

Poglavlje 3

Elektromagnetski procesi i QED

Činjenica, da uz gravitaciju našim svijetom dominira još i elektromagnetsko međudjelovanje, leži na početku izučavanja koje su započeli Faraday i Maxwell, a do kraja utrljali Feynman, Tomonaga i Schwinger. U spoju dva fizikalna principa, relativistike i kvantne mehanike, formulirana je kvantna elektrodinamika, teorija međudjelovanja elektrona i fotona. U tom spoju uočen je i novi princip, *baždarni princip* (princip lokalne simetrije), koji će nam omogućiti da se otisnemo u svjetove ostalih temeljnih međudjelovanja. Kvantna elektrodinamika (**QED**, od engl. *quantum electrodynamics*), kvantna kromodinamika (**QCD**, od engl. *quantum chromodynamics*) i kvantna dinamika čestičnih vrsta, “okusa” (**QFD**, od engl. *quantum flavourdynamics*) stupovi su razumijevanja temeljnih međudjelovanja na kojima je sagrađena standardna teorija temeljnih čestica i sila.

Pri formulaciji relativističkog opisa međudjelovanja fotona i elektrona, u središtu pažnje su bili procesi raspršenja. Dolaskom kvantne teorije polja na fizikalnu scenu, fizika čestica dobila je primjereni jezik. Od tada fizika čestica postaje najplodnijim tлом za prakticiranje tehnika teorija polja.

Spoj postulata specijalne relativnosti i kvantne mehanike, ako i nije savršen, veliki je iskorak unaprijed — kao metoda uzastopnih približenja. Npr. i dalje postoji Schrödingerova jednadžba za vodikov atom, no u kvantnoj teoriji polja ona više nije egzaktno rješiva! H-atom se više ne može promatrati kao sastavljen samo od protona i elektrona — on sadrži neizmjerljivo mnogo čestica.

3.1 Vezana stanja i stanja raspršenja

U klasičnoj fizici izučavanje elektromagnetizma analogno je izučavanju gravitacijskog privlačenja. No, dok je rješenje Keplerovog problema dano gibanjima po elipsi, paraboli ili hiperboli (koja prikazuju sustav vezanih ili “raspršenih” tijela), za razumijevanje analognog elektromagnetskog problema atomske fizike bilo je

potrebno uvođenje kvantne mehanike. Pri izučavanju subatomske fizike, nakon što uvedemo niz čestica (i ideju da ih opišemo poljima), pozabavit ćemo se načinima kojima one međudjeluju (i načinima da se to međudjelovanje opiše!). Tri su izvora informacija koji nam stoje na raspolaganju:

- ◇ Pokusi raspršenja, primjerice mjerenje kuta otklona čestice projektila na čestici meti;
- ◇ Raspadi čestica, odnosno proučavanje produkata raspada;
- ◇ Proučavanje svojstava vezanih stanja čestica.

Povijesno je ustanovljavano da su čestice, za koje se očekivalo da su “elementarne” (nedjeljive), u stvari složene, vezana stanja temeljnijih sastavnica (konstituenata).

3.1.1 Vezana stanja

Vezani, “atomski sustavi”, za dulje su vrijeme ostali na “marginama” kao nešto što se daje razumjeti nerelativističkom kvantnom mehanikom. Eksperimentalne potvrde kvarkovskog modela bitno su promijenile tu situaciju. Činjenica da se mezoni i barioni pojavljuju kao vezana stanja dva odnosno tri kvarka vraća problem vezanog stanja u okrilje fizike čestica.

Na raznim prečkama naše kvantne ljestve posjeduju vlastite atome — od poznatog nam vodikovog atoma, preko deuterona (“vodikovog atoma” nuklearne fizike), do istinski “čestičnih atoma” od kojih su neki doista neobični.

□ VODIKOV ATOM

Prisjetimo se osnovnih karakteristika vodikova atoma. Dimenziju tog vezanog stanja možemo procijeniti minimiziranjem energije izražene preko neodređenosti u impulsu i položaju elektrona:

$$E \simeq \frac{1}{2m_e} (\Delta p)^2 - \frac{\alpha}{\Delta x}. \quad (3.1)$$

Budući da je neodređenost $\Delta p \sim 1/\Delta x$, energija se može promatrati samo u funkcijskoj ovisnosti o Δx , čiji ekstrem vodi na

$$\Delta x_{min} = r_B = \frac{1}{\alpha m_e} = 5.29 \cdot 10^{-11} \text{ m}. \quad (3.2)$$

Tada je karakteristična energija vezanja, “Rydberg”

$$Ry = \frac{\alpha}{2r_B} = \frac{1}{2} m_e \alpha^2 = 13.6 \text{ eV} \quad (3.3)$$

identificirana kao prvo, u beskonačnom slijedu rješenja Schrödingerove jednadžbe u centralno simetričnom potencijalu:

$$E_n = -\alpha^2 m_e \frac{1}{2n^2} . \quad (3.4)$$

Naime, kad se potencijal

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi r} \quad (3.5)$$

uvrsti u radijalni dio Schrödingerove jednadžbe, normalizabilna rješenja dobiju se samo za specijalne vrijednosti energija

$$E_n = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} , \quad (3.6)$$

za glavne kvantne brojeve

$$n = n_r + l + 1 . \quad (3.7)$$

Rezultirajuća degeneracija u kvantnim brojevima l i m

$$\begin{array}{l} l \Rightarrow 0 \quad 1 \quad \dots \quad n-1 \\ m \Rightarrow 1 \quad 3 \quad \dots \quad 2n-1 \end{array}$$

posljedica je rotacijske simetrije. Degeneracija n -te razine je broj različitih stanja koja dijele isti glavni kvantni broj, a time i istu energiju:

