Obrada rezultata mjerenja

I. ODSTUPANJA

Zadatak nekoga fizikalnog mjerenja jest utvrditi brojčanu vrijednost neke fizikalne veličine. Međutim, budući da je svako mjerenje podložno mnogobrojnim, često nekontroliranim vanjskim utjecajima, a k tomu je i oštrina ljudskog razlučivanja kao i razlučivanja mjernih instrumenata ograničena, pojedinačni se rezultati mjerenja neće potpuno podudarati. Neka je prava vrijednost mjerene fizikalne veličine X. Tada rezultat pojedinog mjerenja x odstupa od prave vrijednosti X te veličine, a odstupanje:

$$\Delta X = x - X \tag{1}$$

naziva se **pravim odstupanjem** dotičnog mjerenja. Cilj uzastopnih mjerenja i računa odstupanja jest što pouzdanije odrediti pravu vrijednost fizikalne veličine, odnosno dati granice odstupanja unutar kojih se najvjerojatnije nalazi prava vrijednost. Svako iskazivanje rezultata mjerenja koje uz rezultat ne daje i podatak o njegovoj pouzdanosti, **bezvrijedno** je.

Primijetimo da ciljano koristimo pojam **odstupanje** umjesto u govoru uobičajeno korištene *pogreške*. Naime, odstupanje doista može biti izazvano pogreškom mjerenja, ali može biti uzrokovano i prirodnim rasapom varijable ako mjerena veličina nije neka jasno određena veličina (npr. duljina štapa), već veličina koja doista ima neku prirodnu raspodjelu (npr. brzina pojedinih čestica u plinu). Statistički alati za opis obaju slučajeva potpuno su jednaki. To nije nimalo slučajno jer svaka pogreška mjerenja odgovara rasapu varijable, no zbog vrlo specifičnog razloga: ograničene preciznosti/točnosti mjernog uređaja ili postupka. No nije svaki rasap varijable pogreška mjerenja! Praksa pokazuje da uporna upotreba pojma *pogreške* (u smislu "propagacija pogrešaka" i sl.) obično dovodi do ozbiljnih propusta u razumijevanju statistike i u korištenju statističkih pojmova i alata.

A. Vrste odstupanja

Razlikujemo tri vrste eksperimentalnih odstupanja:

- **Sustavna odstupanja** uzrokovana su sustavom mjerenja, odnosno prirodom mjernih alata i postupaka. Ona su ponovljiva i prilikom ponavljanja mjerenja javljaju se u istom smjeru i iznosu. Primjeri su takvih odstupanja pogrešno baždarene skale, pomaknuti nulti položaji instrumenata ili promjene duljine skale zbog temperature okoliša. Ove vrste odstupanja mogu se otkloniti ili smanjiti provjerom i poboljšanjem aparature. Ako smo svjesni mogućnosti nastanka sustavnog odstupanja u nekome mjerenju, često je moguće osmisliti eksperiment tako da se takva odstupanja ponište. Npr., ako sumnjamo u ispravnost nultog položaja instrumenta, mjerit ćemo traženu veličinu jednako puta s obiju strana nultog položaja. Sustavna odstupanja pogreške su mjerenja u punom smislu riječi.

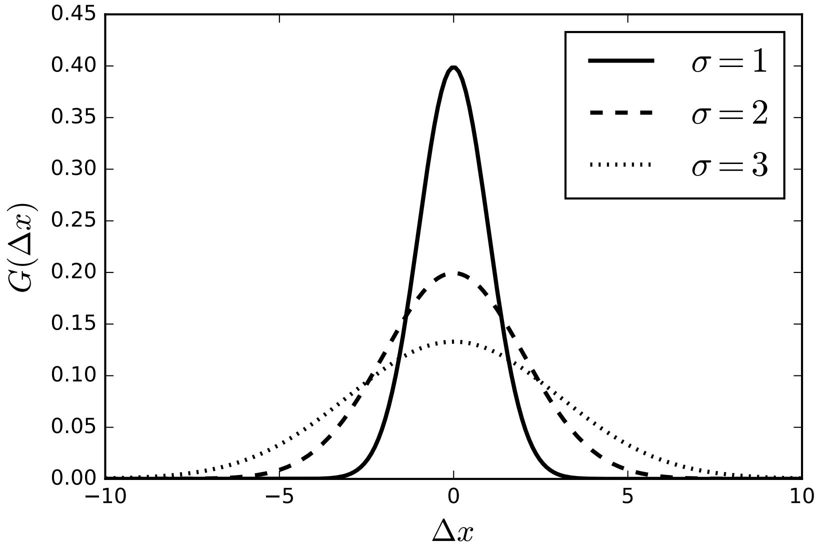
- **Gruba odstupanja** mogu nastati naglim poremećajem u okolini ili u mjernom uređaju, a mogu nastati i ljudskim propustom, npr. netočnim očitavanjem mjerne skale ili pogrešno upisanim iznosom mjerne veličine. Ona također odgovaraju istinskim pogreškama mjerenja.

- **Slučajna odstupanja** mogu se smanjivati **ako** odgovaraju pogreškama mjerenja, ali se ne daju potpuno izbjeći. U tom slučaju njihov je uzrok u nestalnosti okoline i mjernog uređaja. Boljom izolacijom od okoline i savršenijim uređajem slučajne pogreške se mogu smanjivati do granica tehnoloških mogućnosti. Međutim, slučajna odstupanja uzokovana stvarnim fizikalnim raspodjelama u pozadini mjerene veličine ili procesa nužno su odraz stvarnih fizikalnih zakona i procesa. Ona se ne mogu izbjeći *poboljšanjem kvalitete* mjernog uređaja, već eventualno *ciljanom manipulacijom* fizikalnih parametara samog mjerenog sustava (npr. hlađenjem). Općenito, ukupna eksperimentalna odstupanja rezultat su i pogrešaka mjerenja i prirodne raspodjele mjerene veličine.

