

FP1–V6. Slobodno i prigušeno titranje

Ključni pojmovi

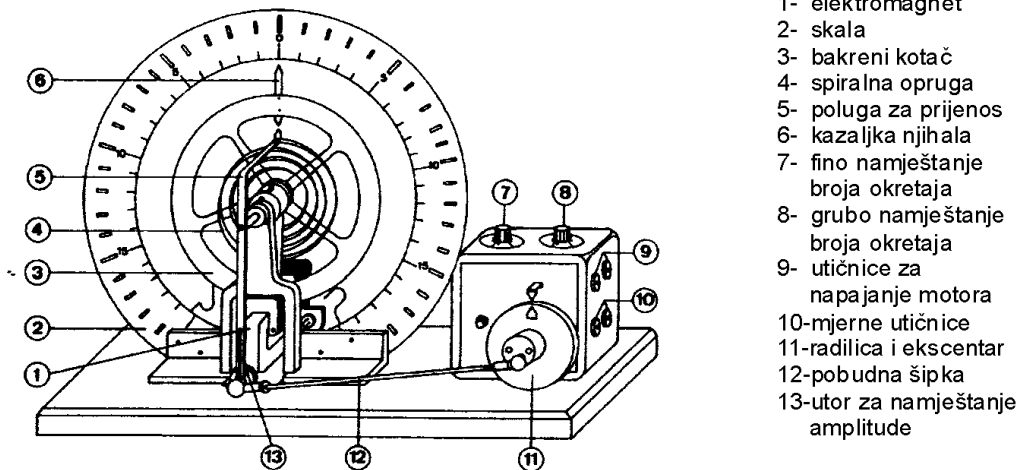
Slobodno i prigušeno titranje, linearna diferencijalna jednadžba, logaritamski dekrement, kružno njihalo, moment tromosti, faktor dobrote

I. TEORIJSKI UVOD

Kružno njihalo (Slika 1) je tijelo učvršćeno tako da može rotirati oko jedne osi i oko te osi ima moment tromosti I . Središnji, pokretni dio kružnog njihala je bakreni kotač. Spiralna opruga učvršćena je jednim krajem na osovinu koja nosi tijelo, a drugim krajem na čvrstu podlogu. Na taj način njihalo ima točno određen ravnotežni položaj, a spiralna opruga protivi se odstupanju od ravnoteže zakretnim momentom $T(\phi)$ koji je proporcionalan kutu otklona ϕ :

$$T(\phi) = -D\phi \quad (1)$$

gdje je D konstanta spiralne opruge.



Slika 1: Kružno njihalo.

Slobodne oscilacije

Pusti li se kružno njihalo da slobodno titra, diferencijalna jednadžba njegova gibanja glasi:

$$I \frac{d^2\phi}{dt^2} + D\phi = 0 \quad (2)$$

Ova jednadžba formalno je identična jednadžbi za harmonijske oscilacije tijela na opruzi i ima općenito rješenje:

$$\phi(t) = \phi_0 \cos(\omega_0 t - \psi) \quad (3)$$

gdje je ϕ_0 amplituda titranja, ψ početna faza, a ω_0 je vlastita kružna frekvencija njihala, određena relacijom:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{D}{I}} \quad (4)$$

ut T_0 kao period neprigušenog titranja. U danom eksperimentalnom slučaju, konstante ϕ_0 i ψ određuju se iz početnih uvjeta, tj. otklona i brzine u $t = 0$.

Prigušene oscilacije

Ako uvedemo prigušivanje proporcionalno kutnoj brzini, diferencijalna jednadžba gibanja glasi:

$$I \frac{d^2\phi}{dt^2} + C \frac{d\phi}{dt} + D\phi = 0 \quad (5)$$

gdje je C koeficijent gušenja, u našem slučaju uzrokovan vrtložnim strujama u bakrenom kotaču, a koji je razmjernan struji koja teče kroz elektromagnet. Opće rješenje ove jednadžbe jest:

$$\phi(t) = \phi_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_\delta t - \psi) \quad (6)$$

gdje je δ faktor gušenja:

$$\delta = \frac{C}{2I} \quad (7)$$

a kružna frekvencija ω_δ prigušenih oscilacija dana je relacijom:

$$\omega_\delta = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (8)$$

Uočavamo da je frekvencija ω_δ realna za potkritična prigušenja ($C^2 < 4DI$). Amplituda se eksponencijalno smanjuje s vremenom, a omjer uzastopnih amplituda je konstantan:

$$\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} = \frac{\phi_0 e^{-\delta t_n} \cos(\omega_\delta t_n - \psi)}{\phi_0 e^{-\delta(t_n+T)} \cos(\omega_\delta t_n + \omega_\delta T - \psi)} = e^{\delta T} \quad (9)$$

Definiramo logaritamski dekrement gušenja Λ kao:

$$\Lambda = \delta T = \ln \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \quad (10)$$

Faktor dobrote

Energija pohranjena u oscilatoru smanjuje se u vremenu prema zakonu:

$$E(t) = E_0 e^{-t/\tau} \quad (11)$$

gdje je $\tau = 1/2\delta$. Faktor dobrote definira se kao:

$$Q = 2\pi \frac{\text{prosječna pohranjena energija u jednom periodu}}{\text{prosječan gubitak energije u jednom periodu}} \quad (12)$$

