

## Domena kompozicije funkcija

Petar Žugec<sup>1</sup>

Kompozicija dviju funkcija  $f(x)$  i  $g(x)$  – u oznaci  $(f \circ g)(x)$  – definirana je s

$$(f \circ g)(x) \equiv f(g(x)). \quad (1)$$

Riječima, kompozicija je nova funkcija dobivena uvrštavanjem funkcije  $g(x)$  na mjesto argumenta funkcije  $f(x)$ . Pri tome je poredak funkcija bitan, u što se možemo uvjeriti konstrukcijom jednostavnog primjera. Npr., neka je  $f(x) = x^2$  te  $g(x) = \sin x$ . Tada je  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin^2 x$ , dok je  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin x^2$ . Ove dvije kompozicije očito nisu jednake, stoga općenito *ne* vrijedi:  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ . Drugim riječima, kompozicije funkcija nisu komutativne. Kompozicija više funkcija –  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$ , ... – također je definirana:

$$(f \circ g \circ h \circ \dots)(x) \equiv f(g(h(\dots(x))))). \quad (2)$$

te je možemo shvatiti uzastopnim uvrštavanjem jedne funkcije u drugu, u točno zadanome poretku.

Domena  $\mathcal{D}(f)$  funkcije  $f(x)$  skup je svih vrijednosti argumenta  $x$  za koji je funkcija  $f(x)$  dobro definirana, odnosno skup svih  $x$ -ova za koje funkcija  $f(x)$  vraća neku vrijednost iz skupa brojeva nad kojim je definirana. Npr. domenu funkcije  $f(x) = \sqrt{x}$ , definirane nad skupom realnih brojeva, čini skup svih nenegativnih realnih brojeva:  $\mathcal{D}(f) = [0, \infty)$  jer za  $x < 0$  rezultat funkcije  $f(x) = \sqrt{x}$  nije realan broj. Primijetimo da i negativni  $x$ -ovi postaju dozvoljeni argumenti proširimo li dozvoljene vrijednosti od  $f(x)$  na skup kompleksnih brojeva. Štoviše, u tom slučaju čitav skup kompleksnih brojeva postaje domenom funkcije  $f(x) = \sqrt{x}$ , tj.  $\mathcal{D}(f) = \mathbb{C}$ . Stoga je pitanje skupa nad kojim je funkcija definirana od središnje važnosti pri određivanju njene domene. U ovom članku sve funkcije promatrat ćemo nad skupom realnih brojeva. U praktičnim primjenama ovakvo ograničenje domene nije naprosto proizvoljno. Na primjer, u fizici sve funkcije koje izravno opisuju neki element stvarnosti, moraju biti realne.

Kompozicije funkcija također imaju – i moraju imati – jasno definiranu domenu, pa makar ona bila prazan skup. No pri tome treba uzeti u obzir da i svaka potkompozicija cjelovite kompozicije mora biti dobro definirana. Na primjer, unutar kompozicije  $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$  prvo funkcija  $h(x)$  mora biti dobro definirana za svaki  $x$  iz domene završne kompozicije. Zatim isto mora biti zadovoljeno za potkompoziciju  $g(h(x))$  pa tek onda za cjelovitu kompoziciju  $f(g(h(x)))$ . Težina ovog zahtjeva postaje savršeno jasno na primjeru kompozicije  $(f \circ g)(x)$  gdje su obje potfunkcije jednake  $f(x) = g(x) = 1/x$ . Izravnim uvrštavanjem slijedi:  $f(g(x)) = 1/(1/x) = x$  te se na prvi pogled može učiniti da je kompozicija definirana za svaki realni broj. No prisjetimo se da prvo sama funkcija  $g(x) = 1/x$  mora biti definirana, a nije za  $x = 0$ . Stoga je rezultat kompozicije  $(f \circ g)(x)$  preslikavanje  $f(g(x)) = x$  koje nije definirano za  $x = 0$ <sup>2, 3</sup>

<sup>1</sup> Autor je magistar fizike na Zavodu za eksperimentalnu fiziku na Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, e-pošta: pzugec@phy.hr