  Bez obzira na to radimo li manje ili više savršenim uređajem i njegovim okružjem, moramo razmatrati slučajna odstupanja koja su preostala. Ona se unutar jednog niza mjerenja razlikuju po smjeru i iznosu. Ponavljanjem mjerenja ona se mogu matematički obraditi i odrediti tražene granice unutar kojih se najvjerojatnije nalazi prava vrijednost tražene fizikalne veličine. Za slučajne *pogreške* Δx, odnosno odstupanja od tražene veličine obično se pretpostavlja da slijede Gaussovu, tj. normalnu raspodjelu:

  $$G(\Delta x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}} \tag{2}$$

  pri čemu je raspodjelom $G(\Delta x)$ određena vjerojatnost da pogreška poprimi vrijednost Δx, a σ je standardna devijacija raspodjele. Slika 1 prikazuje Gaussove raspodjele za nekoliko standardnih devijacija.



Slika 1

Raspodjela je normirana, tj. ukupna površina ispod krivulje, odnosno vjerojatnost da pogreška poprimi bilo koju vrijednost, jednaka je jedinici. Integriranjem raspodjele u granicama $\pm\sigma$, $\pm2\sigma$ i $\pm3\sigma$ dobiva se 68%, 95%, odnosno 99,7% vjerojatnosti da pogreška poprimi vrijednost iz pripadnih intervala.

Pretpostavka Gaussove raspodjele općenito **ne vrijedi** za slučajna odstupanja uzrokovana intrinzičnom raspodjelom mjerene veličine, koja je odraz konkretnih fizikalnih procesa. Npr. energije pojedinih čestica u plinu prate tzv. Maxwell–Boltzmannovu raspodjelu. Broj mjerenih događaja obično prati binomnu ili Poissonovu raspodjelu.

B. Ostali pojmovi

- **Točnost mjerenja** jest odstupanje rezultata mjerenja od prave vrijednosti mjerene fizikalne veličine. Ukoliko pravu vrijednost ne poznajemo, ne možemo ni odrediti točnost pojedinog mjerenja, ali statističkim metodama možemo odrediti interval u kojem se prava vrijednost najvjerojatnije nalazi.
- **Preciznost instrumenta** (mjernog uređaja) najčešće je određena podjelom skale na instrumentu. Ako je, na primjer, najmanji podjeljak skale termometra 1°C, preciznost termometra je 0,5°C. U nekim slučajevima moći ćemo procijeniti očitanu vrijednost na desetinku podjeljka skale, pa je u tom slučaju preciznost instrumenta 0,1 podjeljka skale.
- **Preciznost mjerenja** govori o prosječnom rasipanju rezultata. Mjerimo li, na primjer, vodostaj rijeke mjerkom preciznosti 0,5 cm, moguće je da će se zbog valova rezultati razlikovati za više centimetara. Uzrok tolike razlike nije nepreciznost mjernog uređaja nego drugi vanjski utjecaji, u našem slučaju valovi. Ponavljanjem mjerenja možemo statističkim metodama odrediti preciznost mjerenja. Ako ponavljanjem dobijemo uvijek isti rezultat za vrijednost mjerene veličine, za preciznost mjerenja uzimamo preciznost instrumenta.
- **Pouzdanost mjerenja** je povezana sa širinom intervala unutar kojeg se nalazi prava vrijednost mjerene fizikalne veličine. Uz pretpostavku da imamo samo slučajne pogreške, višestrukim ponavljanjem mjerenja pouzdanost se povećava, tj. povećava se vjerojatnost da se srednja vrijednost nalazi u blizini prave vrijednosti. Tako možemo uzastopnim ponavljanjem mjerenja dobiti rezultat koji je pouzdaniji od preciznosti mjerenja.

U daljnjem tekstu pojam **nepouzdanost** (*eng.* uncertainty) koristit ćemo u smislu *statističke nepouzdanosti*, definirane srednjim kvadratnim odstupanjem (*eng.* root mean square) mjerene veličine. U formalnoj upotrebi ovaj pojam treba koristiti umjesto pojma *pogreške*.

II. STATISTIKA EKSPERIMENTALNIH NEPOUZDANOSTI

A. Izravna mjerenja

Srednja vrijednost $\bar{x}$

Izvedemo li niz mjerenja neke veličine, dobit ćemo za tu veličinu različite vrijednosti zbog neizbježnih odstupanja mjerenja. Obilježimo n pojedinačnih mjerenja s $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Iz tog niza mjerenja računa se aritmetička sredina, tj. srednja vrijednost $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{3}$$

koju smatramo najboljom procjenom inače nepoznate prave vrijednosti X.

Srednje kvadratno odstupanje / nepouzdanost / standardna devijacija pojedinog mjerenja

Srednja odstupanje **pojedinog** mjerenja jest mjera odstupanja pojedinih vrijednosti x_i od stvarne vrijednosti X, odnosno od srednje vrijednosti $\bar{x}$:

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{4}$$

Faktor $n-1$ (umjesto n) statistička je posljedica toga što smo prisiljeni računati sa srednjom vrijednošću $\bar{x}$, umjesto sa stvarnom vrijednošću X koja nam jednostavno nije poznata!

