} N^{(2)}) \cos(\theta - \alpha) - (N^{(1)} + N^{(2)}) \sin(\theta - \alpha)]. \quad (\text{B.9})$$

Krenimo redom u analizu uvjeta koji slijede iz zahtjeva održivosti stabilne kružne putanje:  $\vec{M}_{\text{uk}} = \vec{0}$ .

Iščezavanje  $x$ -komponente (B.7) vodi na:

$$\chi N^{(1)} = (1 - \chi)N^{(2)} \quad (\text{B.10})$$

što je uvjet na raspodjelu reakcija podloge između dviju guma, koja je u potpunosti određena položajem centra mase sustava. Ukupna reakcija podloge  $N = N^{(1)} + N^{(2)}$  zajedno s prethodnom jednadžbom čini sustav koji možemo riješiti po  $N^{(1)}$  i  $N^{(2)}$  kako bismo dobili izravan uvid u njihove doprinose ukupnoj reakciji podloge:  $N^{(1)} = (1 - \chi)N$  te  $N^{(2)} = \chi N$ .

Nadalje, iz uvjeta iščezavanja  $z$ -komponente (B.9) slijedi:

$$\tan(\theta - \alpha) = \frac{\mu_{\text{eff}}^{(1)} N^{(1)} + \mu_{\text{eff}}^{(2)} N^{(2)}}{N^{(1)} + N^{(2)}} = \frac{F_{\text{tr}}}{N} \quad (\text{B.11})$$

što je uvjet na kut nagiba, vrlo sličan (A.3). No je li dovoljno da je samo sličan? Kad bi bio samo sličan, ali različit od (A.3), ne bi li to bila kontradikcija, s obzirom da bismo tada imali dva različita uvjeta za jedan te isti kut  $\theta$ ? Vođeni ovim pitanjem možemo primijetiti da nam je veza brojnika i nazivnika s težinom i centrifugom već dostupna iz (B.2), stoga prethodnu relaciju možemo izraziti i kao:

$$\tan(\theta - \alpha) = \frac{\frac{mv^2}{R} \cos \alpha - mg \sin \alpha}{\frac{mv^2}{R} \sin \alpha + mg \cos \alpha} = \frac{\frac{F_{\text{cf}}}{G} - \tan \alpha}{\frac{F_{\text{cf}}}{G} \tan \alpha + 1} \stackrel{(\text{A.3})}{=} \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{\tan \theta \tan \alpha + 1} \quad (\text{B.12})$$

gdje smo na krajnjoj desnoj strani dobili trigonometrijski identitet za tangens razike kutova s krajnje lijeve strane! Drugim riječima, došli smo do samosuglasne relacije, što smo postigli korištenjem relacije (A.3) za koju znamo da uvijek vrijedi, neovisno o bočnom nagibu ceste. Prema tome, uvjet (B.11) sasvim je ekvivalentan ranijemu (A.3)! Činjenica da ovaj put nismo odmah došli do izraza (A.3) izravna je posljedica toga što smo između dvaju izvoda promijenili ishodište za račun momenata sila. Osim što smo

ovime potvrdili da do istih rezultata moramo doći sasvim neovisno o izboru koordinatnog sustava, gotovo smo nehotice dobili još jednu korisnu relaciju: dok izraz (A.3) izravno uspostavlja vezu između centrifuge i težine, izraz (B.11) izravno povezuje trenje s reakcijom podloge!

Konačno, iščezavanje  $y$ -komponente (B.8) ukupnog momenta sile vodi na:

$$\mu_{\text{eff}}^{(1)} \cdot \chi N^{(1)} = \mu_{\text{eff}}^{(2)} \cdot (1 - \chi) N^{(2)}. \quad (\text{B.13})$$

No iz (B.10) već znamo da članovi koji množe efektivne koeficijente trenja s obiju strana jednadžbe moraju biti jednaki! Stoga ih možemo pokratiti, za čime preostaje:

$$\mu_{\text{eff}}^{(1)} = \mu_{\text{eff}}^{(2)}. \quad (\text{B.14})$$

Ovo je sasvim nov i strašno bitan rezultat! Naime, on znači da u stabilnoj kružnoj putanji trenje obiju guma mora biti parametrizirano istim efektivnim koeficijentom trenja jer u *suprotnome dolazi do bočnog zanošenja motocikla* zbog proklizavanja one gume koja pruža manje trenje od potrebnog. Kako i  $\mu_{\text{eff}}^{(1)}$  i  $\mu_{\text{eff}}^{(2)}$  u stabilnom kruženju uvijek moraju biti jednaki, maksimalan održivi par njihovih vrijednosti određen je manjim od njihovih zasebnih maksimuma. Drugim riječima, maksimalna vrijednost koeficijenta trenja koja se može pojaviti u prethodnim jednadžbama određena je koeficijentom trenja “lošije” gume:

$$\mu = \min(\mu_1, \mu_2). \quad (\text{B.15})$$

Ako doista vrijedi  $\mu_1 \neq \mu_2$ , tada svi *raniji izvodi* – koje smo proveli uz pretpostavku jedinstvenog  $\mu$  obiju guma – *i dalje vrijede* uz usvajanje vrijednosti iz (B.15)!