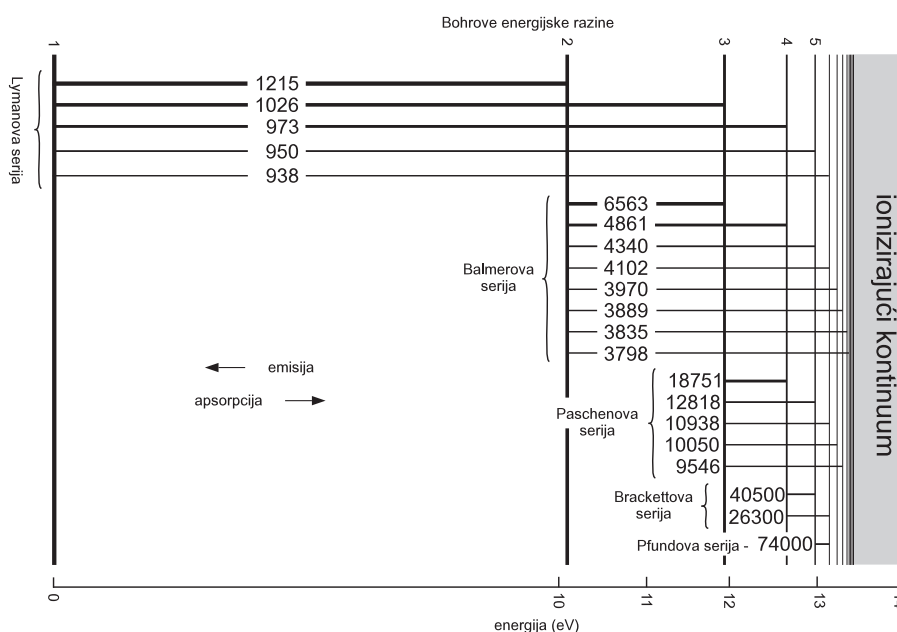
$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = \frac{n}{2} [1 + (2n-1)] = n^2 , \quad (3.8)$$

što postaje $2n^2$ kad se uzme u obzir da elektron posjeduje i dva spinska stanja.

Budući da su energije E_n male u usporedbi s energijom konstituenata u mirovanju (elektrona od 511 keV), riječ je o *nerelativističkom* sustavu. Naime, potencijalna i kinetička energija konfiguracije su komparabilne u veličini (dane virijalnim teoremom). Tek proučavanje fine i hiperfine strukture spektra H-atoma traži relativističke popravke koje će zahtijevati uvođenje Diracove jednadžbe. Te popravke će se odražavati putem odstupanja od spektra danog Rydbergovom formulom (vidjeti sliku 3.1). Energija fotona emitiranog pri prijelazu elektrona s početne na konačnu energijsku razinu atoma

$$E_{fotona} = -\frac{\alpha^2 m_e c^2}{2} \left(\frac{1}{n_{poč}^2} - \frac{1}{n_{kon}^2} \right) \quad (3.9)$$

izravno je proporcionalna frekvenciji, a obrnuto proporcionalna valnoj duljini zračenja.



Slika 3.1: Spektar vodika. Pri prijelazu s jednog stanja na drugo, razlika u energiji manifestira se kao kvant zračenja. Debljina linija naznačuje relativni intenzitet zračenja, čije su valne duljine dane u angstromima

Promotrimo najprije tzv. *finu strukturu* koja dolazi od dva različita mehanizma: od relativističke popravke i od magnetskog vezanja orbitalnog gibanja elektrona s njegovim spinom. Bez ulaženja u potankosti¹, ti se učinci sumiraju u potisnuća svih razina za iznos

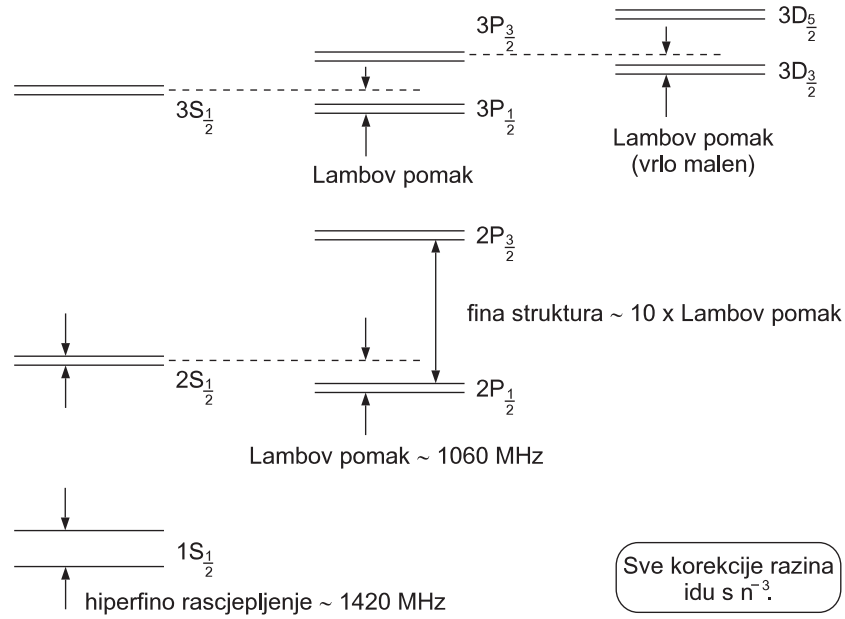
$$\Delta E_{fs} = -\alpha^4 m_e c^2 \frac{1}{4n^2} \left[\frac{2n}{(j + 1/2)} - \frac{3}{2} \right]. \quad (3.10)$$

Pri tome se n -ta razina rascijepi na n podrazina. Uočimo da učinak fine strukture ne ovisi o orbitalnom impulsu vrtnje l , pa će općenito dvije različite vrijednosti l pripadati istoj energiji. Npr., stanja $2S_{1/2}(n = 2, l = 0, j = 1/2)$ i $2P_{1/2}(n = 2, l = 1, j = 1/2)$ trebala bi biti degenerirana. Da to nije tako pokazao je čuveni pokus Lamba i Retherforda iz 1947. godine: S-stanje leži nešto više od P-stanja (vidjeti sliku 3.2).

Taj *Lambov pomak* sama Diracova jednažba ne obuhvaća. Potrebno je uključiti radijacijske popravke koji se pojavljuju kad se osim elektrona i elektromagnetsko polje tretira kvantnomehanički.

Povrh ovih učinaka, energetske razine pokazuju i tzv. *hiperfinu strukturu*. Ona dolazi od uključivanja spina protona ($\hbar/2$), kome je (zbog velike mase protona)

¹vidjeti npr. poglavlje 5 u [?]