Za dovoljno velik broj mjerenja (obično $n \approx 10$) veličina m poprima **ustaljenu** vrijednost, tj. ne mijenja se znatno ako dodatno povećavamo broj mjerenja. Ona iskazuje prosječno rasipanje **pojedinih** rezultata mjerenja, što je intrinzična posljedica nesavršenosti uređaja ili mjernog postupka, na koju povećanje broja mjerenja ne može utjecati.

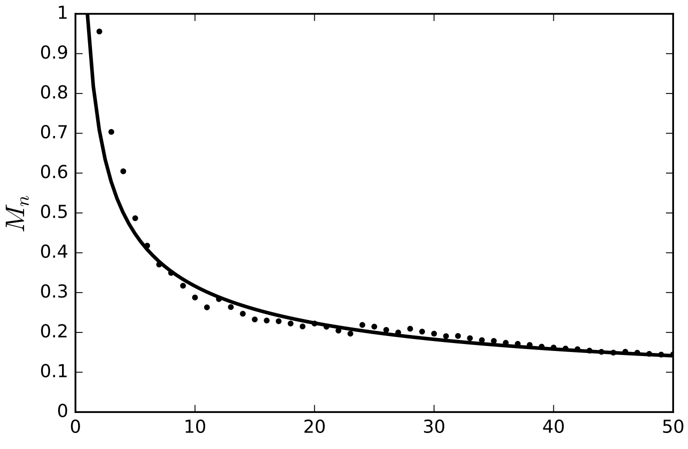
Srednje kvadratno odstupanje / nepouzdanost / standardna devijacija aritmetičke sredine

Ako izvedemo veći broj mjerenja, možemo očekivati da će mjerena fizikalna veličina biti pouzdanije određena. Mjera ove nepouzdanosti je srednje kvadratno odstupanje **aritmetičke sredine**, koje je za faktor $\sqrt{n}$ manje od srednjeg odstupanja **pojedinog** mjerenja:

$$M = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \frac{m}{\sqrt{n}} \tag{5}$$

Pod pretpostavkom gausijanski raspodijeljenih odstupanja, vjerojatnost da se prava vrijednost mjerene veličine nalazi u intervalu $\bar{x} - M \leq X \leq \bar{x} + M$ iznosi 68,3%, a unutar intervala $\bar{x} - 3M \leq X \leq \bar{x} + 3M$ iznosi 99,7%.

Za razliku od nepouzdanosti m pojedinog mjerenja, nepouzdanost M aritmetičke sredine osjetno ovisi o broju mjerenja. Većim brojem mjerenja možemo znatno smanjiti M, no kako funkcija $\sqrt{n}$ raste sporije od linearne funkcije n, moramo se mjereći neku fizikalnu veličinu odlučiti za povoljan odnos nepouzdanosti mjerenja (želimo što manji iznos) i broja ponavljanja mjerenja (što uključuje i trajanje mjerenja). Slika 2 prikazuje primjer evolucije nepouzdanosti M s povećanjem mjerenja unutar slučajnog uzorka (prikazane točke), zajedno s očekivanim globalnim trendom $1/\sqrt{n}$ (puna linija). Do $n \approx 10$ nepouzdanost naglo opada, a zatim se sporo približava apscisi. Očito, za potrebe jednostavnih eksperimenata nema smisla raditi više od desetak mjerenja.



Slika 2

Relativna nepouzdanost
Relativna nepouzdanost definirana je omjerom nepouzdanosti i srednje vrijednosti:

$$R = \frac{M}{\bar{x}} \tag{6}$$

Ova veličina može biti vrlo instruktivna za procjenu kvalitete rezultata. Međutim, nije nužno uvijek primjerena. Primjerice, ako je očekivana vrijednost neke veličine $X = 0$, tada relativna nepouzdanost očito nije korisna veličina.

Maksimalna apsolutna nepouzdanost
Maksimalna apsolutna nepouzdanost jest najveće odstupanje pojedinačnog mjerenja od srednje vrijednosti:

$$\Delta x_{\max} = |x_i - \bar{x}|_{\max} \tag{7}$$

Često u nekom nizu mjerenja sve očitane vrijednosti imaju isti iznos. To se primjerice događa ako običnim metrom koji ima milimetarsku podjelu mjerimo geometrijski pravilan predmet. U takvim je slučajevima izračunano srednje kvadratno odstupanje jednako nuli, što ne znači da je predmet izmjeren apsolutnom preciznošću. Tada **procjenjujemo** maksimalo odstupanje i u nedostatku boljih informacija poistovjećujemo ga (i računamo s njime kao) s prosječnim odstupanjem. Iako ovim postupkom nepouzdanost **precjenjujemo**, u eksperimentalnoj fizici to je daleko ispravnija procedura od **potcjenjivanja** iste.

B. Posredna mjerenja

Često je tražena veličina F u nekom eksperimentu funkcija više neposredno izmjerenih veličina x_i:

$$F = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{8}$$

od kojih je svaka opterećena nekom nepouzdanošću M_i. Uz pretpostavku gausijanski raspodijeljenjih eksperimentalnih odstupanja, najvjerojatniju (no ne nužno i srednju!) vrijednost veličine F dobivamo izravnim uvrštavnjem srednjih vrijednosti pojedinih mjerenja u prethodnu funkcionalnu ovisnost:

$$\bar{F} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) \tag{9}$$

Za određivanje nepouzdanosti veličine F moramo uzeti u obzir nepouzdanost svih veličina x_i. Uz pretpostavku da su odstupanja pojednih veličina **slučajna i nekorelirana** vrijedi sljedeći (aproksimativan) rezultat za nepouzdanost veličine F:

$$M_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} M_i \right)^2} \tag{10}$$

gdje se nakon izračuna derivacija u izraz uvrštavaju očekivane vrijednosti $\bar{x}_i$ svih mjerenih veličina.