<sup>2</sup> Iako se čini da se kod  $1/(1/x)$  nedefiniranosti od  $1/x$  u zapisu međusobno “pokrate”, takvo razmišljanje je pogrešno. Naime, kompozicije treba shvatiti kao djelovanje potfunkcija korak po korak, umjesto čitave kompozicije “odjednom”. Stoga, ako je rezultat djelovanja prve funkcije u  $x = 0$  neodređen – u slikovitom zapisu:  $g(0) = ?$  – sljedeća funkcija u nizu ne može iz nepoznatog argumenta rekonstruirati jasnu vrijednost:  $f(?) = 0$ . Za pomoć u shvaćanju koliko ovo nije tek puka matematička formalnost ne treba ići dalje od kalkulatora. Kakav bi rezultat kalkulator vratio nakon unosa ovakve linije:  $1/(1/0)$ ?

<sup>3</sup> Svaka funkcija definirana je trima elementima: (1) domenom, (2) kodomenom, (3) pravilom preslikavanja (svojim “zapisom”). Prema tome, funkcija  $x$  i rezultat kompozicije  $1/(1/x)$  nisu jednake funkcije jer im domene nisu jednake!

U ovom članku pokazat ćemo kako odrediti domene kompozicija na nekoliko složenijih primjera. Iako će ovdje izabrani primjeri uglavnom biti artifičijelni – odabrani zbog svoje matematičke privlačnosti – postupci nalaženja domena složenih funkcija svakako imaju i praktične primjene. U fizici, na primjer, kad je neki fizikalni parametar argument neke funkcije, tada domena funkcije određuje koje je vrijednosti tog parametra moguće, a koje nije ostvariti u danoj fizikalnoj situaciji.

**Zadatak 1.** Odredite domene kompozicija  $f_1(x) = \sin x \circ \ln x$  i  $f_2(x) = \ln x \circ \sin x$ .

Ovaj zadatak poslužit će tek kao uvodni primjer, odnosno priprema za kasnije složenije probleme. Zadane funkcije jednake su:  $f_1(x) = \sin(\ln x)$  i  $f_2(x) = \ln(\sin x)$ . Promotrimo prvo funkciju  $f_1$ . Argument  $x$  isprva je ograničen domenom prirodnog logaritma:  $x > 0$ . Slika<sup>4</sup> prirodnog logaritma čitav je skup realnih brojeva. Isto tako, domena sljedeće funkcije u nizu –  $\sin(\ln x)$  – također je čitav skup realnih brojeva, stoga sinus ne postavlja dodatna ograničenja na dozvoljene vrijednosti od  $\ln x$ , a prema tome niti na  $x$ . Dakle, domena kompozicije  $f_1$  određena je jedino prvim ograničenjem:

$$\mathcal{D}(f_1) = \langle 0, \infty \rangle. \quad (3)$$

Unutar kompozicije  $f_2$  početna funkcija  $\sin x$  ne postavlja nikakva ograničenja na  $x$ , osim onoga koje smo sami nametnuli: zatvorenost unutar skupa realnih brojeva:  $x \in \mathbf{R}$ . No sljedeća funkcija u nizu –  $\ln(\sin x)$  – prihvaća jedino pozitivne vrijednosti od  $\sin x$ , dok se slika sinusa proteže i preko negativnih vrijednosti:  $\mathcal{S}(\sin x) = [-1, 1]$ . Stoga moramo postaviti primjereno ograničenje na argument prirodnog logaritma:  $\sin x > 0$ . Ova nejednakost zadovoljena je za  $x$  unutar svakog intervala  $\langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle$  gdje je  $k$  proizvoljan cijeli broj:  $k \in \mathbf{Z}$ . S obzirom da kompozicija  $f_2$  ne postavlja daljnja ograničenja, njenu domenu zapisujemo kao uniju svih ovakvih intervala:

$$\mathcal{D}(f_2) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle. \quad (4)$$

Na ovome primjeru postalo je sasvim jasno da općenito ne samo da ne vrijedi  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ , već isto tako ne vrijedi niti  $\mathcal{D}[(f \circ g)(x)] = \mathcal{D}[(g \circ f)(x)]$ . Vrlo je lako uvjeriti se da niti slike kompozicija općenito ne zadovoljavaju  $\mathcal{S}[(f \circ g)(x)] = \mathcal{S}[(g \circ f)(x)]$ .