\*\*\*

Tek sada, nakon spoznaje iz (B.14), vidimo da i u slučaju odvojenog tretmana dviju guma ukupno trenje u *stabilnom kruženju* ipak možemo povezati s ukupnom reakcijom podloge:  $F_{\text{tr}} = \mu_{\text{eff}} N$ , jer je  $\mu_{\text{eff}}$  jednak za obje gume:  $\mu_{\text{eff}} = \mu_{\text{eff}}^{(1)} = \mu_{\text{eff}}^{(2)}$ . Prva posljedica je da sustav jednadžbi (B.3) odmah postaje jednak ranijemu (A.7), čime su se izgubile komplikacije koje su se privremeno pojavile odvojenim tretmanom dviju guma. Druga posljedica je da upravo zbog toga sam uvjet ravnoteže sila postaje nedovoljan za identifikaciju pojedinih doprinosa  $N^{(1)}$  i  $N^{(2)}$  ukupnoj reakciji podloge. Naime, za  $\mu_{\text{eff}}^{(1)} = \mu_{\text{eff}}^{(2)}$  sustav (B.2), odnosno (B.3) daje jedinstveno rješenje za ukupnu reakciju podloge  $N$ , no ne i za njezin rastav po doprinosima prednje i stražnje gume:  $N = N^{(1)} + N^{(2)}$ . Za to nam je bio potreban račun momenata sila, koji je uspješno polučio (B.10). Posebno je zanimljivo na koji način se pojava ove neodređenosti ostvaruje u rješenjima za  $N^{(1)}$  i  $N^{(2)}$  naivno izvedenima iz (B.2)/(B.3) pod pretpostavkom  $\mu_{\text{eff}}^{(1)} \neq \mu_{\text{eff}}^{(2)}$ :

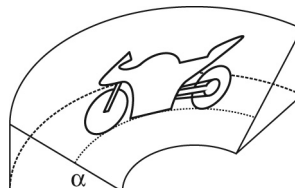
$$N^{(1,2)} = \pm \frac{(F_{\text{cf}} \cos \alpha - G \sin \alpha) - \mu_{\text{eff}}^{(2,1)} (F_{\text{cf}} \sin \alpha + G \cos \alpha)}{\mu_{\text{eff}}^{(1)} - \mu_{\text{eff}}^{(2)}}. \quad (\text{B.16})$$

Uvrštavanjem  $\mu_{\text{eff}}^{(1)} = \mu_{\text{eff}}^{(2)}$  u ovo “općenitije” rješenje naivno bismo mogli zaključiti da svaka od dviju reakcija podloge divergira, iako na kontroliran način tako da je njihov zbroj i dalje konačan i određen polaznom jednadžbom iz (B.2):  $N^{(1)} + N^{(2)} = F_{\text{cf}} \sin \alpha + G \cos \alpha$ . No dijeljenje nulom ovdje poprima svoje pravo značenje te ne signalizira neograničen rast, već *neodređenost* izraza! Međutim, što ako nazivnik pokušamo poslati u nulu na kontinuiran način, postupnim prijelazom  $\mu_{\text{eff}}^{(1)} \neq \mu_{\text{eff}}^{(2)} \rightarrow \mu_{\text{eff}}^{(1)} = \mu_{\text{eff}}^{(2)}$ ? Ne bi li oba izraza ipak trebala divergirati u smislu granične vrijednosti, s obzirom da se u brojniku ne pojavljuje ništa što bi kompenziralo

nulu iz nazivnika? Odgovor je *ne*, zato jer dva izraza obuhvaćena kompaktnom notacijom iz (B.16) uopće ne vrijede za  $\mu_{\text{eff}}^{(1)} \neq \mu_{\text{eff}}^{(2)}$ ! Naime, već znamo da je  $\mu_{\text{eff}}^{(1)} = \mu_{\text{eff}}^{(2)}$  nužan uvjet stabilne kružne putanje. Čim je ova jednakost narušena, motocikl je u bočnom proklizavanju te se u jednadžbama (B.2)/(B.3) mora uključiti dodatan član bočne akceleracije, kao rezultat djelovanja neuravnoteženih sila. Drugim riječima, tek sada vidimo da za  $\mu_{\text{eff}}^{(1)} \neq \mu_{\text{eff}}^{(2)}$  jednadžbe (B.2)/(B.3) uopće ne vrijede pa izrazi iz (B.16) ne mogu biti njihova rješenja. Stoga se kontinuiran prijelaz, koji bi doveo do paradoksa, ne može napraviti!