Primjer
Želimo odrediti ubrzanje g sile teže mjerenjem duljine niti l i perioda njihanja T matematičkog njihala, prema relaciji:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \tag{11}$$

Pretpostavimo da smo već neovisno izmjerili l i T te su nam rezultati dostupni u obliku $l = (\bar{l} \pm M_l)$ i $T = (\bar{T} \pm M_T)$. Izravnim uvrštavanjem aritmetičkih sredina dobivamo najvjerojatniju vrijednost $\bar{g}$:

$$\bar{g} = 4\pi^2 \frac{\bar{l}}{\bar{T}^2} \tag{12}$$

dok se nepouzdanost M_g (koja je u eksperimentalnoj fizici daleko važnija od samog rezultata $\bar{g}$) računa prema:

$$M_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l} M_l\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} M_T\right)^2} = 4\pi^2 \sqrt{\left(\frac{M_l}{\bar{T}^2}\right)^2 + \left(-\frac{2\bar{l} M_T}{\bar{T}^3}\right)^2} = \bar{g}\sqrt{\left(\frac{M_l}{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{2M_T}{\bar{T}}\right)^2} \tag{13}$$

Konačan rezultat također se zapisuje na način $g = (\bar{g} \pm M_g)$, koji je u detalje opisan kasnije.

C. Opći prosjek i nepouzdanost

Pretpostavimo da je napravljeno nekoliko nizova mjerenja iste fizikalne veličine i neka je rezultat mjerenja svakog pojedinog niza dan s: $x_1 = (\bar{x}_1 \pm M_1)$, $x_2 = (\bar{x}_2 \pm M_2)$, $x_3 = (\bar{x}_3 \pm M_3)$... Ako su razlike $|\bar{x}_i - \bar{x}_j|$ usporedive s bilo kojom nepouzdanošću M_k, kažemo da su mjerenja **konzistentna** i slobodni smo smatrati ih **kompatibilnima**. Združeni rezultat svih ovih mjerenja možemo izraziti poopćenim prosjekom:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{x}_i}{M_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{M_i^2}} \tag{14}$$

s pridruženom nepouzdanošću:

$$M = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{M_i^2}}} \tag{15}$$

gdje se nepouzdanosti pojedinih mjerenja javljaju kao odgovarajući težinski faktori – rezultat veće nepouzdanosti manje utječe na konačan rezultat i suprotno. Primjetimo da vrijedi:

$$\bar{x} = M^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{x}_i}{M_i^2} \tag{16}$$

što olakšava račun ako se prvo izračuna M. Svojstvo ovakvo izračunanog prosjeka je da je njegova nepouzdanost M manja od svih pojedinih M_k, što je razumljivo jer smo uzeli u obzir rezultate više izvedbi pokusa, čime smo povećali količinu informacija i pouzdanost rezultata. Istaknuti slučaj konzistentnih mjerenja jest situacija kad postoji neki M_k koji je mnogo manji od svih ostalih, tj. rezultat jednog mjerenja mnogo je pouzdaniji od ostalih. U tom slučaju će vrijediti $M \approx M_k$, gdje je M_k najmanja nepouzdanost.

Nekonzistentnim mjerenjima nazivamo ona za koja je $|x_i - x_j|$ mnogo veće od bilo kojeg M_k. U tom slučaju **nema smisla** računati poopćeni prosjek jer bi pripadna nepouzdanost M bila nerealistično malena, s obzirom da su – sudeći prema prijavljenim nepouzdanostima M_k pojedinih rezultata – pojedini $\bar{x}_k$ u smislu istih nepouzdanosti nekompatibilni. Umjesto toga, rezultate pojedinih mjerenja smatramo neovisnima te primjenjujemo izraze (3) i (5) za njihovu statističku obradu.

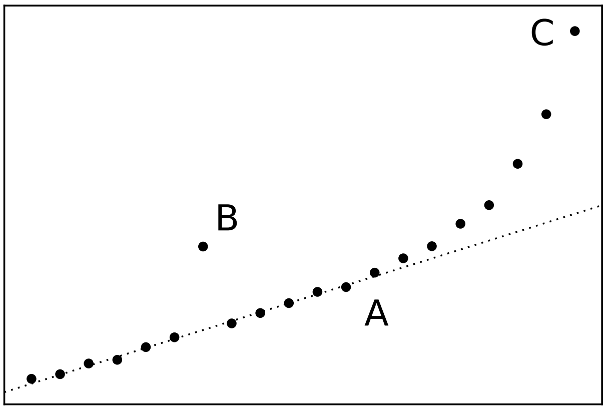
III. GRAFIČKO PRIKAZIVANJE REZULTATA MJERENJA

Grafičko prikazivanje vrlo je važan način prikazivanja rezultata mjerenja. Iz grafa se zorno vidi kako jedna fizikalna veličina ovisi o drugoj ili više veličina. Pretpostavimo da smo mjerenjem fizikalnih veličina x i y dobili niz parova točaka (x_i, y_i). Iz grafičkog prikaza ovih točaka možemo donijeti niz zaključaka o odnosu veličina x i y. Uobičajeno je da se kao x odabire veličina koju preciznije mjerimo, odnosno veličina koju mjerimo neovisno, te je nanosimo na apscisu.

