

## Ludi nuklearac

Petar Žugec<sup>1</sup>

Ludi nuklearni fizičar smislio je sljedeći pokus s radioaktivnim uzorkom. Periodično, nakon svakog vremenskog intervala  $T$  on mjeri broj preživjelih radioaktivnih atomskih jezgara u uzorku te računa sumu  $\Sigma$  i geometrijski prosjek  $\Gamma$  svih dotadašnjih rezultata mjerenja. Ako je nakon određenog broja mjerenja za rezultat sume dobio  $\Sigma = \sigma N_0$ , a za geometrijski prosjek  $\Gamma = \gamma N_0$ , gdje je  $N_0$  broj radioaktivnih jezgara u trenutku prvog mjerenja, koliko je prosječno vrijeme života atomskih jezgara iz uzorka? Koliko je ukupno mjerenja napravio do tog trenutka?



## Rješenje

Sasvim prirodno, krećemo od zakona radioaktivnog raspada:  $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$  koji opisuje broj atomskih jezgara preživjelih u uzorku nakon vremena  $t$  ako je njihov broj u početnom trenutku jednak  $N_0$ , a prosječno vrijeme<sup>2</sup> njihova života iznosi  $\tau$ . Prema uvjetu zadatka,  $m$ -to mjerenje (gdje ćemo  $m$  brojati od nule) odvija se u trenutku  $mT$ , stoga je broj preživjelih jezgara u tom trenutku jednak:  $N_m = N(mT) = N_0 e^{-mT/\tau} = N_0 e^{-m\rho}$ , gdje smo radi kratkoće zapisa uveli pokratu  $\rho \equiv T/\tau$ . Rezultat sume  $\Sigma$  koju nuklearac računa nakon ukupno  $M$  mjerenja jednak je, stoga:

$$\Sigma = \sum_{m=0}^{M-1} N_m = N_0 \sum_{m=0}^{M-1} e^{-m\rho} = N_0 \frac{1 - e^{-M\rho}}{1 - e^{-\rho}} \quad (1)$$

gdje smo iskoristili poznat rezultat za sumu prvih članova geometrijskoga niza:  $\sum_{m=0}^{M-1} x^m = (1 - x^M)/(1 - x)$ . Geometrijski prosjek  $\Gamma$  jednak je:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sqrt[M]{\prod_{m=0}^{M-1} N_m} = \sqrt[M]{N_0^M \prod_{m=0}^{M-1} e^{-m\rho}} = N_0 \sqrt[M]{\exp\left(-\sum_{m=0}^{M-1} m\rho\right)} \\ &= N_0 \sqrt[M]{\exp\left(-\frac{M(M-1)}{2}\rho\right)} = N_0 e^{-(M-1)\rho/2} \end{aligned} \quad (2)$$

gdje smo iskoristili također poznat rezultat (slavnu Gaussovu dosjetku) za sumu prvih članova specifičnog aritmetičkog niza – niza prirodnih brojeva:  $\sum_{m=0}^{M-1} m = M(M-1)/2$ .

<sup>1</sup> Autor je docent na Zavodu za eksperimentalnu fiziku na Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: pzugec@phy.hr

<sup>2</sup> Na nižem stupnju nuklearne fizike često se koristi vrijeme poluživota  $T_{1/2}$ , korištenjem kojega se zakon radioaktivnog raspada može zapisati u obliku eksponencijalnog pada s bazom 2:  $N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}}$ . Međutim, na višem stupnju prikladnija je upotreba prosječnog vremena života  $\tau$  koje se izravno pojavljuje pod bazom  $e$ :  $N(t) = N_0 \cdot e^{-t/\tau}$ , jer se baza  $e$  prirodno pojavljuje u diferencijalnim i integralnim računima. U svakom slučaju, veza između ove dvije veličine je trivijalna:  $T_{1/2} = \tau \ln 2$ .

Kako je zadano  $\Sigma = \sigma N_0$  i  $\Gamma = \gamma N_0$ , imamo sljedeći sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice –  $M$  i  $\rho$  – koji trebamo riješiti:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1 - e^{-M\rho}}{1 - e^{-\rho}} \\ \gamma &= e^{-(M-1)\rho/2}.\end{aligned}\quad (3)$$

Iako nije ključno za daljnje rješavanje, zgodno je primijetiti da je  $\sigma \geq 1$  te  $\gamma \leq 1$ . Naime, rezultat prvog mjerenja već je  $N_0$ , pa njemu upravo odgovaraju i početne vrijednosti sume  $\Sigma$  i geometrijskog prosjeka  $\Gamma$ . Svakim daljnjim mjerenjem ukupnu sumu samo povećavamo pa je  $\Sigma \geq N_0$ , dok geometrijski prosjek smanjujemo jer umnošku dodajemo sve manje članove, odakle slijedi  $\Gamma \leq N_0$ . Iz obiju jednadžbi sustava (3) možemo izraziti ukupan broj mjerenja  $M$ :

$$M = -\frac{1}{\rho} \ln [1 - (1 - e^{-\rho})\sigma] = 1 - \frac{2}{\rho} \ln \gamma. \quad (4)$$

Konačno,  $\rho$  nalazimo ili povratkom bilo kojeg od prethodnih izraza za  $M$  u bilo koju jednadžbu iz (3), ili izravnim rješavanjem posljednjih dviju strana jednakosti iz (4). U svakom slučaju slijedi rješenje:

$$\rho = \ln \frac{\sigma - \gamma^2}{\sigma - 1} \implies \tau = \frac{T}{\ln \frac{\sigma - \gamma^2}{\sigma - 1}} \quad (5)$$

gdje smo traženo prosječno vrijeme života  $\tau$  dobili raspisom ranije uvedene definicije  $\rho = T/\tau$ . Vidimo da par vrijednosti  $\sigma$  i  $\gamma$  izračunatih nakon bilo kojeg broja mjerenja uvijek mora dati jedan te isti rezultat jer je  $\tau$  svojstvo samog uzorka, neovisno o detaljima mjerenja. Kako se u jednadžbi (5) ukupan broj mjerenja  $M$  ne pojavljuje eksplicitno, ludi nuklearac u svojoj rastresenosti slobodno smije zaboraviti koliko je mjerenja napravio i još će uvijek moći izračunati prosječno vrijeme života iz para vrijednosti  $\sigma$  i  $\gamma$  koje, nadamo se, ipak nije zaboravio zapisati. Štoviše, povratkom prethodnog rezultata u (4):

$$M = 1 - \frac{2 \ln \gamma}{\ln \frac{\sigma - \gamma^2}{\sigma - 1}} \quad (6)$$

nuklearac uvijek može izračunati koliko je mjerenja napravio do trenutka kad je dobio vrijednosti  $\sigma$  i  $\gamma$ . A kako se u ovome rezultatu eksplicitno ne pojavljuje period mjerenja  $T$ , ludi nuklearac samo iz rezultata mjerenja uvijek može izračunati koliko ih je ukupno napravio, pa čak i da je u svojoj smetenosti zaboravio s kojom učestalošću ih je radio.

\*\*\*