**Zadatak 2.** Za dani  $n$ , odredite domenu kompozicije:

$$f_n(x) = \overbrace{\frac{1}{x} \circ \frac{1}{x-1} \circ \frac{1}{x} \circ \frac{1}{x-1} \circ \dots \circ \frac{1}{x} \circ \frac{1}{x-1}}^{n \text{ parova}}. \quad (5)$$

Čemu teži domena za  $n \rightarrow \infty$ ?

Ovdje smo odlučili indeksirati kompoziciju indeksom  $n$  kad je u njoj  $n$  parova potfunkcija, tj. ukupno  $2n$  potfunkcija. Stoga ćemo za kompozicije s neparnim brojem potfunkcija koristiti oznaku  $f_{n-1/2}$ . Promotrimo kompozicije za nekoliko najnižih

<sup>4</sup> Slika  $\mathcal{S}(f)$  funkcije  $f$  skup je svih vrijednosti koje funkcija  $f$  može poprimiti. Npr. slika funkcije  $\sin x$  je interval svih realnih brojeva između  $-1$  i  $1$ :  $\mathcal{S}(\sin x) = [-1, 1]$ .

vrijednosti indeksa. Za početni član očito vrijedi

$$f_{1/2} = \frac{1}{x-1} \quad (6)$$

te kao takav na domenu svake kasnije kompozicije u nizu postavlja ograničenje:  $x \neq 1$ . Zatim

$$f_1(x) = \frac{1}{x} \circ f_{1/2}(x) = x - 1 \quad (7)$$

Do sada već znamo da je ova funkcija jednaka  $x - 1$  samo u pojednostavnjenom zapisu, s obzirom da u točki  $x = 1$  nije definirana:  $\mathcal{D}(f_1) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$ . Nadalje

$$f_{3/2}(x) = \frac{1}{x-1} \circ f_1(x) = \frac{1}{x-2}, \quad (8)$$

odakle za svaku kasniju kompoziciju, pa tako i za

$$f_2(x) = \frac{1}{x} \circ f_{3/2}(x) = x - 2, \quad (9)$$

slijedi novi zahtjev:  $x \neq 2$ . Do sada smo domenu ograničili na:  $\mathcal{D}(f_2) = \mathbf{R} \setminus \{1, 2\}$ . Nastavimo li ovakvo određivanje uzastopnih kompozicija, vrlo brzo opazit ćemo sljedeću pravilnost<sup>5</sup>:

$$f_{n-1/2}(x) = \frac{1}{x-n} \quad \text{i} \quad f_n = x - n \quad (10)$$

Pri tome svaka neparna kompozicija  $f_{n-1/2}$  izbacuje dodatnu točku ( $x \neq n$ ) iz domene svih kasnijih kompozicija. Stoga je lako zaključiti da se nagomilavanjem svih ovakvih ograničenja domena kompozicije  $f_n$  svodi na:

$$\mathcal{D}(f_n) = \mathbf{R} \setminus \bigcup_{k=1}^n \{k\} \quad (11)$$

što u limesu  $n \rightarrow \infty$  rezultira izbacivanjem čitavog skupa prirodnih brojeva:

$$\mathcal{D}(f_\infty) = \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}. \quad (12)$$

**Zadatak 3.** Slično prethodnom zadatku, za dani  $n$  odredite domenu kompozicije:

$$f_n(x) = \overbrace{\left( \frac{1}{x} \circ \frac{1}{x-1} \right) \circ \left( \frac{1}{x} \circ \frac{1}{x-1} \right) \circ \dots \circ \left( \frac{1}{x} \circ \frac{1}{x-1} \right)}^{n \text{ parova}}. \quad (13)$$

Ovaj put redosljed određivanja potfunkcija reguliran je pojavom novih zagrada. Rješavanjem svih zagrada možemo zapisati:

$$f_n(x) = (x-1) \circ (x-1) \circ \dots \circ (x-1) \quad (14)$$

pri čemu nijedna  $x - 1$  potfunkcija nije definirana u jedinici. Sada se na prvi pogled može učiniti da  $x \neq 1$  ostaje jedino ograničenje, s obzirom da nijedna potfunkcija nije osjetljiva niti u jednoj drugoj točki. No provjerimo što se događa s uzastopnim kompozicijama. Za  $f_1(x) = x - 1$  već znamo da ne podnosi  $x = 1$ . No kod  $f_2$ :

$$f_2(x) = (x-1) \circ f_1(x) = \underbrace{f_1(x)}_{\neq 1} - 1 \quad (15)$$

na označeno mjesto ne smije se uvrstiti vrijednost 1 jer lijeva  $x - 1$  potfunkcija između dvaju znakova jednakosti nije definirana za vrijednost argumenta 1. A kako je taj