\*\*\*

Pažljivi čitatelj mogao je primijetiti da na cesti bočnog nagiba različitog od nule ( $\alpha \neq 0$ ) dvije reakcije podloge  $\vec{N}^{(1)}$  i  $\vec{N}^{(2)}$  niti dvije sile trenja  $\vec{F}_{\text{tr}}^{(1)}$  i  $\vec{F}_{\text{tr}}^{(2)}$  nisu strogo paralelne, kao što smo ih postavili u (B.1). Slika B.3 vrlo grubom skicom daje uvid u trodimenzionalnost putanje na cesti s bočnim nagibom, odakle se može naslutiti da su reakcije podloge – koje su uvijek okomite na cestu – usmjerene prema središtu (za  $\alpha > 0$ ) ili od središta (za  $\alpha < 0$ ) zakrivljenosti zavoja. Drugim riječima, nisu sasvim paralelne, već imaju *radijalnu* komponentu. Iako smo to mogli uzeti u obzir, u realnoj situaciji kad je radijus putanje mnogo veći od uzdužnih dimenzija motocikla ( $L \ll R$ ), dobit takvog tretmana neisplativa je u usporedbi s povećanom složenosti računa, u sklopu kojeg bismo morali uzeti u obzir barem i sljedeće:



Slika B.3

- Čak i da se oba kotača gibaju putanjom istog radijusa  $R$ , centar mase motocikla i vozača giba se putanjom različitog (manjeg) radijusa jer je nagnut prema unutrašnjosti zavoja.
- Ako se centar mase ne nalazi točno na polovici uzdužnog profila motocikla ( $\chi \neq 0.5$ ), kutni odmak između centra mase i dviju dodirnih točaka s tlom (gledano iz središta zakrivljenosti zavoja) postaje netrivialan.
- Smjer dviju sila trenja sasvim je netrivialan. Naime, dok na cesti stalnog radijusa zakrivljenosti reakcije podloge osim vertikalne imaju još i radijalnu komponentu (koja je okomita na putanju), sile trenja imaju i posljednju, tzv. *azimutalnu* komponentu (koja je tangencijalna na putanju). Ova komponenta nema nikakve veze s trenjem kotrljanja, već je dio bočnog trenja zaduženog za održavanje motocikla u kružnoj putanji, a javlja se iz čisto geometrijskih razloga, zbog netrivialne trodimenzionalne geometrije ceste i motocikla. Pojavu azimutalne komponente lako je dokazati – sve što treba znati je da trenje uvijek gleda u suprotnom smjeru od gibanja onog dijela tijela koje se tare, odnosno potencijalnog gibanja ako je ono onemogućeno trenjem (ovdje se očito ne radi o smjeru gibanja cjelokupnog motocikla, nego tendenciji bočnog proklizavanja zbog centrifuge, kojem se trenje odupire). Ako je spojnica dviju dodirnih točaka s tlom duljine  $L$  (slika B.1), a kotači se gibaju putanjom radijusa  $R$ , tada – gledana iz središta zakrivljenosti putanje – spojnica zatvara neki kut  $\phi$ , takav da:  $L = 2R \sin(\phi/2)$ . Kad trenje ne bi imalo azimutalnu komponentu (u smjeru prirasta kuta  $\phi$ ), tada bi nakon bočnog proklizavanja na putanju nekog novog radijusa  $R'$  spojnica morala zatvarati isti kut  $\phi$  (jer je gibanje guma moralo biti u smjeru trenja), što znači da bi se udaljenost dodirnih točaka guma s tlom morala promijeniti:  $L' = 2R' \sin(\phi/2)$ . Drugim riječima, motocikl bi se morao (ra)stegnuti, čime smo

došli do kontradikcije. Stoga zaključujemo da pri bočnom pomaku trenje mora imati azimutalnu komponentu.

- Korekcija kuta nagiba, detaljno obrađena u sljedećem odlomku.

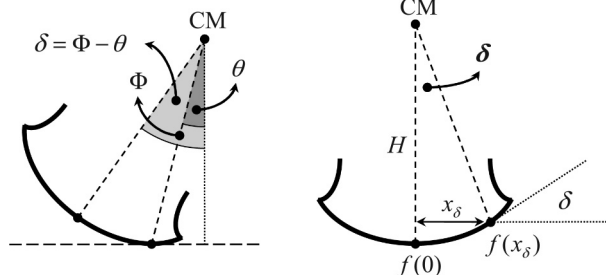
Svi ovi efekti mogu se egzaktno izračunati, pri čemu se od velike koristi pokazuje cilindrični koordinatni sustav. Međutim, sve ove komplikacije nestaju unutar vrlo opravdane aproksimacije  $L \ll R$ , pod kojom smo proveli sve prethodne račune.

## Korekcija kuta nagiba

Još sa slike A.1, a posebno sa slike A.3 mogli smo primijetiti da kut  $\theta$ , koji je relevantan za račun momenata sile, samo približno odgovara kutu nagiba motocikla. Naime, stvarni nagib određen je spojnicom centra mase i *vrha gume*. Međutim, naginjanjem dolazi do *promjene dodirne točke* s tlom, zbog konačnih dimenzija i oblika gume. Prema tome, stvarni kut nagiba  $\Phi$  različit je od do sada korištenog  $\theta$ :

$$\Phi = \theta + \delta. \quad (\text{B.17})$$

Pri tome korekcijski član  $\delta$  ovisi o detaljnoj geometriji gume (njezinom obliku i dimenzijama, a putem toga i o samom kutu nagiba<sup>16</sup>), stoga smo do sada kut  $\theta$  radi jednostavnosti smatrali kutom nagiba motocikla ( $\theta \approx \Phi$ ). No treba primijetiti da je korekcija  $\delta$  najizraženija upravo za  $\theta_{\min}$  ili  $\theta_{\max}$  kojima smo formulirali uvjete stabilnosti, jer je  $\delta$  tim izraženiji čim više nagib motocikla odstupa od okomice na cestu (tj. čim je  $\theta$  različitiji od  $\alpha$ ). Isto vrijedi i za odmak centra mase od uporišne osi iz jednadžbi (A.2) i (B.9), koji je u nagibu samo približno jednak visini  $H$  centra mase uspravnog motocikla sa slike B.1. No ova aproksimacija nije nimalo utjecala na konačne rezultate, jer su neovisni o  $H$ .