Poslužimo se primjerom prikazanim na Slici 3. Već letimičnim pogledom na graf možemo pretpostaviti neka svojstva ovisnosti izmjerenih veličina $y = f(x)$:

- **Linearnost** u području od ishodišta do točke A. Uočavamo izravnu proporcionalnost veličina x i y.
- **Nelinearnost** od točke A do točke C. Ovakva promjena ponašanja ovisnosti $y = f(x)$ često upućuje na nastupanje različite fizikalne pojave od one koja postoji od ishodišta do točke A.
- **Rasipanje** točaka od zamišljenog pravca u linearnom dijelu daje uvid u veličinu slučajnih odstupanja prilikom mjerenja. Kasnije ćemo pokazati kako računamo taj pravac.
- **"Sumnjiva" točka** B odstupa od pravca mnogo više od svih ostalih vrijednosti. Ona je najvjerojatnije posljedica grube pogreške u mjerenju pa se ne uzima u obzir prilikom izračunavanja pravca. Ako se sumnjiva točka nađe na kraju grafa, ne smije se zanemariti jer ona može upućivati na novu fizikalnu pojavu (npr. točka C).

Prednost grafičkog prikazivanja očituje se i u tome što se interpolacijom ili ekstrapolacijom mogu dobiti vrijednosti veličine y i za one vrijednosti x koje nisu izmjerene. Međutim, dok interpolacija (točka između dviju mjerenih točaka) u pravilu daje ispravne vrijednosti, kod ekstrapolacije (protezanje grafa izvan područja mjerenih točaka) valja biti oprezan jer uvijek postoji mogućnost da promatrana fizikalna pojava počinje odstupati od uočenog ponašanja.



Slika 3

A. Analiza linearnog grafa

Ako je iz grafa očito da postoji linearna ovisnost $y = ax + b$, obično nas zanimaju parametri a i b. Za određivanje tih parametara primijenjujemo **metodu najmanjih kvadrata**. Pri tome su za n parova točaka (x_i, y_i) koeficijenti a i b određeni formulama:

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \tag{17}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \tag{18}$$

dok su njihove nepouzdanosti:

$$M_a = \sqrt{\frac{1}{n-2}\left(\frac{n\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} - a^2\right)} \tag{19}$$

$$M_b = M_a\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} \tag{20}$$

B. Nelinearni zakoni

Nakon što se mjerene točke unesu u graf, lako se uočava linearna ovisnost ako takva postoji. Međutim, ako opazimo da veličina y nema linearnu ovisnost o x, moramo pokušati odrediti o kakvoj je nelinearnoj ovisnosti riječ.

Ako na osnovi poznavanja sličnih fizikalnih zakona očekujemo neku određenu nelinearnu ovisnost, onda uvođenjem pomoćnih varijabli pokušamo mjerenu fizikalnu veličinu prikazati u linearnom grafu. Ako, na primjer, očekujemo da veličina y ima kvadratnu ovisnost o x ($y \propto x^2$), onda tu pretpostavku možemo provjeriti tako da na apscisu nanosimo varijablu $t = x^2$ kako bismo u grafičkom prikazu dobili pravac. Nakon što su točke unesene u graf, lako se uočava leže li one doista na pravcu ili ne. Slično možemo provjeriti i za druge potencije.

U slučaju kada nam potencija nije poznata, a ne želimo nasumce isprobavati razne supstitucijske varijable, možemo koristiti logaritamske grafove.

Logaritamsko-logaritamski grafovi

Ako je funkcionalna ovisnost **potencijska**[1], odnosno oblika $y = \alpha x^\beta$, logaritmiranjem i x i y dobivamo linearnu ovisnost između $\log x$ i $\log y$:

$$\log y = \log \alpha + \beta \log x \tag{21}$$

Prikazivanje u log-log grafu posebno je korisno kada nepoznati eksponent β nije cijeli broj pa ga supstitucijskom varijablom nije lako pogoditi. U log-log grafu, β jednostavno određujemo kao koeficijent nagiba pravca koristeći se prije opisanom metodom najmanjih kvadrata.

[1] **Kakva ovisnost postaje pravcem u linearno-logaritamskom, a kakva u logaritamsko-linearnom grafu?**

IV. IZVJEŠTAVANJE REZULTATA

Rezultate pojedinih mjerenja treba prikazati grafički i/ili tablicom. Primjer jednog takvog tabličnog izvještaja izgleda kao:

i	l_i / mm
1	17,5
2	18,2
3	17,5
4	18,6
5	18,6
6	18,7
7	17,4
8	18,2
9	17,3
10	17,8
Σ	179,8

Srednja vrijednost jest:

$$\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{179,8 \text{ mm}}{10} = 17,98 \text{ mm}$$

Srednje kvadratno odstupanje pojedinog mjerenja je:

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(l_i - \bar{l})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2,6760 \text{ mm}^2}{9}} \approx 0,545 \text{ mm}$$

dok je srednje kvadratno odstupanje aritmetičke sredine:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{0,545 \text{ mm}}{\sqrt{10}} \approx 0,172 \text{ mm}$$

Konačan rezultat mjerenja zapisuje se na sljedeći način:

$$\boxed{l = (\bar{l} \pm M) \text{ jedinice}}$$

Pri izvještavanju konačnog rezultata važno je **pravilno zaokruživanje**. Rezultat se zaokružuje na **prvu signifikantnu znamenku u nepouzdanosti**. Dakle, prvo zaokružujemo[2]: $M \approx 0,2$ mm. Zatim samu srednju vrijednost zaokružujemo na isti broj znamenaka kao u nepouzdanosti, po potrebi **dodajući nule** kako bi broj ispisanih znamenaka bio jednak: $\bar{l} \approx 18,0$ mm. Dakle, konačan rezultat je oblika:

$$\boxed{l = (18,0 \pm 0,2) \text{ mm}}$$

Ponekad je, izražen u nekim specifičnim fizikalnim jedinicama, konačan rezultat vrlo malen ili vrlo velik broj, s velikim brojem znamenaka u oba slučaja. Tako bismo, na primjer, prethodni rezultat mogli zapisati kao:

$$l = (18,0 \pm 0,2) \text{ mm} = (0,0000180 \pm 0,0000002) \text{ km} = (18000000 \pm 200000) \text{ nm}$$