<sup>5</sup> Jednom kada smo naslutili ove relacije, formalno bismo ih dokazali matematičkom indukcijom. No u ovom slučaju veze iz (10) dovoljno su jednostavne i očite pa ćemo dokaz izostaviti.

argument rezultat prethodne kompozicije, unutar  $f_2$  slijedi sljedeći zahtjev na  $f_1$ :

$$f_1(x) = x - 1 \neq 1 \implies x \neq 2. \quad (16)$$

Ponavljanjem ovog postupka za  $f_3$ :

$$f_3(x) = (x - 1) \circ f_2(x) = f_2(x) - 1 \quad (17)$$

na mjesto argumenta – koje sad zauzima funkcija  $f_2$  – ponovno ne smijemo uvrstiti jedinicu, što vodi na

$$f_2(x) = x - 2 \neq 1 \implies x \neq 3. \quad (18)$$

I ponovno možemo uočiti pravilnost<sup>6</sup> prema kojoj svaka pojedina kompozicija  $f_n$  iz svoje domene izbacuje točku  $x = n$ , čime rješenje ovog zadatka postaje potpuno identično onome prethodnog zadatka. Ovaj rezultat nije slučajan, već je zajamčen svojstvom asocijativnosti kompozicija:  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ .

**Zadatak 4.** Odredite domenu kompozicije:

$$f(x) = \frac{1}{x} \circ \cos x \circ \ln x \circ \sin x. \quad (19)$$

Prva potfunkcija  $\sin x$  ne postavlja nikakva ograničenja na  $x$ , dakle:

$$\mathcal{D}(\sin x) = \mathbf{R}. \quad (20)$$

Domenu sljedeće potfunkcije  $\ln(\sin x)$  već smo odredili u sklopu zadatka 1:

$$\mathcal{D}(\ln(\sin x)) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (2k\pi, (2k + 1)\pi). \quad (21)$$

Nadolazeća potfunkcija  $\cos(\ln(\sin x))$  ne unosi dodatne zahtjeve jer je, poput sinusa, definirana na čitavom skupu realnih brojeva te može prihvatiti bilo koju vrijednost iz slike prirodnog logaritma. Dakle:

$$\mathcal{D}(\cos(\ln(\sin x))) = \mathcal{D}(\ln(\sin x)). \quad (22)$$

Konačno, cjelokupna kompozicija  $1/\cos(\ln(\sin x))$  ne trpi nulu u nazivniku, stoga uvodi sljedeće ograničenje:  $\cos(\ln(\sin x)) \neq 0$ , koje je potrebno prevesti u ograničenje na sam  $x$ . Funkcija  $\cos y$  postiže nulu za svaki argument oblika:  $y = (n + 1/2)\pi$ , pri čemu je  $n$  proizvoljan cijeli broj:  $n \in \mathbf{Z}$ . Odavde slijedi

$$\ln(\sin x) \neq (n + 1/2)\pi \implies \sin x \neq e^{(n+1/2)\pi}; \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (23)$$

No neka od ovih ograničenja (za određene  $n$ ) su suvišna jer su vrijednosti izraza  $e^{(n+1/2)\pi}$  odozgo neograničene, dok sinus ionako ne može premašiti jedinicu. Prema tome, dovoljno je zadržati samo takve  $n$  za koje se ograničenje našlo unutar slike sinusa:

$$e^{(n+1/2)\pi} \leq 1 \implies (n + 1/2)\pi \leq 0. \quad (24)$$

Budući da je  $n$  cijeli broj, najveća vrijednost za koju je prethodna nejednakost zadovoljena iznosi  $n = -1$ . Stoga zadržavamo samo ona ograničenja za koja je  $n \leq -1$ . I ovakav novi skup vrijednosti možemo elegantno zapisati primijetimo li sljedeće: zahtijevati da je  $n$  iz skupa cijelih brojeva manjih ili jednakih  $-1$ , isto je kao i zahtijevati da je  $-n$  iz skupa prirodnih brojeva:

$$n \in \mathbf{Z} \quad \text{i} \quad n \leq -1 \iff -n \in \mathbf{N}. \quad (25)$$