Slika B.4

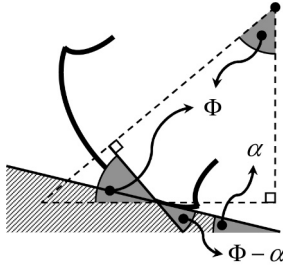
Slika B.4 prikazuje primjer bočnog profila gume i načina na koji dolazi do promjene dodirne točke s tlom. Lijevi dio slike ilustrira razliku između kutova  $\theta$  i  $\Phi$ , dok desni dio radi jasnoće prikazuje relevantne geometrijske parametre na uspravljenoj shemi. Osnovna pretpostavka ove geometrije je da se vozač u zavoju samo naginje tijelom niti se pomiče na sjedalu, tako da centar

*mase ostaje u istom relativnom položaju kao i kad je motocikl uspravan.*

Bočni profil proizvoljne gume, naravno, ne možemo opisati jednim brojem, već nam je potrebna čitava funkcija  $f(x)$ , uz  $x$  kao bočni odmak (duž osi aksijalne simetrije gume) od ravnine zrcalne simetrije kotača. Pri tome funkcija  $f$  treba imati lokalni minimum (“dno”), odnosno treba biti *konveksna*, za potrebe pojednostavnjenja skorašnjeg računa. Funkcija je konveksna u onome dijelu u kojem je druga derivacija

<sup>16</sup> Unaprijed primijetimo da za  $\alpha > 0$  korekcija  $\delta$  može biti i negativna ako  $\theta < \alpha$ , odnosno  $\Phi < \alpha$ . Bilo da je izrazimo kao funkciju stvarnog kuta nagiba  $\delta(\Phi)$  bilo kao funkciju nagiba relevantnog za račun momenata sila  $\delta(\theta)$ , uvijek vrijedi:  $\delta(\alpha) = 0$ . Drugim riječima, kutovi  $\Phi$  i  $\theta$  se poklapaju kad je motocikl okomit na površinu ceste.

pozitivna:  $d^2f(x)/dx^2 > 0$ , što se za naše potrebe<sup>17</sup> svodi na zahtjev da je  $f(x)$  rastuća za pozitivne  $x$ , a padajuća za negativne  $x$ .



Slika B.5

Kao što vidimo sa slike B.4, problem se svodi na nalaženje koordinate  $x_\delta$  dodirne točke gume s tloštem. Nalazimo je iz uvjeta da tangenta (tj. čitava dodirna površina) gume u toj točki mora biti paralelna s tloštem. Ovdje će nam od nezaobilazne pomoći biti derivacija  $F$  funkcije  $f$ :

$$F(x) \equiv \frac{df(x)}{dx} \quad (\text{B.18})$$

jer derivacija geometrijski odgovara koeficijentu smjera, tj. *tangensu kuta nagiba tangente* u odabranoj točki. Na ravnoj cesti motocikl će se nagnuti za kut  $\Phi$  upravo kad se (u sustavu vezanom za gumu) tangenta dodirne površine zakrene za  $\Phi$ . Na cesti bočnog nagiba  $\alpha$  tangenta je nezakrenuta kad je motocikl okomit na cestu, tako da je njezin kut zakretanja relativan s obzirom na površinu ceste. Stoga je za motocikl u nagibu  $\Phi$ , tangenta dodirne površine *u sutavu gume* zakrenuta za  $\Phi - \alpha$ . Za slučaj ovaj argument nije očit, slika B.5 prikazuje skicu geometrije kojom se može doći do istog zaključka. U svakom slučaju, koordinata  $x_\delta$  dodirne točke određena je kao:

$$F(x_\delta) = \tan(\Phi - \alpha) \implies x_\delta = F^{-1}[\tan(\Phi - \alpha)] \quad (\text{B.19})$$

pri čemu  $F^{-1}$  označava *inverzu funkcije*  $F$ . S druge strane, putem pravokutnog trokuta s desne skice sa slike B.4 veličinu  $x_\delta$  možemo dovesti u izravnu vezu s kutnom korekcijom  $\delta$ :

$$\tan \delta = \frac{x_\delta}{H - [f(x_\delta) - f(0)]}. \quad (\text{B.20})$$

Eksplicitnim raspisom svih članova po  $\Phi$ :

$$\tan(\Phi - \theta) = \frac{F^{-1}[\tan(\Phi - \alpha)]}{H + f(0) - f\{F^{-1}[\tan(\Phi - \alpha)]\}} \quad (\text{B.21})$$

preostaje jednačba koju treba – bilo analitički bilo numerički – riješiti po  $\Phi$  (u ovisnosti o  $\alpha$  i  $\theta$ ) u svrhu nalaženja stvarnog kuta nagiba. Uvođenje zamjenskih članova  $\Omega_\alpha$  i  $\omega_\alpha$ :

