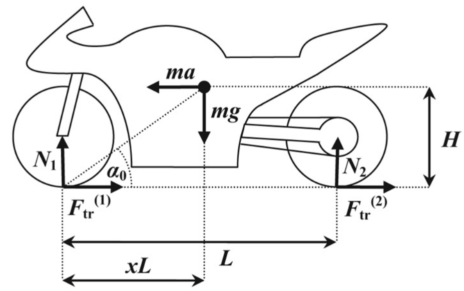
Kočenje motociklom

Petar Žugec[1]

Upravljanje dvokotačnim vozilom poput bicikla i motocikla izvor je bogate fizike. Iznenađujuće je da među brojnim zanimljivim pitanjima koja oduvijek vežu uz ovu aktivnost tek rijetka imaju kratke i jednostavne odgovore, posebno uzevši u obzir brzinu kojom je potencijalni vozač u stanju ovladati tehnikama vožnje. Jedno od takvih pitanja jest: koliko je maksimalno usporenje koje se može postići kočeći samo stražnjom, samo prednjom ili objema kočnicama?

Udaljenost dodirnih točaka dvaju kotača motocikla s tlom – iznosa L – te položaj zajedničkog težišta motocikla i vozača – na visini H od tla – među bitnim su parametrima za pristup ovom problemu. Kao što je prikazano na slici 1, projekcija težišta na tlo udaljena je za xL od uporišta prednjeg kotača $(0 < x < 1)$. Također je bitno poznavati koeficijent trenja klizanja μ_1 između prednje gume i ceste te koeficijent trenja klizanja μ_2 stražnje gume.



Slika 1. Pojednostavljena geometrija motocikla. Naznačene su sile, u sustavu samog motocikla, prisutne tijekom kočenja.

Tijekom vožnje kotač obavlja dva oblika gibanja – translaciju i rotaciju. Svakome od ovih oblika gibanja pridružen je poseban oblik trenja – trenje klizanja i trenje kotrljanja. Dok je trenje kotrljanja prisutno u slobodnoj vožnji, tijekom "odmatanja" gume po cesti, za proces kočenja zaduženo je trenje klizanja, za djelovanja kojega guma "struže" po tlu. Iz svakodnevnog iskustva poznato nam je da trenje klizanja uvelike premašuje trenje kotrljanja. U svjedočanstvo tome ide činjenica da će se vozilo iz gibanja mnogo prije zaustaviti kočeći, pod djelovanjem trenja klizanja, negoli "samo od sebe", pod djelovanjem trenja kotrljanja.

Problem promatramo iz neinercijalnog sustava samog motocikla. Na slici 1 prikazane su sile koje djeluju na motocikl – reakcije podloge N_1 i N_2, sile trenja $F_{tr}^{(1)}$ i $F_{tr}^{(2)}$, težina mg te translacijska inercija ma. Pri tome je m ukupna masa motocikla i vozača, g ubrzanje slobodnog pada, dok je a akceleracija, odnosno usporenje motocikla. Iz zahtjeva za iščezavanjem ukupne sile unutar neinercijalnog sustava motocikla imamo:

$$N_1 + N_2 = mg, \tag{1}$$

za vertikalne komponente, dok za horizontalne vrijedi

$$ma = F_{tr}^{(1)} + F_{tr}^{(2)}. \tag{2}$$

Ukupnoj sili trenja komponente $F_{tr}^{(1)}$ i $F_{tr}^{(2)}$ doprinosit će ovisno o pojedinom slučaju. Prisutan je i dodatan zahtjev za iščezavanjem ukupnog momenta sile kako pri kočenju ne bi došlo do prevrtanja motocikla preko prednjeg kotača. Dok je ovaj zahtjev pri kočenju stražnjom kočnicom prirodan, pri kočenju prednjom bit će nametnut. Postavimo

[1] Autor je zaposlen na Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, e-pošta: `pzugec@phy.hr`

li ishodište za izračun momenta sile u točku uporišta prednjeg kotača s tlom, možemo zapisati

$$N_2L + ma\sqrt{H^2 + (xL)^2}\sin\alpha_0 = mg\sqrt{H^2 + (xL)^2}\cos\alpha_0. \tag{3}$$