No ovo čini rezultat vrlo nepreglednim i podložnim greškama u dodavanju ili uklanjanju nula. U tom slučaju ili izabiremo optimalni predmetak pred jedinicom − u ovom slučaju milimetre (mm) ili čak centimetre (cm) − ili izlučujemo red veličine osnovnog rezultata (dakle, sada tražimo **prvu signifikantnu znamenku u srednjoj vrijednosti**):

$$l = (1,80 \pm 0,02) \times 10^{-5} \text{ km} = (1,80 \pm 0,02) \times 10^{7} \text{ nm}$$

Primjetimo da je na ovaj način broj znamenaka unutar zagrade uvijek jednak, neovisno o izboru jedinica!

[2] Brojevi čija je prva znamenka koja se odbacuje manja od 5, zaokružuju se na dolje: $0,34 \approx 0,3$. Brojevi čija je prva znamenka koja se odbacuje veća **ili jednaka** 5, zaokružuju se na gore: $0,35 \approx 0,4$.

Na ovom praktikumu rezultate treba zapisivati u skladu s hrvatskim pravopisom i nekim općeprihvaćenim normama. Ova pravila uključuju:

- **Obavezne fizikalne jedinice!** Rezultat bez primjerene jedinice potpuno je bezvrijedan. Jedinice moraju biti iz SI sustava!
- Jedinice i brojevi se pišu **uspravno**, a varijable u **kurzivu**. Operatori, što posebno uključuje diferencijale (d), pišu se **uspravno**. Tako se, na primjer, derivacija veličine d po samoj sebi **ne** piše kao:

$$\frac{dd}{dd}$$

  nego kao:

$$\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}d}$$

- Prema hrvatskome pravopisu koristi se **decimalni zarez**, umjesto decimalne točke.
- Između broja i jedinice piše se **razmak** (tj. bjelina; npr. 3 m).
- Prema hrvatskome pravopisu razmak se piše i između broja i znaka postotka (npr. 3 %).
- Kod navođenja veličine i pripadne jedinice kao u gornjem retku priložene tablice, koristi se **kosa crta** (npr. l_i / mm).

V. DODATAK – PROPAGACIJA MAKSIMALNIH ODSTUPANJA

U srednjoškolskoj nastavi eksperimentalna odstupanja se umjesto kvadratno, prema jednadžbi (10), propagiraju na način koji se svodi na korištenje modula:

$$M_F = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} M_i \right|^2 \tag{22}$$

što je ekvivalentno propagaciji maksimalnih odstupanja. Međutim, **jedini** razlog za ovu praksu je činjenica da je za izvod kvadratne propagacije (10) potrebno poznavanje derivacija i integrala, što se ne može očekivati na srednjoškolskoj razini. Na razini sveučilišnog obrazovanja korištenje izraza (22) treba izbjegavati! Naime, on podrazumijeva da su se sva odstupanja **koherentno** usmjerila, kao da "znaju", u istom smjeru (smjeru maksimalnog odstupanja od stvarne vrijednosti). No ovakav tretman **nije statistika**, čija je osnovna pretpostavka **slučajnost** procesa (implicitno podrazumijevamo da imamo posla s nekoreliranim doprinosima). Račun koji na ispravan način uzima u obzir da se nekorelirani doprinosi nepouzdanosti mogu ponekad i djelomično pokratiti, vodi na kvadratnu propagaciju nepouzdanosti, koja je "mekša" od korištenja apsolutnih vrijednosti.

Lako se pokazuje i da propagacija maksimalnih odstupanja vrlo brzo vodi do logičkih kontradikcija. Pretpostavimo da mjerimo jednu te istu veličinu dva puta (ili na dva načina) pa dobijemo različite vrijednosti x_1 i x_2, svaku s pripadnom nepouzdanošću m. Pretpostavimo li da su odstupanja gausijanski raspodijeljena, možemo se dogovoriti da ćemo maksimalnim odstupanjem smatrati vrijednost:

$$m_{\mathrm{max}} = 3m \tag{23}$$

jer gausijan "živi" unutar $\pm 3m$. Svaka kombinacija sučajnih varijabli ponovno je slučajna varijabla s pripadnom nepouzdanošću, pa tako i zbroj $X = x_1 + x_2$ dvaju slučajnih ishoda mjerenja x_1 i x_2. Vodeći se ispravnom propagacijom nepouzdanosti, za koju znamo da je kvadratna, znamo da je nepouzdanost M zbroja X jednaka:

$$M = \sqrt{m^2 + m^2} = m\sqrt{2} \tag{24}$$

Vodeći se **istim dogovornim principom** za definiciju maksimalnog odstupanja kao i ranije, slijedi da je ono za varijablu X jednako:

$$M_{\mathrm{max}} = 3M = 3m\sqrt{2} \tag{25}$$

Međutim, pokušamo li izravno propagirati maksimalna odstupanja iz (23) zbrajanjem njihovih modula:

$$M_{\mathrm{max}} = m_{\mathrm{max}} + m_{\mathrm{max}} = 6m \tag{26}$$

naići ćemo na izravnu kontradikciju s rezultatom (25)! Dakle, zaključujemo da je propagacija maksimalnih odstupanja (nekoreliranih procesa) besmislena jer ili vodi na pogrešan rezultat ili bismo u svakom koraku morali iznova redefinirati što smatramo maksimalnim odstupanjem kako bi smo "na silu" dobili očekivani rezultat.