Slika 3.2: *Lambovo pomak energijskih razina atoma vodikovog tipa. Taj pomak je veličine hiperfinog rascjepljenja i ne može se razumjeti bez kvantne teorije polja*

pridružen magnetski dipolni moment

$$\vec{\mu}_p = g_p \frac{e}{2m_p} \vec{S}_p, \quad (3.11)$$

puno manji od elektronskog, $e/2m_e$. Giromagnetski faktor $g_p = 2.7928$ odražava činjenicu da proton nije istinski elementarna (točkasta) čestica, nego posjeduje dimenziju i strukturu. Spin jezgre u interakciji je s orbitalnim gibanjem elektrona i sa spinom elektrona. Za stanja s $l = 0$ hiperfina struktura dolazi od “kontaktnog” spin-spin međudjelovanja

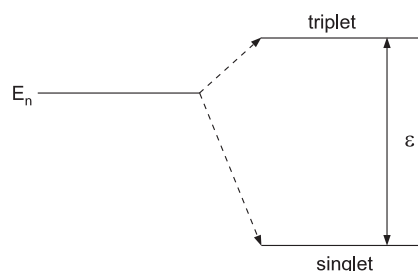
$$\Delta E_{hf} = \frac{m_e}{m_p} \alpha^4 m_e c^2 \frac{4g_p}{3n^3} \left[f(f+1) - \frac{3}{2} \right], \quad (3.12)$$

gdje je $f = 0$ za singletno stanje (spin protona i elektrona u suprotnom smjeru) i $f = 1$ u tripletnom stanju (s paralelnim spinovima) – vidjeti sliku 3.3. Rascjepljenje za $n = 1$ iznosi

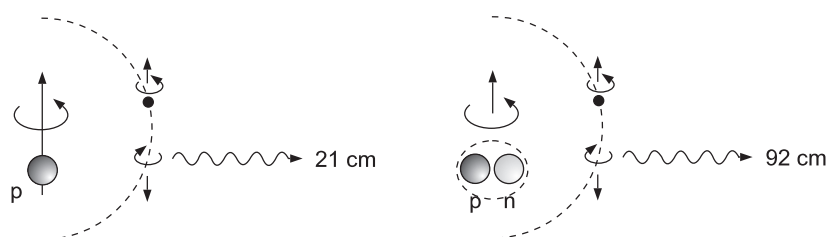
$$\epsilon = E_{triplet} - E_{singlet} = \frac{32}{3} \frac{g_p E_1^2}{m_p c^2} \quad (3.13)$$

i vodi na čuvenu 21 cm liniju mikrovalne astronomije (vidjeti sliku 3.4):

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{\epsilon} = 21.1 \text{ cm.} \quad (3.14)$$



Slika 3.3: Hiperfino rascijepljenje razine E_n (za $l = 0$), koja već sadrži finu strukturu i Lambov pomak



Slika 3.4: Porijeklo važnih spektralnih linija mikrovalne astronomije

Istim mehanizmom okretanja spina elektrona (“spin-flipp-om”) deuterij (atom s np-jezgom) pokazuje svoju prisustnost u svemiru putem 92 centimetarskog zračenja.

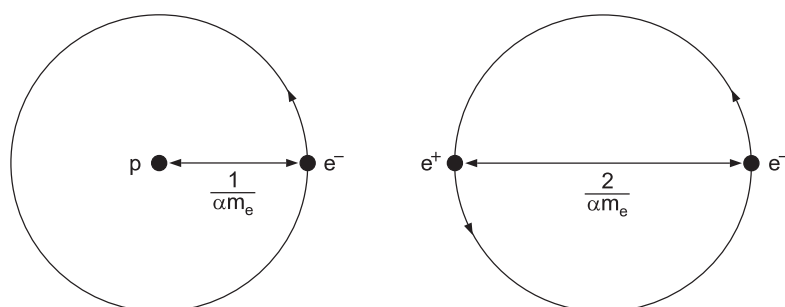
□ POZITRONIJ

Vezano stanje elektrona i pozitrona najjednostavnije je u nizu “egzotičnih” atoma kao što su to mionski vodik ($p^+\mu^-$), pionski vodik ($p^+\pi^-$), pozitronij (e^+e^-) i mionij (μ^+e^-). Neposredno po otkriću pozitrona hrvatski fizičar Stjepan Mohorovičić [?] predviđa mogućnost da ta čestica bude uhvaćena elektronom u “elektrum”, koji bi imao spektralne linije slične onima vodikova atoma. Obično se teorijska analiza pripisuje Pirenneu, desetljeće kasnije (1944). U laboratoriju je pozitronij proizveo Deutsch 1951. godine, a interes za njega obnovio se otkrićem J/Ψ čestice 1974. (vidjeti npr. revijalni prikaz, [?]).

Činjenica da se kod pozitronija radi o česticama iste mase vodi na polovičnu reduciranu masu i dvostruki Bohrov radijus u odnosu na vodikov atom (vidjeti sliku 3.5):

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \begin{cases} m_e & \text{za H-atom} \\ m_e/2 & \text{za pozitronij} \end{cases} \quad (3.15)$$

$$r_B = \frac{1}{\alpha \mu} = \begin{cases} 1/\alpha m_e & \text{za H-atom} \\ 2/\alpha m_e & \text{za pozitronij} \end{cases} \quad (3.16)$$



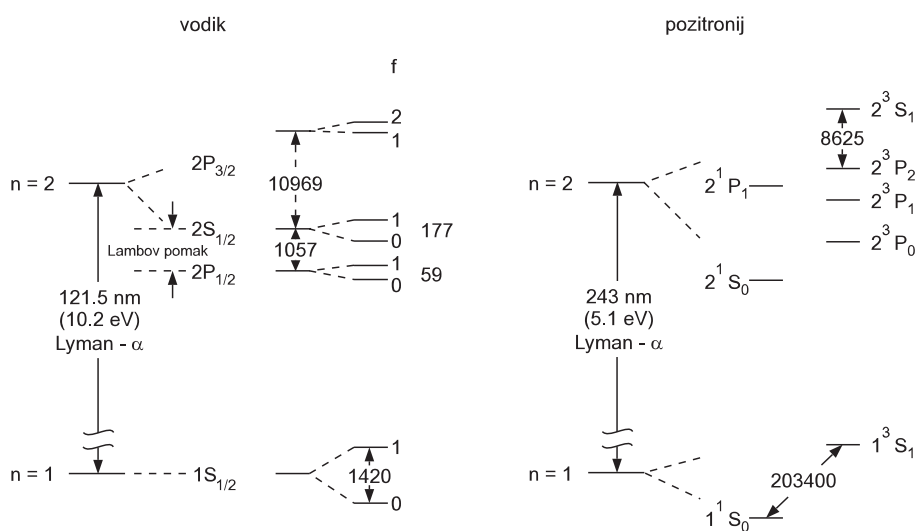
Slika 3.5: Rotacija oko jezgre H-atoma u usporedbi s rotacijom oko zajedničkog središta kod pozitronija