Kut α_0 pod kojim se nalazi centar mase sustava označen je na slici 1. Članovi s lijeve strane jednadžbe teže podići čitav motocikl preko prednjeg kotača, dok je član s desne strane zadužen za njegovo zadržavanje na tlu. Budući da reakcija podloge N_1 djeluje iz točke ishodišta na račun momenta sile, njen doprinos nije prisutan zbog iščezavanja kraka sile. Vektori obiju sila trenja $\vec{F}_{tr}^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ kolinearni su s pripadnim krakovima sile $\vec{r}_i$, stoga i njihov doprinos momentu sile definiranom vektorskim produktom iščezava:

$$\vec{M}_{tr}^{(i)} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{tr}^{(i)} = \vec{0}. \tag{4}$$

Iščitavanjem geometrijskih definicija trigonometrijskih članova iz (3) sa slike 1:

$$\begin{aligned} \sin\alpha_0 &= \frac{H}{\sqrt{H^2 + (xL)^2}}, \\ \cos\alpha_0 &= \frac{xL}{\sqrt{H^2 + (xL)^2}}, \end{aligned} \tag{5}$$

izraz (3) pojednostavnjuje se u

$$N_2L + maH = mgxL. \tag{6}$$

Kočenje stražnjom kočnicom

Pri kočenju samo stražnjom kočnicom, u izrazu (2) pojavljuje se samo doprinos trenja stražnje gume s tlom:

$$ma = F_{tr}^{(2)}. \tag{7}$$

Iznos trenja moguće je regulirati jačinom pritiska na papučicu stražnje kočnice. Kako je maksimalno trenje dano umnoškom koeficijenta trenja i reakcije podloge (μ_2N_2), sloboda odabira primjenjivog trenja ograničena je unutar intervala: $0 \leqslant F_{tr}^{(2)} \leqslant \mu_2N_2$. Razumno je pretpostaviti da će usporenje biti maksimalno upravo u slučaju maksimalne sile kočenja:

$$ma_{\max} = \mu_2N_2. \tag{8}$$

Izražavanjem N_2 iz (6):

$$N_2 = \frac{m}{L}(gxL - aH), \tag{9}$$

te uvrštavanjem u (8) uz pretpostavku $a = a_{\max}$:

$$ma_{\max} = \frac{m\mu_2}{L}(gxL - a_{\max}H) \tag{10}$$

za maksimalno usporenje dobivamo

$$a_{\max} = \frac{\mu_2gxL}{L + \mu_2H}. \tag{11}$$

Da je pretpostavka (8) doista bila ispravna, pokazuje Izračun A unutar izdvojenog okvira.

Naposlijetku, zanimljivo je uočiti da i za proizvoljno velik koeficijent trenja postoji gornja granica na usporenje koje se može postići kočeći samo stražnjom kočnicom:

$$\lim_{\mu_2 \to \infty} a_{\max} = \frac{gxL}{H}, \tag{12}$$

čemu je uzrok gubitak doticaja stražnje gume s podlogom, odnosno "prevtranje" na prednji kotač kako usporenje raste.

Izračun A

Pri usporenju inercijalna sila prenosi dio težine motocikla na prednji kotač, pri čemu slabi kontakt stražnje gume s tlom, odnosno reakcija podloge N_2 *opada, što je i jasno vidljivo iz izraza (9). Stoga se postavlja sasvim legitimno pitanje je li usporenje iz (8) doista maksimalno za maskimalnu primijenjenu silu kočenja, s obzirom da je tada reakcija podloge najslabija. Da bismo odgovorili na ovo pitanje, parametrizirajmo zaista primijenjenu silu trenja efektivnim koeficijentom trenja* $\mu_{eff}^{(2)}$ *na način*

$$F_{tr}^{(2)} = \mu_{eff}^{(2)} N_2, \tag{A.1}$$

pri čemu $\mu_{eff}^{(2)}$ *može poprimiti vrijednosti s intervala* $\mu_{eff}^{(2)} \in [0, \mu_2]$. *Uvedena efektivna vrijednost nije ništa više od načina parametrizacije proizvoljno primijenjene sile trenja. Varirajući je, cilj nam je odrediti optimalnu vrijednost trenja za koju je usporenje maksimalno. Po uzoru na izraz (11), usporenje za proizvoljno primjenjeno trenje sada je jednako*

$$a(\mu_{eff}^{(2)}) = \frac{\mu_{eff}^{(2)} gxL}{L + \mu_{eff}^{(2)} H}. \tag{A.2}$$