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_\alpha \equiv \Phi - \alpha \\ \omega_\alpha \equiv \theta - \alpha \end{array} \right\} \implies \tan(\Omega_\alpha - \omega_\alpha) = \frac{F^{-1}[\tan(\Omega_\alpha)]}{H + f(0) - f\{F^{-1}[\tan(\Omega_\alpha)]\}} \quad (\text{B.22})$$

olakšava nam uvid u činjenicu da jednačbu ne treba rješavati iznova za svaki pojedini  $\alpha$ , već je dovoljno riješiti je samo u ovisnosti o  $\omega_\alpha$  (za neki izabrani  $\alpha$ ) jer su rješenja za sve preostale vrijednosti  $\alpha$  izravno povezana vrlo jednostavnom transformacijom. Odredimo li, tako, osnovno rješenje  $\Phi_0(\theta)$  na cesti bez bočnog nagiba (tj. za  $\alpha = 0$ ),

<sup>17</sup> Funkcije prikladne za opis bočnog profila gume moraju biti vrlo pristojne, stoga se ne trebamo zamarati preopćenitim razmatranjima. U tom smislu osiguranje konveksnosti svodi se tek na izbor primjerenog predznaka. Na primjer, izaberemo li parabolični profil:  $f(x) = ax^2$ , konveksnost je automatski ostvarena za  $a > 0$ . Izaberemo li profil opisati isječkom elipse:  $f(x) = -a\sqrt{b^2 - x^2}$ , uz  $a > 0$ , samo se trebamo pobrinuti da pred korijenom stoji negativan predznak. Također, sama apsolutna vrijednost  $f(0)$  bit će sasvim nebitna pa se ne trebamo zamarati niti namještanjem ishodišta duž spojnice centra mase i vrha gume.



izravno slijedi i ovisnost  $\Phi_\alpha$  na cesti bočnog nagiba  $\alpha$ :

$$\Phi_\alpha(\theta) = \Phi_0(\theta - \alpha) + \alpha \quad (\text{B.23})$$

što je banalna posljedica toga što je odnos između kutova  $\Phi$  i  $\theta$  relativan s obzirom na površinu ceste. U uobičajenom slučaju dobro uravnoteženog motocikla, kad je  $\Phi_0(0) = 0$ , prema prethodnoj relaciji očito vrijedi<sup>18</sup>:  $\Phi_\alpha(\alpha) = \alpha$ .

Dok je izraz (B.21) složena implicitna jednadžba za  $\Phi(\theta)$ , za inverznu ovisnost  $\theta(\Phi)$  odmah nudi eksplicitnu relaciju:

$$\theta = \Phi - \arctg\left(\frac{F^{-1}[\tan(\Phi - \alpha)]}{H + f(0) - f\{F^{-1}[\tan(\Phi - \alpha)]\}}\right). \quad (\text{B.24})$$

Ova činjenica može biti od koristi pri numeričkom rješavanju jednadžbe i grafičkom prikazivanju ovisnosti između  $\theta$  i  $\Phi$ . Naime, želimo li konstruirati graf ovisnosti  $\Phi(\theta)$  naivnim rješavanjem jednadžbe (B.21), u svakoj točki grafa morali bismo se pozvati na iterativni postupak numeričkog rješavanja za dani  $\theta$ . S druge strane, ovisnost  $\theta(\Phi)$  možemo odrediti izravnim izvrjednjavanjem izraza (B.24) – samo jednom za svaku točku grafa – a traženu inverznu ovisnost  $\Phi(\theta)$  prikazati reflektiranjem nađene ovisnosti  $\theta(\Phi)$  preko simetrale prvog i trećeg kvadranta, tj. preko pravca  $\theta = \Phi$ ! Pri tome je opet dovoljno odrediti samo osnovnu ovisnost  $\theta_0(\Phi)$  na cesti bez bočnog nagiba jer ponovno jednostavnom transformacijom možemo rekonstruirati ovisnost  $\theta_\alpha(\Phi)$  za svaki drugi  $\alpha$ :

$$\theta_\alpha(\Phi) = \theta_0(\Phi - \alpha) + \alpha. \quad (\text{B.25})$$

Vrijedi istaknuti da su  $\theta$  i  $\Phi$  oznake *varijabli*, a  $\theta_\alpha$  i  $\Phi_\alpha$  oznake *funkcionalnih ovisnosti*. Pri tome su  $\theta_\alpha$  i  $\Phi_\alpha$  *inverzne funkcije*, tako da vrijedi:  $\Phi_\alpha[\theta_\alpha(\Phi)] = \Phi$  i  $\theta_\alpha[\Phi_\alpha(\theta)] = \theta$ . Nije naodmet potvrditi da su relacije (B.23) i (B.25) konzistentne s tim svojstvom:

$$\Phi_\alpha[\theta_\alpha(\Phi)] \stackrel{(\text{B.23})}{=} \Phi_0[\theta_\alpha(\Phi) - \alpha] + \alpha \stackrel{(\text{B.25})}{=} \Phi_0[\theta_0(\Phi - \alpha)] + \alpha = (\Phi - \alpha) + \alpha = \Phi.$$

Dakle, ako su  $\Phi_0$  i  $\theta_0$  inverzi, tada će  $\Phi_\alpha$  i  $\theta_\alpha$  dobiveni relacijama (B.23) i (B.25) isto biti inverzi, za svaki  $\alpha$ .