Sada (23) možemo zapisati na ovaj način:

$$\sin x \neq e^{(-n+1/2)\pi}; \quad n \in \mathbf{N}, \quad (26)$$

te moramo odrediti sva rješenja jednadžbe  $\sin x = z$ , pri čemu ćemo kasnije uvrstiti  $z = e^{(-n+1/2)\pi}$ . Za početak,  $x = \arcsin z$  svakako je jedno rješenje jednadžbe. No

<sup>6</sup> Za ovaj uvid moram zahvaliti Ivici Kičiću, studentu istraživačkog smjera fizike s Fizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu.

valja se prisjetiti da je sinus periodičan s periodom  $2\pi$ , stoga je i svaki  $x$  oblika  $x = 2k\pi + \arcsin z$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) također rješenje jednadžbe  $\sin x = z$ . U konačnici, ne smijemo zaboraviti još jednu činjenicu: svaki brijeg sinusa – razapet između  $2k\pi$  i  $(2k+1)\pi$  – zrcalno je simetričan! Prema tome, ako je  $x = 2k\pi + \arcsin z$  rješenje jednadžbe  $\sin x = z$ , tada je također i  $x = (2k+1)\pi - \arcsin z$ . Temeljem ovih razmatranja, iz (26) slijedi:

$$x \neq 2k\pi + \arcsin \left( e^{(-n+1/2)\pi} \right) \quad \text{i} \quad x \neq (2k+1)\pi - \arcsin \left( e^{(-n+1/2)\pi} \right); \quad n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{Z}. \quad (27)$$

Napokon, moramo sjediniti ovaj uvjet s ograničenjem iz (21), odnosno (22). Primjećujemo da smo iz svakog intervala  $\langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle$  iz (21), ograničenjem iz (27) dodatno izbacili sve točke pobrojane s  $n$ . Stoga domenu cjelokupne kompozicije  $f(x) = 1/\cos(\ln(\sin x))$  zapisujemo na način:

$$\mathcal{D}(f) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left( \langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle \setminus \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \left\{ 2k\pi + \arcsin \left( e^{(-n+1/2)\pi} \right), \right. \right. \\ \left. \left. 2(k+1)\pi - \arcsin \left( e^{(-n+1/2)\pi} \right) \right\} \right) \quad (28)$$

**Zadatak 5.** Za dani  $n \in \mathbf{N}$ , odredite domenu kompozicije:

$$f_n(x) = \overbrace{\frac{1}{x+1} \circ \frac{1}{x+1} \circ \dots \circ \frac{1}{x+1}}^{n \text{ članova}} \quad (29)$$

Unutar kojeg intervala su izolirane sve točke izbačene iz domene kompozicije za  $n \rightarrow \infty$ ?

Kao i u zadatku 1, krenut ćemo s ispisivanjem kompozicija za nekoliko prvih vrijednosti  $n$  te pokušati uočiti pravilnost, ako postoji:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{x+1} \implies x_1 \neq -1 \\ f_2(x) &= \frac{1}{x+1} \circ f_1(x) = \frac{x+1}{x+2} \implies x_2 \neq -2 \\ f_3(x) &= \frac{1}{x+1} \circ f_2(x) = \frac{x+2}{2x+3} \implies x_3 \neq -\frac{3}{2} \\ f_4(x) &= \frac{1}{x+1} \circ f_3(x) = \frac{2x+3}{3x+5} \implies x_4 \neq -\frac{5}{3} \\ f_5(x) &= \frac{1}{x+1} \circ f_4(x) = \frac{3x+5}{5x+8} \implies x_5 \neq -\frac{8}{5} \end{aligned} \quad (30)$$