Da bismo odredili može li usporenje biti maksimalno za $\mu_{eff}^{(2)} < \mu_2$, *provjerit ćemo postoje li lokalni maksimumi prethodnog izraza:*

$$\frac{da(\mu_{eff}^{(2)})}{d\mu_{eff}^{(2)}} = \frac{gxL^2}{(L + \mu_{eff}^{(2)} H)^2} = 0. \tag{A.3}$$

Uvjet na iščezavanje derivacije iz (A.3) zahtijeva $gxL^2 = 0$ *što je nemoguće postići variranjem* $\mu_{eff}^{(2)}$. *Prema tome, izraz (A.2) nema lokalnih maksimuma, stoga je za maksimalne primjenjive sile kočenja* ($\mu_{eff}^{(2)} = \mu_2$) *usporenje doista maksimalno.*

Kočenje prednjom kočnicom

U slučaju kočenja samo prednjom kočnicom, izrazu (2) doprinosi jedino trenje prednje gume s podlogom:

$$ma = F_{tr}^{(1)}. \tag{13}$$

Ispočetka ćemo pretpostaviti proizvoljno primijenjeno trenje:

$$F_{tr}^{(1)} = \mu_{eff}^{(1)} N_1 \tag{14}$$

parametrizirano – na način opisan u sklopu Izračuna A (izdvojeni okvir) – efektivnim koeficijentom trenja $\mu_{eff}^{(1)}$:

$$0 \leqslant \mu_{eff}^{(1)} \leqslant \mu_1. \tag{15}$$

Unaprijed je potrebno predvidjeti postojanje dvaju kvalitativno različitih slučajeva:

I. oba kotača su na tlu, pri čemu za kut α označen na slici 1 vrijedi:

$$\alpha = \alpha_0 \tag{16}$$

II. motocikl se podigao na prednji kotač, pri čemu je stražnja guma potpuno izgubila doticaj s podlogom:

$$\alpha > \alpha_0 \implies N_1 = mg \quad \text{i} \quad N_2 = 0. \tag{17}$$

Slučajeve rješavamo redom.

I. Za oba kotača na tlu, N_2 možemo izraziti iz (1)

$$N_2 = mg - N_1, \tag{18}$$

te zajedno s (13) i (14) uvrstiti u (6):

$$(mg - N_1)L + \mu_{eff}^{(1)} N_1 H = mgxL. \tag{19}$$

Za rakciju podloge N_1 preostaje

$$N_1 = \frac{mgL(1-x)}{L - \mu_{eff}^{(1)} H}, \tag{20}$$

dok za pripadno usporenje:

$$a(\mu_{eff}^{(1)}) = \frac{\mu_{eff}^{(1)} N_1}{m} = \frac{\mu_{eff}^{(1)} gL(1-x)}{L - \mu_{eff}^{(1)} H}. \tag{21}$$

Kako $\mu_{eff}^{(1)}$ raste, brojnik također raste, dok se nazivnik smanjuje, stoga je sasvim očito da je – u smislenom području definiranome s $a(\mu_{eff}^{(1)}) \geqslant 0$ – (21) monotono rastuća funkcija. Prividna mogućnost divergencije prethodnog izraza uklonjena je fizikalnim zahtjevom

$$N_1 \leqslant mg, \tag{22}$$

iz kojeg uvrštavanjem (20) u (22) imamo

$$\frac{mgL(1-x)}{L - \mu_{eff}^{(1)} H} \leqslant mg \implies \mu_{eff}^{(1)} \leqslant \frac{xL}{H}. \tag{23}$$

Kako se maksimum izraza (21) postiže za najvišu dozvoljenu vrijednost $\mu_{eff}^{(1)}$, tada je za stvarni koeficijent trenja μ_1 takav da vrijedi $\mu_1 \leqslant xL/H$, maksimalno usporenje jednako

$$a_{\max} = \frac{\mu_1 gL(1-x)}{L - \mu_1 H}. \tag{24}$$

Slučaj $\mu_1 > xL/H$ potpada pod domenu sljedećeg razmatranja.