Sitna uputstva na temelju učestalih propusta

- U tablicama je dovoljno ispisati mjerene veličine x_i. Ne treba za svaku mjerenu točku ispisivati članove poput $(x_i - \bar{x})^2$ koji se pojavljuju u izračunu nepouzdanosti. Umjesto toga, prije završnog izvještavanja pravilno zaokruženih rezultata, uvijek zapišite srednju vrijednost i pripadnu nepouzdanost na veći broj decimala kako bismo mogli provjeriti je li zaokruživanje dobro provedeno.

- Nakon svake prilagodbe podataka na pravilan način zaokružite i izvjestite dobivene parametre fita (koeficijente a i b), makar nam neki od njih ne bili od interesa.

- Skale grafova moraju biti primjereno postavljene. Sve mjerene točke moraju biti prikazane (dakle, ne smiju se neke naći van grafa) i prostor na grafu mora biti optimalno iskorišten. Npr. ako je raspon između najveće i najmanje mjerene točke jednak Δ, besmisleno je postaviti raspon osi širine 10Δ pa da je najveći dio grafa prazan i neiskorišten.

- Za prirodni logaritam koristite oznaku **ln**, a za svaki drugi bazu eksplicitno napišite, npr. $\mathbf{log_{10}}$. U pripremama je baza logaritma često namjerno ostavljena nespecificirana, Vama na izbor.

- Komentirajte rezultate prilagobe podataka (ili općenito mjerenja), posebno ako se mogu dovesti u vezu s eksperimentalno i teorijski poznatim veličinama. Na primjer, u vježbi *Slobodno i prigušeno titranje* potrebno je provesti prilagodbu podaka na na formu $\ln\phi_n = -n\Lambda + \ln\phi_0$ gdje su parovi točaka (n, ϕ_n) mjerene veličine, uključujući i točku ϕ_0. Tijekom prilagodbe podataka slodobni koeficijent b igrat će ulogu člana $\ln\phi_0$. Prema tome, iz b možemo izračunati vrijednost ϕ_0 predviđenu fitom te je usporediti s mjerenom vrijednošću. Na temelju slaganja ili neslaganja ovih dviju vrijednosti možemo donositi određene zaključke o kvaliteti mjerenja, valjanosti teorije i sl. Za neke od ovih usporedbi potrebno je izmjeriti određene veličine koje možda nisu relevantne za središnji problem pojedinih vježbi. Zato je potrebno pripremiti se za vježbu i sva mjerenja provoditi s unaprijed razvijenom strategijom obrade podataka kako biste primjereno dokumentirali sve veličine potrebene za kasniju analizu.

- Zaključke o mjerenjima donosite na temelju mjerenja, umjesto teorija. Vrlo često zaključci su u potpunoj suprotnosti s mjerenjima jer prevladava mišljenje da se apsolutno mora potvrditi teorijsko predviđanje, bez obzira na stvarna opažanja. Možda je teorija loša ili nepotpuna. Možda je eksperiment loše proveden. Možda je dizajn eksperimenta takav da statistička odstupanja jednostavno ne omogućavaju pouzdanu potvrdu ili opovrgnuće teorije.

- Nepouzdanost rezulata je mjera njihovih slaganja, pa tako i s teorijskim predviđanjima. Npr. očekujemo li vrijednost 1, rezultat $(0,8 \pm 0,1)$ u boljem je slaganju s očekivanjem nego rezultat $(0,950 \pm 0,001)$.

- Osim u specifičnim slučajevima (kad je očito da se zapis dodatno komplicira), u konačnoj formuli za nepouzdanost zavisne veličine pred čitav izraz izlučite očekivanu vrijednost veličine čiju nepouzdanost računate jer nakon deriviranja tipično velik dio početnog izraza ostaje netaknut. Npr., za veličinu:

$$X = \frac{A\sqrt{B}}{C^2} e^a \sin b \ln c$$

nepouzdanost računamo prema:

$$M_X = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial A} M_A\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial B} M_B\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial C} M_C\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial a} M_a\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial b} M_b\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial c} M_c\right)^2}$$

Potpuno raspisan, izraz je oblika:

$$\begin{aligned} M_X = \Bigg[& \left(\frac{\sqrt{B}}{C^2} e^a \sin b \ln c\, M_A\right)^2 + \left(\frac{A}{2\sqrt{B}C^2} e^a \sin b \ln c\, M_B\right)^2 + \left(-\frac{2A\sqrt{B}}{C^3} e^a \sin b \ln c\, M_C\right)^2 + \\ & \left(\frac{A\sqrt{B}}{C^2} e^a \sin b \ln c\, M_a\right)^2 + \left(\frac{A\sqrt{B}}{C^2} e^a \cos b \ln c\, M_b\right)^2 + \left(\frac{A\sqrt{B}}{C^2} e^a \sin b \frac{1}{c}\, M_c\right)^2 \Bigg]^{1/2} \end{aligned}$$

U izvještajima **NE** ostavljajte formulu u tom obliku, već izlučite pred korijen čitav izraz koji definira početnu veličinu X:

$$M_X = \boldsymbol{X} \sqrt{\left(\frac{M_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{M_B}{2B}\right)^2 + \left(\frac{2M_C}{C}\right)^2 + (M_a)^2 + \left(\frac{M_b}{\tan b}\right)^2 + \left(\frac{M_c}{c \ln c}\right)^2}$$