Bohrova formula za pozitronij modificirat će se supstitucijom

$$m \rightarrow \frac{m}{2}, \quad (3.17)$$

$$E_n^{\text{pozitronij}} = \frac{1}{2} E_n = -\alpha^2 m c^2 \frac{1}{4n^2}. \quad (3.18)$$

Fina struktura pozitronija također će se modificirati, na oblik (vidjeti sliku 3.6)



Slika 3.6: Usporedba osnovnog stanja ($n = 1$) i prvog pobuđenog stanja ($n = 2$) vodika i pozitronija (energije rascijepljenja izražene su u MHz $\simeq 4.13 \cdot 10^{-9}$ eV)

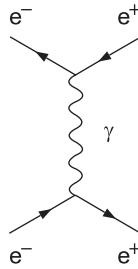
$$E_{fs}^{\text{pozitronij}} = \alpha^4 m c^2 \frac{1}{2n^3} \left[\frac{11}{32n} - \frac{(1 + \epsilon/2)}{2l + 1} \right], \quad (3.19)$$

gdje je za spinski singlet $\epsilon = 0$, dok je za tripletnu kombinaciju

$$\epsilon = \begin{cases} -\frac{3l+4}{(l+1)(2l+3)} & j = l+1 \\ \frac{1}{l(l+1)} & j = l \\ \frac{3l-1}{l(2l-1)} & j = l-1 \end{cases} \quad (3.20)$$

očigledno različit za $j = l-1, l, l+1$. “Slučajne” degeneracije na razini fine strukture ovdje nema, pa Lambov pomak gubi na značenju. Napomenimo da je u izraz za finu strukturu uključen i dio koji kod vodika slovi kao “hiperfin”. Naime, kod pozitronija nema potisnuća od omjera (m_e/m_p).

No zato kod pozitronija postoji potpuno nova korekcija razinama, koja proizlazi iz mogućnosti privremene (virtuelne) anihilacije elektrona i pozitrona u foton. Feynmanov prikaz tog procesa predočen je na slici 3.7 Budući da to zahtijeva da



Slika 3.7: Poništenje para elektrona i pozitrona, koje utječe na spektar pozitronija

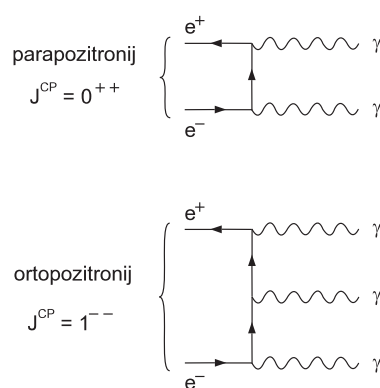
se par e^+e^- nađe u istoj točki, ta je smetnja razmjerna s $|\psi|^2$ te se pojavljuje samo za $l = 0$. Nadalje, foton može odnijeti spin 1 samo ako se anihilacija dogodi u tripletnoj konfiguraciji. Pokazuje se da taj učinak vodi na podizanje tripletnih S stanja za iznos

$$\Delta E_{anh.} = \alpha^4 mc^2 \frac{1}{4n^3}, \quad (l = 0, s = 1). \quad (3.21)$$

Dakle, riječ je o učinku analognom rascijepljenju prikazanom na sl. 3.3: energija tripletnog ortopositronija nešto je viša od one singletnog parapozitronija. Fizički objašnjenje tog učinka je slijedeće. U pokušaju približavanja elektrona i pozitrona paralelnih spinova treba svladavati magnetsko odbijanje, dok je za antiparalelne spinove magnetska sila privlačna i pomaže električnom privlačenju.

□ RASPAD POZITRONIJA: ORTOPOZITRONIJ I PARAPOZITRONIJ

Za razliku od vodika, pozitronij može potpuno izanihilirati, primjerice u dva ili tri fotona. Izborno pravilo diktirano je nabojnom konjugacijom kao simetrijom elektromagnetskih međudjelovanja. Kad promatramo stanje najnižeg impulsa vrtnje staze ($l = 0$), razlikujemo *parapozitronij*, singletno stanje ukupnog impulsa vrtnje 0 i *ortopozitronij*, tripletno stanje s impulsom vrtnje 1. Budući da je svojstvena vrijednost operatora nabojne konjugacije tih stanja dana s $(-1)^{l+s}$, a za stanje n fotona $(-1)^n$, prvo se od tih stanja može raspasti na paran, a drugo na neparan broj fotona (sl. 3.8). Teorijski proračun vremena života (zadatak 3.7)



Slika 3.8: Budući da je raspad ortopozitronija proces višeg reda u konstanti fine strukture, ortopozitronij će živjeti dulje od parapozitronija

$$\tau ({}^1S_0 \rightarrow 2\gamma) \simeq 1.24 \cdot 10^{-10} \text{ s} \quad (3.22)$$

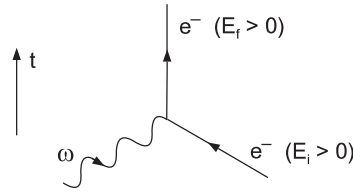
$$\tau ({}^3S_1 \rightarrow 3\gamma) \simeq 1.39 \cdot 10^{-7} \text{ s} \quad (3.23)$$

u dobrom je slaganju s mjerenim vrijednostima.