\*\*\*

Prisjetimo li se realističnih ograničenja za kut nagiba iz (A.31) i (A.32), možemo primijetiti da se najmanji kut priklona tlu  $\vartheta_{\text{real}}$  *najizravnije* odnosi na stvarni kut nagiba  $\Phi$ , umjesto na  $\theta$ . Stoga bismo te dvije relacije, koje ograničavaju kut  $\theta$  iz računa

<sup>18</sup> Relacija (B.23) i rezultat  $\Phi_\alpha(\alpha) = \alpha$  odraz su osnovne pretpostavke da vozač sve vrijeme ostaje u istom relativnom položaju na sjedalu. Naime, u stvarnoj vožnji prirodno je da se vozač naginje i vlastitim tijelom, a posebno tijekom motociklističkih utrka i da se pomiče na sjedalu, što dovodi i do bočnog pomaka  $\Delta x$  i do promjene visine  $H$  zajedničkog centra mase motocikla i vozača. Ovaj pomak je u principu proizvoljan, na izbor vozaču, ali u daleko većoj mjeri koreliran sa samim nagibom  $\Phi$ , negoli s  $\Phi - \alpha$  (samo zamislimo vozača na utrkama koji se naginje i pomiče zajedno s motociklom, i to na isti način bilo da je cesta ravna ili pod nagibom). Uključimo li ove pomake u geometriju sa slike B.4, kroz izraz (B.20) lako bismo došli do poopćenja:

$$\tan \delta = \frac{x_\delta - \Delta x(\tilde{\Phi})}{H(\tilde{\Phi}) - [f(x_\delta) - f(0)]} \implies \tan(\Phi - \theta) = \frac{F^{-1}[\tan(\Phi - \alpha)] - \Delta x(\tilde{\Phi})}{H(\tilde{\Phi}) + f(0) - f\{F^{-1}[\tan(\Phi - \alpha)]\}}$$

gdje smo oznakom  $\tilde{\Phi}$  obilježili “mekanu” ovisnost o  $\Phi$ . No sada smo izgubili trivijalnu ovisnost o  $\alpha$  iz (B.22), a time i elegantnu vezu iz (B.23).



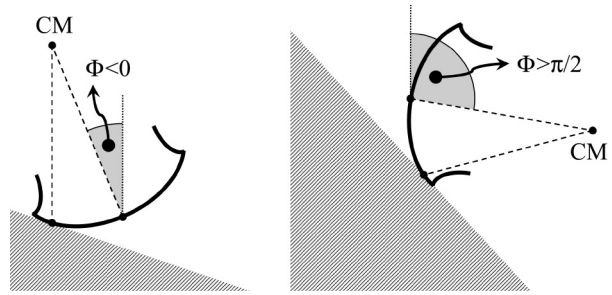
momenata sila, sada mogli upotpuniti i rezultatima razmatranja stvarne geometrije gume:

$$\begin{aligned}\Theta_{\min} &= \max [0, \theta_{\alpha}(\alpha + \vartheta_{\text{real}} - \pi/2)] \\ \Theta_{\max} &= \min [\arctg(v_{\text{real}}^2/gR), \theta_{\alpha}(\pi/2 + \alpha - \vartheta_{\text{real}})]\end{aligned}\quad (\text{B.26})$$

što smo postigli jednostavnim uključivanjem ovisnosti  $\theta_{\alpha}(\Phi)$ . Korist relacije (B.24) ovdje također dolazi do izražaja. S druge strane, sad bi nas mogla zanimati i ograničenja stvarnog kuta nagiba, koja je vrlo lako odrediti primjenom inverzne ovisnosti  $\Phi_{\alpha}(\theta)$  na vrijednosti iz (B.26):

$$\begin{aligned}\max^{\text{real}}(\Phi_{\min}^{\pm}) &= \max [\Phi_{\alpha}(0), \alpha + \vartheta_{\text{real}} - \pi/2] \\ \max^{\text{real}}(\Phi_{\max}^{\pm}) &= \min [\Phi_{\alpha}(\arctg(v_{\text{real}}^2/gR)), \pi/2 + \alpha - \vartheta_{\text{real}}].\end{aligned}\quad (\text{B.27})$$

Vezano uz ova ograničenja, prisjetimo se da je kut  $\theta$  iz računa momenata sila dinamički ograničen između 0 i  $\pi/2$ , što se najljepše vidi iz (A.40). Međutim, vrlo je zanimljivo primijetiti da se stvarni nagib  $\Phi$  može naći i izvan tog intervala. To znači da bi u odgovarajućim okolnostima motocikl u zavoju doista mogao biti nagnut van zavoja ( $\Phi < 0$ ) ili čak prema



Slika B.6

“dolje” ( $\Phi > \pi/2$ )! Slika B.6 prikazuje primjere ovih dvaju slučajeva. Valja primijetiti da za kut  $\theta$ , određen spojnicom centra mase i dodirne točke gume s tlom, u oba slučaja i dalje vrijedi  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ . Slučaj  $\Phi > \pi/2$  je, naravno, ekstreman primjer, ali samo zato jer ga je teško ostvariti u praksi. No ovaj je scenarij i geometrijski i dinamički sasvim dozvoljen.