II. Budući da je za $\mu_1 > xL/H$ trenje između gume i ceste dovoljno da podigne motocikl na prednji kotač, potrebno je provjeriti može li se za $\alpha > \alpha_0$ postići snažnije usporenje nego li za $\alpha = \alpha_0$. Da bismo to odredili, u (3) uvrštavamo uvjet $N_2 = 0$ iz (17):

$$ma\sqrt{H^2 + (xL)^2}\sin\alpha = mg\sqrt{H^2 + (xL)^2}\cos\alpha, \tag{25}$$

odakle izravno dobivamo

$$a = \frac{g}{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{26}$$

Zanimljivo je primijetiti da sada usporenje ni na koji način ne ovisi o koeficijentu trenja μ_1, što je izravna posljedica zahtjeva da, jednom kada je kut α postignut, ne smije doći do daljnjeg prevrtanja motocikla oko prednjeg kotača. Drugim riječima, da bi se održao stalan kut α, primijenjena sila kočenja ne može biti proizvoljna, već parametrizirana točno određenom vrijednošću efektivnog koeficijenta trenja:

$$\mu_{eff}^{(1)} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{27}$$

Vratimo li se izrazu (26), primjećujemo da s povećanjem α, odnosno podizanjem motocikla na prednji kotač usporenje opada, s obzirom da je za $\alpha < \pi/2$ tangens monotono rastuća funkcija.

Krajnji zaključak koji se nameće je da, neovisno o iznosu stvarnog koeficijenta trenja μ_1, usporavanje prednjom kočnicom je maksimalno dokle god su oba kotača na tlu, tj. $\alpha = \alpha_0$. Pri tome se za $\mu_1 \leqslant xL/H$ maksimum postiže pri punom trenju koje je uopće moguće postići, dok za $\mu_1 > xL/H$ pri maksimalnom trenju za kojega još ne dolazi do podizanja stražnjeg kotača, tj. uz primijenjeni $\mu_{eff}^{(1)} = xL/H$. Konačno, potpuno rješenje za maksimalno usporenje samo prednjom kočnicom možemo zapisati kao

$$a_{\max} = \begin{cases} \dfrac{\mu_1 gL(1-x)}{L-\mu_1 H}, & \mu_1 \leqslant \dfrac{xL}{H} \\ \dfrac{gxL}{H}, & \mu_1 > \dfrac{xL}{H} \end{cases} \tag{28}$$

Kočenje objema kočnicama

Pri kočenju objema kočnicama, usporavanju doprinose trenje i prednje i stražnje gume:

$$ma = F_{tr}^{(1)} + F_{tr}^{(2)}. \tag{29}$$

Iz analize prethodnih dvaju slučajeva unaprijed znamo da oba kotača moraju biti na tlu. Ponovno pretpostavljamo efektivne koeficijente trenja, odnosno proizvoljno primijenjeno trenje:

$$ma = \mu_{eff}^{(1)} N_1 + \mu_{eff}^{(2)} N_2. \tag{30}$$

Iz (1) iščitavamo reakciju podloge N_1,

$$N_1 = mg - N_2, \tag{31}$$

koja nakon uvrštavanja u (30)

$$ma = \mu_{eff}^{(1)}(mg - N_2) + \mu_{eff}^{(2)} N_2 \tag{32}$$

vodi na izraz za reakciju podloge N_2,

$$N_2 = \frac{m(a - g\mu_{eff}^{(1)})}{\mu_{eff}^{(2)} - \mu_{eff}^{(1)}}. \tag{33}$$