O logaritmima

Sve funkcije, osim osnovnih matematičkih operacija (zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja) i potencija (kao "poopćenog množenja") uzimaju **bezdimenzionalne argumente** te vraćaju **bezdimenzionalni rezultat**. Tako, na primjer, pod sinusom obično nalazimo izraze oblika $\sin(\omega t)$, gdje se fizikalne jedinice vremena t i frekvencije ω međusobno krate. No logaritmi zbog svojeg famoznog svojstva $\boldsymbol{\log(ab) = \log a + \log b}$ često dovode do besmislenih matematičkih izraza kad se to svojstvo koristi bez razumijevanja. Uzmimo, na primjer, izraz za prijeđeni put pri gibanju konstantnom brzinom:

$$s = vt$$

S izrazom u ovakvom obliku sve je u redu jer se fizikalne jedinice s obiju strana jednakosti podudaraju. Logaritmiramo li izraz bez posebne pažnje:

$$\log s = \log t + \log v \tag{27}$$

isprva se sve čini u redu. No promotrimo sljedeći problem (radi jednostavnosti, koristit ćemo bazu 10). Recimo da je prijeđeni put jednak $s = 1$ m. Koliko je tada $\log_{10} s$? Uvrštavanjem broja ispada $\log_{10} 1 = 0$. No što ako smo odlučili put izraziti u milimetrima: $s = 1000$ mm? Koliko je tada pripadni logaritam? Čini se: $\log_{10} 1000 = 3$. A što ako smo se odlučili za kilometre: $s = 0,001$ km? Nije li tada: $\log_{10} 0,001 = -3$? Kolika je onda vrijednost lijeve strane? 0, 3, -3 ili nešto drugo?! Problem, naravno, leži u tome što fizikalna veličina (u ovom slučaju put s) nije goli broj, već nosi i fizikalnu jedinicu koja se također pojavljuje pod logaritmom, stoga bismo morali napraviti sljedeće:

$$\log(1\ \mathrm{m}) = \log(1) + \log(\mathrm{m})$$

No što je $\log(\mathrm{m})$, tj. "logaritam metra"? Nedefinirana veličina! Drugim riječima, besmislica. Problem je u slijepoj primjeni pravila $\log(ab) = \log a + \log b$, koje **općenito ne vrijedi**! To pravilo vrijedi samo za realne, i to pozitivne realne brojeve[3]! Pokažimo to na primjeru (ovaj put ćemo radi jednostavnosti koristiti prirodni logaritam). S jedne strane znamo da je $\ln 1 = 0$. S druge strane, kompleksna analiza nam kaže da je $\ln(-1) = i\pi$ (inverz izraza $e^{i\pi} = -1$). Sada imamo redom:

$$0 = \ln 1 = \ln[(-1)\cdot(-1)] = \ln(-1) + \ln(-1) = 2i\pi$$

Zar doista? Problem je u koraku u kojem smo pravilo $\log(ab) = \log a + \log b$ primijenili na negativne brojeve. Stoga ne iznenađuje da isto pravilo ne vrijedi ako se se pokuša primijeniti na nešto poput fizikalne jedinice, kad već ionako ne vrijedi niti za sve brojeve!

Kako se onda ispravno nositi s ovim problemom? Formalno ispravan način je učiniti sve izraze pod logaritmima bezdimenzionalnima:

$$\log\left(\frac{s}{s_0}\right) = \log\left(\frac{t}{t_0}\right) + \log\left(\frac{v}{v_0}\right)$$

gdje novouvedene veličine s_0, t_0, v_0 služe samo kao nosači fizikalnih jedinica. Na primjer: $s_0 = 1$ m, $t_0 = 1$ s, $v_0 = 1$ m/s. No kako izraze ne bismo komplicirali uvođenjem tolikoga broja novih veličina – od kojih bi svaku trebalo opisati riječima u tekstu, a i uvođenje novih oznaka za obične nosače jedinica može lažno sugerirati da se radi o nekim bitnim parametrima problema – kao prirodno rješenje se nameće izravan upis jedinica u formulu[4]:

$$\boldsymbol{\log\left(\frac{s}{1\ \mathrm{m}}\right) = \log\left(\frac{t}{1\ \mathrm{s}}\right) + \log\left(\frac{v}{1\ \mathrm{m/s}}\right)}$$

To je praksa koje se pridržavajte na ovom praktikumu!

---

[3] Pravilo $\log(ab) = \log a + \log b$ tek je jedno od mnogih koja vrijede samo pod vrlo određenim uvjetima, a neznanje čega često dovodi do kontradikcija ili otkrića "novih matematika". Jedan od najpoznatijih primjera je komutiranje korijenovanja i kvadriranja, što vodi na famozan dokaz da je $1 = -1$:

$$1 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{-1}^2 = i^2 = -1$$

Greška je u koraku u kojem je zamijenjen poredak kvadriranja i korjenovanja, što je dozvoljeno samo za pozitivne realne brojeve.

[4] Pri izboru nosača jedinica nije dovoljno samo učiniti izraze pod logaritmom bezdimenzionalnima. Drugim riječima, izbor pojedinih nosača jedinica ne može biti sasvim proizvoljan, već skup izabranih nosača jedinica mora biti konzistentan. Naime, ova procedura ekvivalentna je proširivanju početne formule, prije logaritmiranja, jedinicom (brojem 1):

$$\frac{s}{vt} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{s}{vt}\cdot\frac{v_0 t_0}{s_0} = 1$$

što znači da se svi nosači jedinica, svedeni na istu stranu jednakosti, moraju pokratiti u 1. U praksi to znači da ako smo već izabrali $s_0 = 1$ m i $t_0 = 1$ s, jedinica za brzinu mora biti $v_0 = 1$ m/s, a ne, recimo, $v_0 = 1$ km/h (jer je $\frac{1\ \mathrm{m/s}}{1\ \mathrm{km/h}} = 3,6$).