što za slabo gušeni oscilator iznosi:

$$Q \approx \frac{2\pi E}{(E/\tau)T} \approx \omega_\delta \tau = \frac{\omega_\delta}{2\delta} \quad (13)$$

II. MJERNI UREĐAJ I MJERENJE

Elementi mjernog postava prikazani su na Slici 2. Kružno njihalo (Slika 1) sastoji se od bakrena kotača (3) čija je osovinica kugličnim ležajevima učvršćena na postolje. Kotač je pričvršćen na jedan kraj spiralne opruge (4). Drugi kraj spiralne opruge nepomičan je prilikom proučavanja slobodnih i prigušenih oscilacija (tj. ne uključujemo motor). Prigušivanje titranja postiže se vrtložnim strujama koje elektromagnet (1) izaziva u bakrenom kotaču. Struja se u elektromagnet dovodi preko utičnica sa stražnje strane kružnog njihala (Slika 3b). Jačina prigušenja može se kontinuirano regulirati pomoću jakosti struje koju mjerimo ampermetrom.

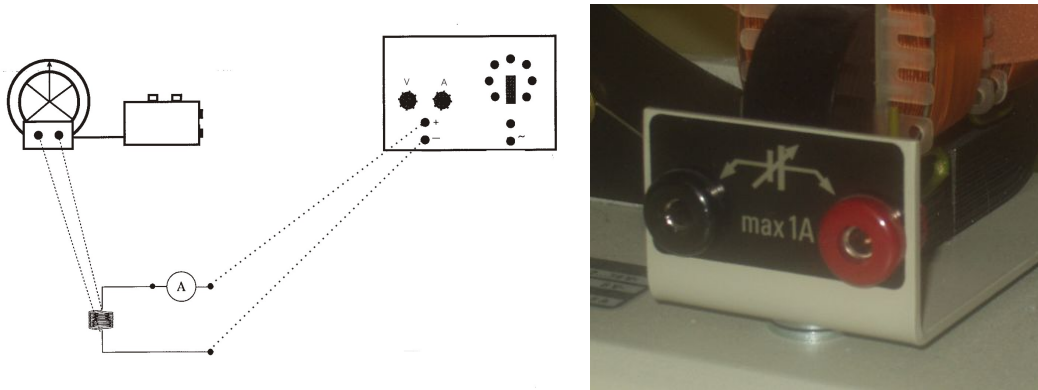
Prilikom proučavanja slobodnih i prigušenih oscilacija, prvo je potrebno kazaljku poluge za prijenos (5) namjestiti u nulti položaj. Zatim se kazaljka njihala (6) rukom pomakne iz ravnotežnog položaja do neke amplitude te pusti da bi se promatralo titranje. Amplituda titranja očitava se na skali (2), a period titranja određuje se zapornom urom. Za preciznije određivanje perioda titranja mjeri se vrijeme potrebno za npr. 10 titraja (kada je to moguće) pa se izmjereno vrijeme podijeli s brojem titraja¹. Za proučavanje prigušenih oscilacija u potkritičnom režimu koristi se izvor istosmjerne struje² (Slika 3a). Struja I_B jakosti manje od $I_{\text{krit}} \approx 1$ A (vidi ograničenje za elektromagnet) mjeri se ampermetrom spojenim u seriju. Izborom napona mijenja se struja I_B , a time i prigušenje. Da bi se izbjeglo pregrijavanje u nadkritičnom režimu, duljina mjerenja se reducira na par minuta.

¹ Možete li matematički pokazati da da je preciznije jednom mjeriti n -terostruki period nego n puta jednostruki period (i koliko točno preciznije)?

² Lijeve potencijometrom (V) određuje se napon izvora, a desni potencijometar (A) služi kao graničnik za maksimalnu jakost struje. Ako je napon takav da bi struja premašila zadanu maksimalnu vrijednost, upali se crvena lampica iznad graničnika.



Slika 2: Elementi mjernog postava.



Slika 3: a) Shema spajanja; b) priklučnice za struju gušenja sa stražnje strane kružnog njihala.

Zadaci

1. Odredite period titranja i karakterističnu kružnu frekvenciju za neprigušeno titranje. Učinite po 3 mjerenja deseterostrukih perioda za 3 različite početne amplitude i provjerite ovisi li rezultat o početnoj amplitudi.
2. Uključite prigušenje i odredite period i frekvenciju prigušenog titranja za 3 različite struje prigušenja.
3. Izmjerite amplitude ϕ_n za desetak uzastopnih titraja (uvijek s iste strane skale). Navedite/opišite postupak kojim ćete mjeriti uzastopne amplitude kod gušenog titranja (po potrebi diskutirajte s voditeljem praktikuma). **Iz jednadžbe (10) prikažite ϕ_n kao funkciju od ϕ_0 .** Transformirajte dobivenu ovisnost tako da bude pogodna za crtanje linearnog grafa. Iz nagiba pravca odredite logaritamski dekrement Λ .
4. Odredite faktor dobrote za ta 3 prigušenja.