Uvrštavanjem prethodnog rješenja u (6), znajući da vrijedi $\alpha = \alpha_0$, dobivamo

$$\frac{mL(a - g\mu_{eff}^{(1)})}{\mu_{eff}^{(2)} - \mu_{eff}^{(1)}} + maH = mgxL \tag{34}$$

odakle slijedi ovisnost usporenja o primijenjenim silama kočenja:

$$a(\mu_{eff}^{(1)}, \mu_{eff}^{(2)}) = \frac{Lg[\mu_{eff}^{(1)} + x(\mu_{eff}^{(2)} - \mu_{eff}^{(1)})]}{L + H(\mu_{eff}^{(2)} - \mu_{eff}^{(1)})}. \tag{35}$$

Izračun B

Da bismo odredili maksimum izraza (35), provjerit ćemo postojanje lokalnih ekstrema. Uvjet njihovog postojanja zahtijeva:

$$\frac{da(\mu_{eff}^{(1)}, \mu_{eff}^{(2)})}{d\mu_{eff}^{(1)}} = 0 \qquad i \qquad \frac{da(\mu_{eff}^{(1)}, \mu_{eff}^{(2)})}{d\mu_{eff}^{(2)}} = 0. \tag{B.1}$$

Deriviranje po $\mu_{eff}^{(1)}$,

$$\frac{da(\mu_{eff}^{(1)}, \mu_{eff}^{(2)})}{d\mu_{eff}^{(1)}} = \frac{Lg[L(1-x) + \mu_{eff}^{(2)} H]}{[L + H(\mu_{eff}^{(2)} - \mu_{eff}^{(1)})]^2} \tag{B.2}$$

vodi na zahtjev:

$$L(1-x) + \mu_{eff}^{(2)} H = 0 \implies \mu_{eff}^{(2)} = -\frac{L(1-x)}{H} < 0 \tag{B.3}$$

koji ne može biti zadovoljen za pozitivan $\mu_{eff}^{(2)}$. *Prema tome, ne postoji lokalni maksimum ovisan o kočenju prednjom kočnicom. Nadalje, deriviranjem po* $\mu_{eff}^{(2)}$,

$$\frac{da(\mu_{eff}^{(1)}, \mu_{eff}^{(2)})}{d\mu_{eff}^{(2)}} = \frac{Lg(xL - \mu_{eff}^{(1)} H)}{[L + H(\mu_{eff}^{(2)} - \mu_{eff}^{(1)})]^2} \tag{B.4}$$

preostaje

$$xL - \mu_{eff}^{(1)} H = 0 \implies \mu_{eff}^{(1)} = \frac{xL}{H}. \tag{B.5}$$

Ovaj zahtjev može biti zadovoljen samo u slučaju kada je stvarni koeficijent trenja μ_1 *prednje gume s tlom dovoljno velik da omogući traženu vrijednost iz (B.5), tj.* $\mu_1 \geqslant xL/H$. *U suprotnom slučaju, predznak derivacija iz (B.2) i (B.4):*

$$\frac{da(\mu_{eff}^{(1)}, \mu_{eff}^{(2)})}{d\mu_{eff}^{(1)}} > 0 \qquad i \qquad \frac{da(\mu_{eff}^{(1)}, \mu_{eff}^{(2)})}{d\mu_{eff}^{(2)}} > 0 \tag{B.6}$$

jamči da usporenje monotono raste s povećanjem sila kočenja obiju kočnica. Prema tome, za $\mu_1 < xL/H$ *kočenje je maksimalno tijekom najviših primijenjenih sila trenja dviju kočnica, a koje se postižu za* $\mu_{eff}^{(1)} = \mu_1$ *te* $\mu_{eff}^{(2)} = \mu_2$. *Ako je, vrijednost traženim uvjetom (B.5) moguće postići, tada uvrštavanjem* $\mu_{eff}^{(1)} = xL/H$ *u (35) preostaje*