### Primjer: $f(x) = ax^2$

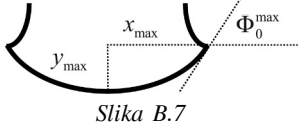
Prikažimo konkretan račun iz (B.21) na primjeru najjednostavnije konveksne funkcije:  $f(x) = ax^2$ , uz  $a > 0$ . Kao što smo već pokazali, bit će dovoljno provesti račun za  $\alpha = 0$  i pronaći osnovnu ovisnost  $\Phi_0(\theta)$  jer posredstvom relacije (B.23) odmah imamo rješenja i za sve ostale vrijednosti  $\alpha$ . Izravno slijedi:

$$f(x) = ax^2 \implies \begin{cases} F(x) = 2ax & \implies & F^{-1}(y) = \frac{y}{2a} \\ x_{\delta} = \frac{\tan \Phi_0}{2a} & \implies & f(x_{\delta}) = \frac{\tan^2 \Phi_0}{4a}. \end{cases}\quad (\text{B.28})$$

Uvrštavanjem svih identificiranih članova u (B.21) – uz, naravno,  $f(0) = 0$  – imamo:

$$\tan(\Phi_0 - \theta) = \frac{2 \tan \Phi_0}{4aH - \tan^2 \Phi_0}.\quad (\text{B.29})$$

Za specifičnu vrijednost člana  $4aH$  ovu jednakost vrlo je lako riješiti<sup>19</sup> numerički za bilo koji  $\theta$  te odrediti čitavu ovisnost  $\Phi_0(\theta)$ . No još je lakše odrediti inverznu ovisnost  $\theta_0(\Phi)$ , prema receptu iz (B.24).



Slika B.7

To ćemo i učiniti na primjeru gume čija je visina gaznog dijela profila jednaka  $y_{\max} = 4.5$  cm, a poluširina  $x_{\max} = 9$  cm (slika B.7). Izravno slijedi:  $a = y_{\max}/x_{\max}^2$ . Sada moramo uzeti u obzir da doista postoji maksimalni kut priklona tlu koji takva guma može podržati. Drugim riječima, u nedostatku drugih

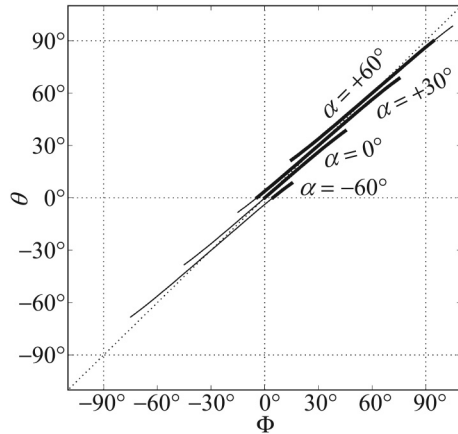
ograničenja,  $\vartheta_{\text{real}}$  iz (B.27) određen je upravo geometrijom gume. Najlakše ga nalazimo promatrajući maksimalan ostvarivi nagib na cesti bez bočnog nagiba, koji je izravno određen derivacijom profila na rubu gume:  $\tan \Phi_0^{\max} = F(x_{\max}) = 2ax_{\max}$ . Za izabrane vrijednosti parametara slijedi:  $\Phi_0^{\max} = \arctg(2y_{\max}/x_{\max}) = \arctg(1) = \pi/4$ , a odavde:  $\vartheta_{\text{real}} = \pi/2 - \Phi_0^{\max} = \pi/4$ . Za potrebe izraza (B.29) još samo moramo specificirati visinu  $H$  zajedničkog centra mase motocikla i vozača, za koju izabiremo razumnu vrijednost  $H = 81$  cm, tako da je:  $4aH = 18$ .

U skladu s provedenim razmatranjima, slika B.8 prikazuje ovisnost  $\theta_\alpha(\Phi)$  za nekoliko označenih vrijednosti bočnog nagiba ceste, uz  $4aH = 18$  te  $\vartheta_{\text{real}} = 45^\circ$ . Ovisnost  $\theta_0(\Phi)$  izračunata je prema receptu iz (B.24):

$$\theta_0(\Phi) = \Phi - \arctg\left(\frac{2 \tan \Phi}{4aH - \tan^2 \Phi}\right) \quad (\text{B.30})$$

dok su ovisnosti za sve ostale vrijednosti bočnog nagiba ceste dobivene primjenom relacije (B.25). Samo podbeljani dijelovi krivulja prikazuju ostvarive nagibe, koji su pored  $\vartheta_{\text{real}}$  uvijek i dinamički ograničeni unutar  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  iz (A.40). Međutim, tanjim linijama prikazane su i produžene ovisnosti na čitavome intervalu  $\alpha + \vartheta_{\text{real}} - 90^\circ \leq \Phi \leq 90^\circ + \alpha - \vartheta_{\text{real}}$ ,

koje je bilo potrebno izračunati samo zato da bismo iz  $\theta_0(\Phi)$  sve ostale ovisnosti rekonstruirali primjenom relacije (B.25). Ova relacija svodi se na translaciju čitave krivulje duž pravca  $\theta = \Phi$ , koji je također prikazan dijagonalnom crtkanom linijom kako



