FP1–V1. Matematičko njihalo

Ključni pojmovi

Matematičko njihalo, period titranja, harmonijske oscilacije, amplituda

I. TEORIJSKI UVOD

Matematičko njihalo sastoji se od točkaste mase m obješene na donjem kraju niti duljine l. Nit je učvršćena na gornjem kraju i zanemarive je mase. U realnom eksperimentu masa nije koncentrirana u jednoj točki, već je raspodijeljena po cijelom volumenu kugle. No uz uvjet da je polumjer kugle mnogo manji od duljine niti, možemo problem svesti na razmatranje matematičkog njihala.

Otkloni li se kuglica iz položaja ravnoteže, započinje titranje. Period tog titranja može se odrediti na nekoliko načina. Mi ćemo odabrati rješenje pomoću zakona očuvanja energije. Ukupna energija titranja zbroj je kinetičke i potencijalne energije:

$$E_{\mathrm{uk}} = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = \mathrm{const.} \tag{1}$$

Kinetička energija je oblika:

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{ml^2}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{2}$$

a potencijalna energija u položaju određenom kutom otklona ϕ iznosi:

$$E_{\mathrm{p}} = mgl(1-\cos\phi) \tag{3}$$

Ukupnu energiju sustava nalazimo iz uvjeta da u položaju maksimalnog otklona ϕ_{max}, obodna brzina iščezava pa je:

$$E_{\mathrm{uk}} = E_{\mathrm{p}}(\phi_{\mathrm{max}}) = mgl(1-\cos\phi_{\mathrm{max}}) \tag{4}$$

Iz prethodnih jednadžbi slijedi:

$$\mathrm{d}\phi = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\phi - \cos\phi_{\mathrm{max}})}\mathrm{d}t \tag{5}$$

Ako postavimo početni uvjet da u trenutku $t = 0$ njihalo miruje u položaju $\phi(0) = -\phi_{\mathrm{max}}$, možemo odrediti poluperiod titranja:

$$\frac{T}{2} = \int_0^{T/2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{-\phi_{\mathrm{max}}}^{\phi_{\mathrm{max}}}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_{\mathrm{max}}}} \tag{6}$$

Ovaj integral nije rješiv u zatvorenoj formi elementarnih funkcija, ali u slučaju malih amplituda ϕ_{max} možemo primijeniti razvoj u red:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots \tag{7}$$

nakon čega preostaje aproksimativan rezultat:

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-\phi_{\mathrm{max}}}^{\phi_{\mathrm{max}}}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{\phi_{\mathrm{max}}^2 - \phi^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{8}$$

Želimo li ipak odrediti period titranja za velike amplitude, potrebno je integral (6) izraziti pomoću specijalnih funkcija čiji je razvoj u red također poznat. Takav pristup daje izraz:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\,K\Big(\sin\tfrac{\phi_{\mathrm{max}}}{2}\Big) \tag{9}$$

gdje je $K(\cdot)$ tzv. potpuni eliptični integral prve vrste definiran s:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \tag{10}$$

Razvoj tog integrala u red je:

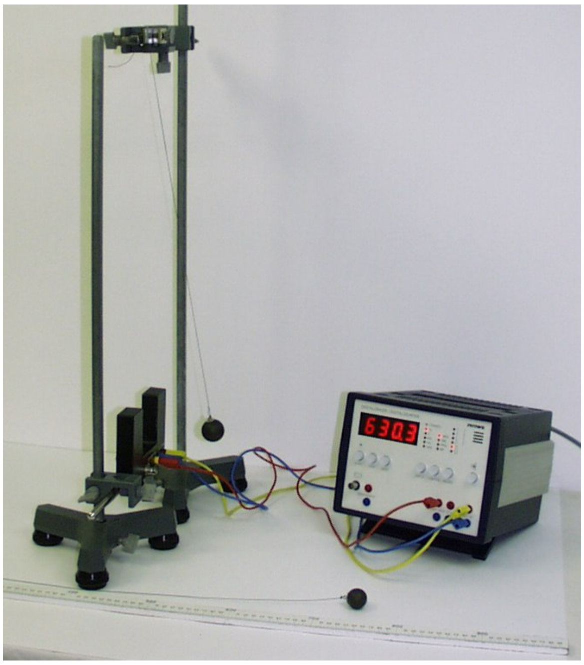
$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k^2}{4} + \cdots\right) \tag{11}$$

pa je period titranja za velike kutove otklona dan razvojem

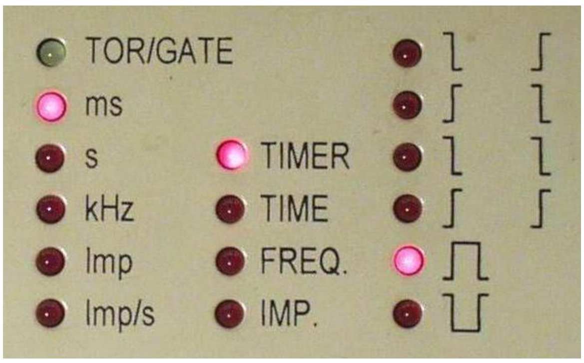
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_{\max}}{2} + \cdots\right) \tag{12}$$