Vratimo se još jednom na analogiju vezanih atomskih sustava i planetarnih sustava. Za razliku od takvih sustava čiji su konstituenti kroz dugo vrijeme u kontaktu (za atome je primjenljiva nerelativistička kvantna mehanika u Schrödingerovoj formulaciji), u svijetu elementarnih čestica susrećemo dvije situacije kada akteri međudjeluju samo u vrlo kratkim prostorno-vremenskim intervalima – raspršenja i raspade čestica.

3.1.2 Elementarni procesi raspršenja

Čak i pri izučavanju vezanih stanja običava se polaziti od slobodnih čestica. Tako ćemo se za elektromagnetsko polje ograničiti na *polje zračenja*, dok će ostatak ući u kulonske efekte vezanja.


 Slika 3.9: *Apsorpcija fotona elektronom pridružena izrazu (3.24)*

Naš cilj bit će proračunavanje prijelaznih vjerojatnosti i udarnih presjeka raspršenja. Za sada raspolažemo samo valnim funkcijama za slobodne čestice. Kako uključiti interakcije?

□ KOVARIJANTNI PRISTUP I VIRTUELNE ČESTICE

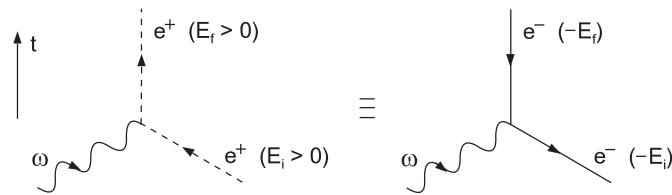
U odjeljku ?? prikazali smo “jednostruko” i “dvostruko” raspršenje na način na koji se ono tretira u nerelativističkoj teoriji smetnje. Ovdje će posao (račun smetnje) trebati obaviti na kovarijantan način.

Kovarijantni opis odnosit će se na situaciju koju susrećemo u fizici čestica — raspršenje jedne čestice na drugoj (ili na njenom elektromagnetskom potencijalu V) opisat ćemo emisijom ili apsorpcijom fotona.

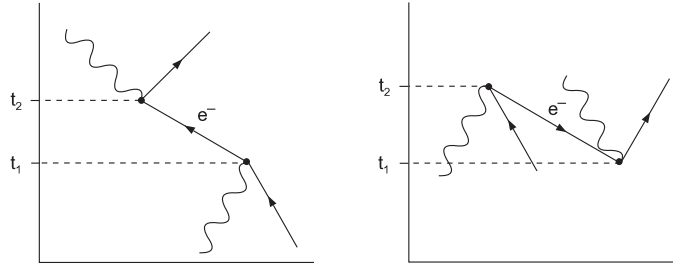
Promotrimo li očuvanje energije pri takvom elementarnom procesu (sl 3.9, gdje V poprima vremensko ponašanje $e^{-i\omega t}$ za upadni foton energije ω), amplituda

$$\sim \int (e^{-iE_f t})^* e^{-i\omega t} e^{-iE_i t} dt = 2\pi\delta(E_f - \omega - E_i), \quad (3.24)$$

karakterizirana je očuvanjem energije $E_f = E_i + \omega$. Isto očuvanje energije vrijedit će ako raspršenje na pozitronu prikažemo raspršenjem na elektronu negativne energije koji se giba unatraske u vremenu (sl. 3.10)


 Slika 3.10: *Raspršenje na pozitronu pridruženo izrazu (3.25)*

$$\sim \int (e^{-i(-E_i)t})^* e^{-i\omega t} e^{-i(-E_f)t} dt = 2\pi\delta(-E_i - \omega + E_f). \quad (3.25)$$



Slika 3.11: U nekovarijantnom pristupu čestice u međustanju su na ljusci mase ($p^2 = m^2$)

Smjer strelica označuje “ulaz (i)” i “izlaz (f)”, a u skladu s time formira se matični element

$$\int \phi_f^* V \phi_i d^4x . \quad (3.26)$$

Dakle, amplituda prijelaza ima kovarijantni zapis

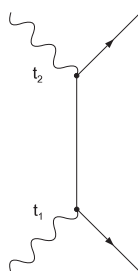
$$T_{fi} = -i \int d^4x \phi_f^*(x) V(x) \phi_i(x) . \quad (3.27)$$

No, u drugom redu računa smetnje uočit ćemo bitnu razliku nekovarijantnog i kovarijantnog pristupa. Vremenski račun smetnje daje u drugom redu

$$T_{fi}^{(2)} = -i \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n} V_{ni} 2\pi \delta(E_f - E_i) . \quad (3.28)$$

Temeljne sastavnice dijagramatskog opisa uočit ćemo na primjeru raspršenja fotona na elektronima ($\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$). U pristupu nerelativističke teorije smetnje to su vrhovi V_{ni} (u kojima su očuvani 3-impulsi, ali ne i energije) i energijski nazivnici (propagatori $1/(E_i - E_n)$), prema dijagramima na sl. 3.11. Tome suprotstavimo kovarijantni opis Feynmanovim dijagramom na sl. 3.12 u kome čestica u međustanju odgovara elektronu, ako je $t_2 > t_1$, a za $t_2 < t_1$ čestica u međustanju odgovara pozitronu. Ovdje su četveroimpulsi, dakle i energija i 3-impuls, očuvani u svakom vrhu, no čestice u međustanju nisu na ljusci mase, ($p^2 \neq m^2$). Takve čestice nazivamo *virtualnima*.