Index  $n$  pod  $x_n$  označava da se radi o  $n$ -toj izbačenoj točki. Obratimo pozornost na brojeve koji se pojavljuju:

$$1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

Mnogi će u ovome nizu prepoznati Fibonaccijeve brojeve! Za  $n > 1$ , pojedini Fibonaccijev broj  $F_n$  definiran je zbrojem prethodnih dvaju, uz odgovarajuće početne

vrijednosti:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \quad \text{i} \quad F_1 = 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n > 1. \end{aligned} \quad (31)$$

Jednom kad smo naslutili da imamo posla s Fibonaccijevim brojevima, pažljivo namještamo indekse kako bismo rekonstruirali prvih nekoliko primjera iz (30):

$$f_n(x) = \frac{F_{n-1}x + F_n}{F_nx + F_{n+1}} \implies x_n \neq -\frac{F_{n+1}}{F_n}. \quad (32)$$

Na ovoj razini prethodno poopćenje još uvijek je samo slutnja koju tek treba dokazati. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom:

*I. Baza indukcije:* Pokazujemo da (32) vrijedi za  $n = 1$ :

$$f_1(x) = \frac{F_0x + F_1}{F_1x + F_2} = \frac{0 \cdot x + 1}{1 \cdot x + 1} = \frac{1}{x + 1} \implies x_1 \neq -1. \quad (33)$$

Da je ovo istina, znamo iz (30).

*II. Pretpostavka indukcije:* Pretpostavljamo da za neki  $n \geq 1$  vrijedi slutnja iz (32).

*III. Korak indukcije:* Pokazujemo da ako pretpostavka indukcije vrijedi za  $n$ , tada vrijedi i za  $n + 1$ :

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{x + 1} \circ f_n(x) = \frac{1}{x + 1} \circ \frac{F_{n-1}x + F_n}{F_nx + F_{n+1}} = \frac{F_nx + F_{n+1}}{(F_n + F_{n-1})x + (F_{n+1} + F_n)}. \quad (34)$$

Sada koristimo definicijsko svojstvo Fibonaccijevih brojeva iz (31) kako bismo članove iz nazivnika sveli na:

$$f_{n+1}(x) = \frac{F_nx + F_{n+1}}{F_{n+1}x + F_{n+2}} = \frac{F_{(n+1)-1}x + F_{(n+1)}}{F_{(n+1)}x + F_{(n+1)+1}}. \quad (35)$$

Dakle, pokazali smo da izraz za  $f_{n+1}(x)$  ima isti oblik kao i izraz za  $f_n(x)$ . Nadalje,  $x_{n+1} \neq -\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$ . Time je dokaz indukcijom završen.

Konačno, zaključujemo da smo izgradnjom  $n$ -te kompozicije  $f_n$  kao u (30), iz njene domene izbacili skup od  $n$  točaka  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , stoga pišemo:

$$\mathcal{D}(f_n) = \mathbf{R} \setminus \bigcup_{k=1}^n \left\{ -\frac{F_{k+1}}{F_k} \right\}. \quad (36)$$

Za sve Fibonaccijeve brojeve vrijedi  $F_{n+1} \geq F_n$ , što je očito iz same definicije (31). Prema tome:  $F_{n+1}/F_n \geq 1$  (gdje uzimamo  $n \geq 1$ ), što za sve izbačene točke povlači:  $x_n \leq -1$ . S druge strane, za  $n \geq 1$  također vrijedi<sup>7</sup>:  $F_{n+1} \leq 2F_n$ , odnosno  $F_{n+1}/F_n \leq 2$ . Odavde, pak, za sve izbačene točke vrijedi:  $x_n \geq -2$ . Prema tome, sve točke izbačene iz domene kompozicije  $f_n(x)$  izolirane su unutar intervala  $[-2, -1]$ .

---

<sup>7</sup> Uvrštavanjem izraza za  $(n-1)$ -i Fibonaccijev broj ( $F_{n-1} = F_n - F_{n-2}$ ) iz definicije  $n$ -tog, u definiciju  $(n+1)$ -og broja ( $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ), slijedi:  $F_{n+1} = 2F_n - F_{n-2}$ . Kako za svaki Fibonaccijev broj – ovdje posebno za  $F_{n-2}$  – vrijedi  $F_n \geq 0$  (pri čemu one s negativnim indeksom smatramo 0), zaključujemo:  $F_{n+1} \leq 2F_n$ .