II. MJERNI UREĐAJ I MJERENJE

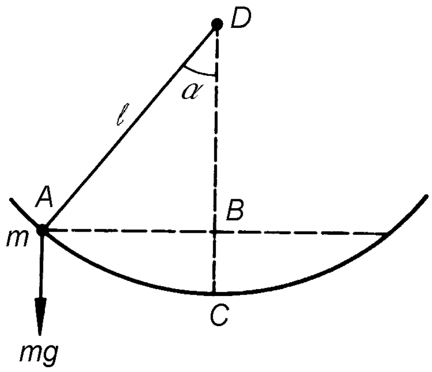
Uređaj za proučavanje matematičkog njihala prikazan je na Slici 1. Na dugačkoj niti zavezana je čelična kugla promjera $2r = 24,4$ mm ili $2r = 32$ mm. U ravnotežnom položaju njihala postavljen je detektor s fotoćelijom. Fotoćeliju je nakon priključivanja na elektroničku zapornu uru (štopericu) potrebno inicijalizirati pritiskom na tipku SET na pozadini fotoćelije. Fotoćelija je spremna za uporabu tek kad crvena lampica trepće pri svakom prekidanju snopa što možete provjeriti i prstom (zaporna ura mora biti uključena, no ne mora mjeriti vrijeme). Kada kugla presiječe svjetlosni snop, detektor šalje signal na elektroničku zapornu uru. Okidač (TRIGGER) zaporne ure namjesti se tako da s primitkom prvog signala počne mjeriti vrijeme, a s primitkom drugog signala se zaustavi (Slika 2). Na taj način očita se poluperiod titranja. Kako bi se izbjegla sustavna pogreška u mjerenju, poluperiod se mjeri s obiju strana detektora. Duljinu niti treba mjeriti prije i poslije mjerenja perioda, a kao relevantnu duljinu uzeti srednju vrijednost. Izmjerenoj duljini valja pribrojiti polumjer kugle. Treba paziti da aproksimacija matematičkog njihala bude ispunjena.



Slika 1: Mjerni uređaj.



Slika 2: Postavke zaporne ure.



Slika 3: Određivanje kuta otklona.

Prvi dio mjerenja izvodimo tako da nit s kuglom učvrstimo u objesište i izmjerimo udaljenost od objesišta do kugle. Otklonimo kuglu za neki mali kut (nekoliko stupnjeva) i očitavamo poluperiod jednak broj puta s obiju strana detektora ne prekidajući uspostavljeno njihanje. Isti postupak ponovimo za deset različitih duljina niti.

U drugom dijelu mjerenja proučavamo ovisnost perioda titranja o kutu otklona. Nit s kuglom učvrstimo u objesište, a duljinu niti više ne mijenjamo tijekom mjerenja. Kutovi otklona mjere se ili izravno pomoću kutomjera ili posredno pomoću priloženog metra učvršćenog na stalku i to na sljedeći način. Dužina DC na Slici 3 prolazi kroz objesište i snop svjetlosti u krugu fotoćelije; točka A je mjesto na kojem je kugla pričvršćena o nit u trenutku maksimalne elongacije. Mjereći duljinu AB i poznavajući duljinu AD, možemo naći kut otklona $\phi_{\max}$ (na slici označen kao $\phi_{\max} = \alpha$).

Zadaci

1. Izmjerite period titranja za male kutove otklona za desetak različitih duljina niti. Prikažite rezultate i u $\log l - \log T$ i u $l - T^2$ dijagramu. U oba slučaja metodom najmanjih kvadrata odredite konstantu gravitacije g. U kakvom su odnosu ova dva rezultata i njihove nepouzdanosti?

2. Izmjerite period titranja za pet različitih kutova otklona. Prikažite grafički ovisnost T o $\sin^2 \frac{\phi_{\max}}{2}$. Slijede li izmjereni rezultati relaciju (12)?