Na prethodnim slikama uočili smo da fotonsko polje A mora obuhvaćati emisiju ili apsorpciju fotona, a fermionsko polje ψ apsorpciju (poništenje) elektrona ili emisiju (stvaranje) pozitrona. Bez ulaženja u detalje kvantizacije Diracovog i Maxwellovog polja (tome je posvećen odjeljak 3.2, koji se pri prvom čitanju može preskočiti), sama ta činjenica da svako polje uključuje mogućnost stvaranja i

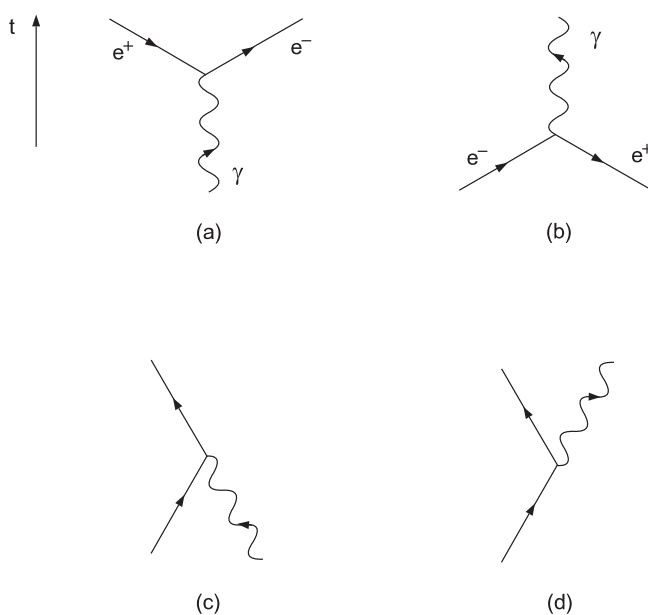


Slika 3.12: Virtualno stanje u kovarijantnom pristupu

poništenja čestice omogućuje da temeljno elektromagnetsko međudjelovanje \mathcal{L}_{int} napišemo u obliku produkta

$$\mathcal{L}_{int} \sim (\text{stvaranje } e^- + \text{poništenje } e^+) \times (\text{stvaranje } e^+ + \text{poništenje } e^-) \times (\text{stvaranje } \gamma + \text{poništenje } \gamma). \quad (3.29)$$

Taj produkt sadrži kombinacije čestica koje obuhvaćaju elementarne procese pri-



Slika 3.13: Temeljni procesi koje mora obuhvaćati teorija elektromagnetskog međudjelovanja : (a) stvaranje para; (b) poništenje para; (c) fotoelektrični efekt; (d) kočno zračenje. Dijagrami su crtani tako da vrijeme teče prema gore

kazane na slici 3.13. U stvarnosti, ovi se procesi ne mogu odvijati bez prisutnosti dodatnih čestica. Naime, očuvanje energije i impulsa zahtijeva:

- ◇ zabranu raspada slobodnog fotona u par čestica-antičestica;
- ◇ da poništenje para slobodnih čestica ide uz emisiju barem dva fotona;
- ◇ da se fotoelektrični efekt odvija na *vezanom* elektronu;
- ◇ da se kočno zračenje pojavljuje kod *ubrzan*e nabijene čestice.

Potrebna prisutnost dodatne čestice koja će omogućiti očuvanje energije i impulsa upućuje na postojanje dodatnog procesa raspršenja. U jeziku računa smetnje, riječ je o dvostrukom raspršenju, o drugom redu računa smetnje. Time smo upućeni na kovarijantni račun smetnje s virtualnim česticama, koji se formulira na kovarijantni način. No, temelji razumijevanja elektromagnetskih međudjelovanja postavljene su dosta prije ustanovljavanja kovarijantnog računa smetnje. Uspješnim opisom i u okviru starog, nekovarijantnog računa, elektromagnetsko međudjelovanje nametalo se kao uzor opisa paralelno izučavanog jakog i slabog međudjelovanja (vidjeti bilješke na kraju poglavlja).

3.1.3 Vjerojatnosti sudaranja i vjerojatnosti raspada

□ RASPRŠENJA

Počnimo od primjera iz klasične elektrodinamike. Raspršenjem svjetlosti na slobodnim elektronima mjeri se veličina mete. Vjerojatnost tog raspršenja, Thomsonov udarni presjek

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2, \quad (3.30)$$

vodi na klasični radijus elektrona, $r_e = \alpha/m_e \simeq 2.82 \cdot 10^{-15} m$.

Slično možemo elektronima “obasjavati” spremnike s vodikom (protonske mete). Kakve će čestice izlaziti u konačno stanje, ovisit će o energiji projektila. Kako se povećava energija, dolazit ćemo preko elastičnih raspršenja

$$e + p \rightarrow e + p$$

do neelastičnih raspršenja. Ovisno o energiji projektila moći će se stvarati različite čestice, primjerice

$$e + p \rightarrow e + p + \gamma ,$$

$$e + p \rightarrow e + p + \pi^0 ,$$

ili

$$e + p \rightarrow e + \Sigma^+ .$$

Za svaki pojedini kanal (i-ti proces) uvodi se *ekskluzivni* udarni presjek σ_i , a ukoliko se konačna stanja ne ispituju, mjeri se ukupni, *inkluzivni* udarni presjek

$$\sigma_{tot} = \sum_i \sigma_i. \quad (3.31)$$

Još je uočljivija ovisnost udarnog presjeka o izboru projektila. Zamijenimo li elektronski snop projektilima koji su pioni (π) ili neutriini (ν), hijerarhija udarnih presjeka

$$\sigma_\pi \gg \sigma_e \gg \sigma_\nu \quad (3.32)$$

govori da su u igri različita temeljna međudjelovanja.

Za svako dano raspršenje, broj sudara ovisit će prvo o intenzitetu snopa (broju čestica-projektila koje prelete u sekundi kroz jediničnu površinu) te o ukupnom broju atoma-meta (površini mete). Stoga su nuklearni fizičari ovo posljednje, površinski presjek nukleona koji je otprilike 10^{-24} cm^2 , odabrali kao osnovnu mjeru *udarnog presjeka*: 1 barn = 10^{-24} cm^2 . Pri tome udarni presjek iskazuje vjerojatnost da se čestica-projektil i čestica-meta sudare. Engleska riječ *barn* (štagalj) trebala bi dočarati nešto što je u nuklearnoj fizici dosta veliko, da pri sudaru ne bude promašeno.

Događaji za kojima se traga u subnuklearnoj fizici puno su rjeđi i iskazuju se mnogo manjim jedinicama (mili-, mikro-, nano- i pikobarnima). Pikobarn je milijuntinika milijuntinke barna, 1 pb = 10^{-36} cm^2 . Kojim se intenzitetom događa sudaranje, određuje se množenjem udarnog presjeka s brojem meta i intenzitetom snopa.