$$a(\tfrac{xL}{H}, \mu_{eff}^{(2)}) = \frac{gxL}{H}, \tag{B.7}$$

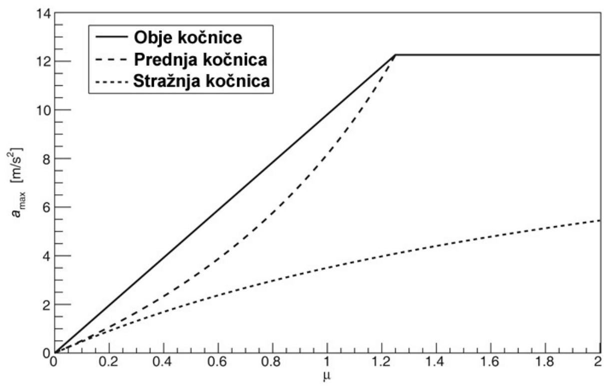
što je rezultat poptuno neovisan o sili kočenja stražnje kočnice. Ovakav ishod već nam je otprije poznat iz (28) kao kočenje samo prednjom kočnicom pri kojem dolazi do potpunog gubitka doticaja stražnje gume s tlom, čime je objašnjen nestanak doprinosa stražnje kočnice iz (B.7).

Analiza ovoga izraza provedena je Izračunom B u izdvojenom okviru. Krajnji rezultat razmatranja, odnosno potpuno rješenje za maksimalno usporenje objema kočnicama jednako je

$$a_{\max} = \begin{cases} \dfrac{Lg[\mu_1 + x(\mu_2 - \mu_1)]}{L + H(\mu_2 - \mu_1)}, & \mu_1 \leqslant \dfrac{xL}{H} \\ \dfrac{gxL}{H}, & \mu_1 > \dfrac{xL}{H} \end{cases} \tag{36}$$

Činjenica da su dva rješenja iz (36) uvjetovana jedino koeficijentom trenja prednje gume vodi na ukupni zaključak prethodne analize: usporenje je maksimalno kada je postignuto najučinkovitije kočenje prednjom kočnicom! Ako pri tome maksimalna sila kočenja prednje gume nije dovoljna da bi odvojila stražnji kotač od tla, tada je potrebno maksimizirati učinak svake kočnice zasebno!

Slika 2 prikazuje primjer preklopljenih rješenja (11), (28) i (36) za usporenje pri kočenju stražnjom, prednjom te objema kočnicama, respektivno. Za koeficijente trenja prednje i stražnje gume pretpostavljeno je da su jednakog iznosa μ, odnosno $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Uz $g = 9.81$ m/ s^2, za preostale parametare izabrane su vrijednosti: $L = 1.5$ m, $H = 0.6$ m te $x = 0.5$.



Slika 2. Maksimalno usporenje pri kočenju stražnjom, prednjom te objema kočnicama u ovisnosti o jednakom koeficijentu trenja obiju guma ($\mu_1 = \mu_2 = \mu$). $L = 1.5$ m; $H = 0.6$ m; $x = 0.5$; $g = 9.81$ m/s^2. Završni plato predstavlja globani maksimum usporenja koji iznosi $gxL/H = 12.26$ m/s^2. Istoj vrijednosti asimptotski teži i usporenje samo stražnjom kočnicom, kao što je pokazano u (12).

Iako smo krenuli od razmjerno jednostavnog modela trenja, krajnji rezultati pokazali su se dosta složenima. Zanimljivo je primijetiti – iz (12), (28) i (36) – da postoji apsolutna gornja granica gxL/H na usporenje koje se može postići, ovisna samo o geometriji vozila. Rezultati su sasvim primjenjivi na vozila poput automobila, za koje je granična vrijednost gxL/H mnogo viša, s obzirom da je razmak između kotača veći ($L_{\text{auto}} > L_{\text{moto}}$) te je težište niže ($H_{\text{auto}} < H_{\text{moto}}$). Usko vezanom graničnom vrijednošću xL/H za koeficijent trenja prednje gume izdvojeni su režimi unutar kojih može ($\mu_1 > xL/H$) ili ne može ($\mu_1 \leqslant xL/H$) doći do podizanja vozila na prednji kotač. I dok je za motocikle ona dovoljno niska da se kombinacijom kvalitetne gume i dobre podloge može ostvariti uvjet $\mu_1 > xL/H$, za automobile u pravilu vrijedi suprotno: $\mu_1 \ll xL/H$.