Slika B.8

<sup>19</sup> Primjenom trigonometrijskog identiteta za tangens razlike kutova – s kojim smo se već susreli u (B.12) – možemo pokazati da se (B.29) svodi na jednadžbu trećeg stupnja po  $\tan \Phi_0$ :

$$\tan^3 \Phi_0 + \tan^2 \Phi_0 \tan \theta + \tan \Phi_0(2 - 4aH) + 4aH \tan \theta = 0.$$

No iako kubna jednadžba ima rješenje u zatvorenoj formi elementarnih funkcija (Cardanova formula), za sasvim općenit skup koeficijenata koji množe pojedine potencije od  $\tan \Phi_0$ , pun raspis rješenja je dugačak, nepregledan i teško da nudi ikakav uvid u prirodu rješenja. U slučajevima poput ovih također se postavlja pitanje koje od rješenja je prihvatljivo, s obzirom da kubna jednadžba općenito ima tri rješenja. No ovo bi bilo lako odrediti iz očekivanja da za uspravan motocikl na cesti bez bočnog nagiba vrijedi:  $\Phi_0(\theta = 0) = 0$ . Za  $\theta = 0$  prethodna jednadžba svodi se na:

$$\theta = 0 \implies \tan \Phi_0 \left[ \tan^2 \Phi_0 - (4aH - 2) \right] = 0$$

odakle je očito da tri rješenja za  $\tan \Phi_0(0)$  čine 0 i  $\pm \sqrt{4aH - 2}$ . Traženo rješenje je upravo ono koje za koje vrijedi  $\tan \Phi_0(0) = 0$ .

bismo uočili odstupanje stvarnog nagiba  $\Phi$  od kuta  $\theta$  relevantnog za račun momenata sila. Naposljetku, za  $\alpha = 30^\circ$  i  $\alpha = 60^\circ$  primijetimo blago zadiranje krivulja u područje  $\Phi < 0^\circ$ , odnosno  $\Phi > 90^\circ$ , što odgovara već provedenim razmatranjima sa slike B.6.

\*\*\*

Proučili smo dinamiku i uvjete stabilnosti motocikla u zavoju. Kroz dva dijela ovog priloga identificirali smo temeljna ograničenja brzine i kuta nagiba te smo ih dodatno pooštrili realističnim razmatranjima, da bismo u konačnici ukazali i na postojanje netrivialne razlike između stvarnog kuta nagiba i onog relevantnog za analizu dinamike motocikla. Sve vrijeme zadržavali smo se na opisu stabilne putanje kroz zavoj. Nasuprot tome, detaljan opis nestacionarne dinamike motocikla zahtijeva rad sa složenim diferencijalnim jednadžbama, što je već viša matematika. A da bismo se uvjerali što je sve izvedivo u nestacionarnoj vožnji, dovoljno je samo pogledati neku od uzbudljivijih motociklističkih utrka!

## Trčati ili hodati po kiši?

*Jelena Jankov<sup>1</sup>, Dejan Gemeri<sup>2</sup>*

### Riječ dvije o polaznom problemu

Sigurno se puno puta dogodilo da dođete na neko mjesto, po lijepom vremenu, a kada ste se željeli vratiti spustio se pljusak neviđenih razmjera. Nemate kišobran, došli ste pješice, a pljusak ne odaje nikakve naznake da će uskoro prestati. Morate krenuti kući, spremno se pomirujete da ćete potpuno pokisnuti. Nakon što dođete kući, pokisnuli ste kao miševi i brzo se sušite da se ne bi prehladili. Dok sa sebe skidate mokru odjeću, upali vam se lampica i pitate se: postoji li razlika u tome koliko ćemo se smočiti ako cijelim putem hodamo ili ako cijelim putem trčimo? Što je bolje od te dvije mogućnosti, trebamo li trčati ili hodati? Pokušajmo saznati odgovor na ovo vječno pitanje. Prije nego što krenemo, spomenimo da je napisano nekoliko radova s različitih gledišta i pretpostavki. Većina radova pruža jedinstven odgovor na dano pitanje, tako da se u zaključcima puno i ne razlikuju. Najveće razlike su u polaznim pretpostavkama i načinu na koji se prikazuje oblik kapljice, njezina brzina i slično. Poprilično je teško utvrditi koliko su neki parametri koji su se koristili u izračunima približni onim stvarnim, a najveći problem stvaraju volumen kapljica kiše i njezin intenzitet. To je dosta zahtjevno eksperimentalno provjeriti, a upravo su ti parametri ključ svake postavljene teorije. Najbliže koliko možemo prići je da kapljice kiše promatramo kao trodimenzionalnu rešetku, a čovjeka kao kvadar, te ćemo uz ove pretpostavke pokušati odgovoriti na postavljeno pitanje.

<sup>1</sup> Asistentica je na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Osijeku; e-pošta: jjankov@mathos.hr

<sup>2</sup> Student na Odjelu za fiziku Sveučilišta u Osijeku; e-pošta: dgemeri@fizika.unios.hr