Pokusi na sudarivačima vodili su na uvođenje nove pogodne veličine. Trebalo je definirati veličinu koja odgovara umnošku intenziteta i broja meta, te se njenim množenjem s udarnim presjekom dobiva intenzitet sudaranja. Tu novu veličinu, *luminoznost*, definiramo brojem presretanja čestica dvaju snopova. Luminoznost je dakle svojstvo snopova, a ne samih procesa koje želimo proučavati. Snopovi današnjih sudarivača imaju luminoznosti reda $10^{31} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ (primjerice $2.2 \cdot 10^{31}$ za LEP, dok Cornellov CESR postiže više od 10^{32}).

Da bi se stekao osjećaj što se nekim sudarivačem može postići, upotrebljava se pojam *integrirane luminoznosti*, ukupne akumulirane luminoznosti na danom sudarivaču, tijekom određenog vremena njegovog rada. Npr. LEP je tijekom 1993. godine isporučio dozu ukupne luminoznosti od 40 recipročnih pikobarna. O kako je velikom broju riječ dočarat će nam usporedba da se tim brojem kvarkova može pokriti novčić, a istim brojem atoma prekrili bi cjelokupnu površinu Zemlje. Integrirani luminoznost jednog recipročnog pikobarna (10^{36} po cm^2) postiže se danas na LEP-u ili tevatronu u jednom danu.

Istaknimo još jednu zabilježenu pojavu, *rezonantno raspršenje*. Kod izvjesne energije projektila, čestice “vole” biti u međudjelovanju, pa se u blizini rezonance

promijeni uobičajeno ponašanje udarnog presjeka (da udarni presjek bude razmjeran vremenu koje projektil provede u blizini mete, odnosno da pada s brzinom projektila). Skokovi u udarnom presjeku su način otkrivanja kratkoživućih čestica.

□ RASPADI ČESTICA

Strogo govoreći, raspadi čestica su nešto što ne postoji u “čistoj” QED. Naime, QED ne raspolaže mehanizmom koji bi omogućavao da elektron jednostavno završi u nekom dijagramu (bez da iz njega izađe). Isto tako QED ne omogućuje pretvorbu jednog fermiona u drugi (primjerice miona u elektron). No zato postoji mogućnost raspada vezanih čestičnih sustava, poput pozitronija ili kvarkonija. U jeziku QED-a ti se raspadi iskazuju raspršenjima, primjerice $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$ za raspad pozitronija ili $\bar{q} + q \rightarrow \gamma + \gamma$ za raspad neutralnog piona. Za razliku od procesa raspršenja koje ćemo detaljno opisati u odjeljku 3.3.3, gdje su orijentacije spina slučajne pa se po njima usrednjava, vezana stanja posjeduju dobro definiranu (singletnu ili tripletnu) konfiguraciju.

Osim kod “umjetno stvorenih” kratkoživućih čestica, čiji se raspadi svode na anihilaciju u fotone, raspade u njihovom punom sjaju naći ćemo u “prirodnoj radioaktivnosti” koja razotkriva neobične čestične pretvorbe. Tako se β^- raspadi atomskih jezgara svode na nukleonsku “transmutaciju” (neutrona u proton) uz emisiju para leptona stvorenih u trenutku raspada,

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e .$$

Vrijeme raspada, ili njoj recipročna vjerojatnost (širina) raspada odražava kvantno mehaničku prirodu ovakvih procesa. U uzorku velikog broja čestica, raspadi se dešavaju slučajno. Od $N(t)$ čestica koje postoje u trenutku t dio ΓN od njih raspast će se u slijedećem intervalu dt i time uzrokovati promjenu (smanjenje) uzorka za $dN = -\Gamma N dt$. Odatle izlazi eksponencijalni zakon raspada

$$N(t) = N(0)e^{-\Gamma t}, \quad (3.33)$$

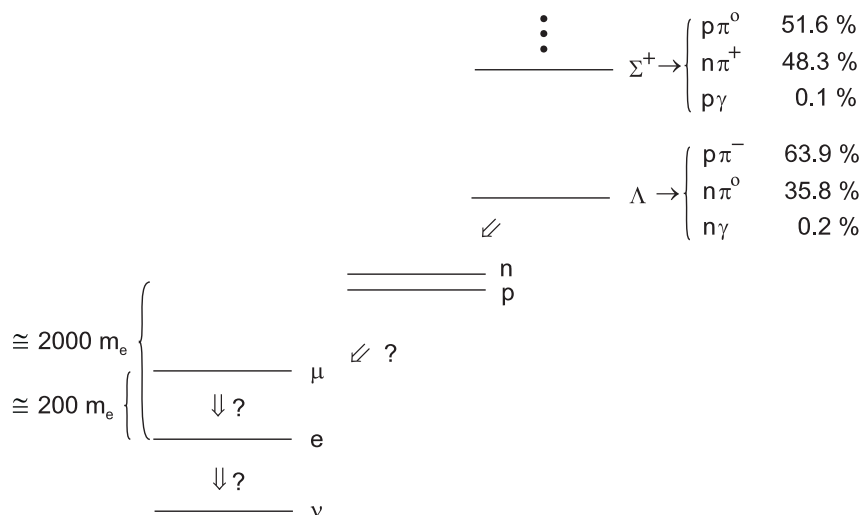
gdje je *srednji život* čestice dan s recipročnom vrijednosti širine raspada, $\tau = 1/\Gamma$. U nuklearnoj se fizici tradicionalno rabi *poluživot* $t_{1/2}$, vrijeme potrebno da se raspadne polovica početnog uzorka. Pri tome vrijedi relacija, $t_{1/2} = \tau \ln 2$.

U tabeli elementarnih čestica uočiti ćemo da se niz čestica može raspasti na više različitih načina. Ukupna vjerojatnost bit će tada dana sumom parcijalnih širina raspada,

$$\Gamma_{tot} = \sum_i \Gamma_i, \quad (3.34)$$

gdje su zasebni kanali raspada karakterizirani *omjerima grananja*, B_i (grananje i -tog kanala = Γ_i/Γ_{tot}). Na slici 3.14 dajemo primjer nekih omjera grananja, kojima

se fermionske čestice “urušavaju” na raspoloživa stanja niže energije. Neopažanje raspada protona, miona i elektrona iskazuje se *izbornim pravilima* spomenutim u odjeljku ??, očuvanjima barionskog, leptonskih i električnog naboja.



Slika 3.14: Jedno od temeljnih načela koje slijedi priroda jest spuštanje na stanja niže energije. Podrobnosti takvih prijelaza razotkrivaju tajne unutrašnjih mehanizama, a odsutnost nekih prijelaza izazov je za daljnja izučavanja. Naime, do sada izučena međudjelovanja ne vode do prijelaza (označenih upitnikom) na leptone kao najniža fermionska stanja

3.2 U(1) simetrična kvantna elektrodinamika, QED

3.2.1 Baždarno načelo i elektromagnetsko međudjelovanje

Lagrangian koji u klasičnoj fizici opisuje gibanje nabijene čestice (električnog naboja q) u elektromagnetskom polju (tj. Euler-Lagrangeovom jednadžbom reproducira Lorentzovu silu) dan je s

$$L(\vec{x}, \vec{v}, t) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - q\phi(\vec{x}, t) + q\vec{A}(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}. \tag{3.35}$$

Pri tome se kanonski impuls dan s

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + q\vec{A}, \tag{3.36}$$

razlikuje od kinematičkog impulsa $m\vec{v}$. Hamiltonian je

$$H(\vec{x}, \vec{p}, t) = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi. \quad (3.37)$$

Preuredimo to na način

$$E - q\phi = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2, \quad (3.38)$$

tako da su očigledne supstitucije na lijevoj i desnoj strani, kojima se od slobodne čestice dolazi na gibanje čestice u elektromagnetskom polju. Objedinjeno u četvernotaciji, riječ je o minimalnoj supstituciji

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - qA^\mu. \quad (3.39)$$

Kvantna preskripcija iz odjeljka ??

$$E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow \frac{1}{i}\nabla \quad (3.40)$$

morat će se sada poopćiti za Hamiltonian $H(p - qA)$ koji vodi na korektnu Lorentzovu silu:

$$\partial^\mu \rightarrow \partial^\mu + iqA^\mu \equiv D^\mu. \quad (3.41)$$

Pokazat ćemo da se *kovarijantna derivacija* D_μ pojavljuje zbog zahtjeva *lokalne*, baždarne simetrije – zahtjeva za slobodu da u svakoj prostorno-vremenskoj točki načinimo (za polje s električnim nabojem) nezavisnu promjenu (rotaciju) faze polja.

Očuvane naboje (Q, B, L) fermionskih polja pripisali smo invarijantnosti Lagrangiana Diracova polja

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x). \quad (3.42)$$

na globalne transformacije faze. Primjerice, očuvanje električnog naboja Q posljedica je invarijantnosti \mathcal{L}_0 na *globalne* $U(1)$ transformacije

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) \equiv \exp\{iQ\theta\}\psi(x), \quad (3.43)$$

gdje je $Q\theta$ slobodna realna konstanta. Sama faza polja $\psi(x)$ nema fizikalno značenje.

Ispitajmo sada mogućnost analogne simetrije na lokalnu transformaciju, kada se *globalna* θ zamijeni prostorno-vremenski ovisnom, *lokalnom* fazom $\theta = \theta(x)$. Simetrija lagrangiana je narušena, jer derivacija djeluje na lokalnu fazu:

$$\partial_\mu\psi(x) \rightarrow \exp\{iQ\theta\}(\partial_\mu + iQ\partial_\mu\theta)\psi(x). \quad (3.44)$$

Izbor fazne konvencije u jednoj točki, prisiljavao bi nas da se ista fazna konvencija mora primjeniti u svim prostorno-vremenskim točkama — što izgleda neprirodno.

Baždarni princip bit će zahtjev da simetrija na $U(1)$ transformacije faze vrijedi *lokalno*. No tada će u lagrangianu morati postojati dodatni član, koji će poništiti član $\partial_\mu\theta$ u (3.44). Budući da član $\partial_\mu\theta$ posjeduje vektorski Lorentzov indeks, to vodi na uvođenje vektorskog polja $A_\mu(x)$, koje se i samo transformira na način:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) \equiv A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu\theta . \quad (3.45)$$

Pogodno je uvesti kovarijantnu derivaciju, uz $q = eQ$, $e = |e|$ u (3.41)

$$D_\mu\psi(x) \equiv [\partial_\mu + ieQA_\mu(x)] \psi(x) , \quad (3.46)$$

koja ima traženo svojstvo da se transformira kao i samo polje:

$$D_\mu\psi(x) \rightarrow (D_\mu\psi)'(x) \equiv \exp\{iQ\theta\} D_\mu\psi(x) . \quad (3.47)$$

Novi lagrangian

$$\mathcal{L} \equiv i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu D_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) = \mathcal{L}_0 + eQA_\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \quad (3.48)$$

invarijantan je na lokalne $U(1)$ transformacije. Dakle, zahtjev lokalne simetrije u sektoru fermionskih “polja materije” povlači postojanje baždarnog vektorskog polja A_μ u interakciji sa strujom fermiona.

Želimo li da A_μ bude istinski propagirajuće polje, morat ćemo dodati baždarno invarijantan kinetički član

$$\mathcal{L}_{\text{Kin}} \equiv -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} , \quad (3.49)$$

gdje je $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ tenzor jakosti elektromagnetskog polja. Maseni član baždarnog polja, $m^2 A^\mu A_\mu/2$, narušavao bi baždarnu simetriju te je stoga zabranjen. Baždarni princip predviđa bezmaseni foton!

3.2.2 Foton kao elementarna čestica

Osnove QED postavio je Dirac početkom 1927. godine, pri proučavanju međudjelovanja atoma s *poljem zračenja*. Zračenje će biti opisano sumom harmoničkih oscilatora, kvantiziranih pomoću komutacijske relacije koju trebaju zadovoljavati poopćene koordinate i impulsi (vidjeti primjerice odjeljak 24 u [?]),

$$H(p, q) = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) , \quad [p, q] = \hbar/i . \quad (3.50)$$

Prijelaz na nove koordinate

$$a = \frac{\omega q + ip}{\sqrt{2\hbar\omega}}, \quad a^\dagger = \frac{\omega p - ip}{\sqrt{2\hbar\omega}} \quad (3.51)$$

daje jednostavni prikaz

$$H = \hbar\omega (a^\dagger a + 1/2), \quad [a, a^\dagger] = 1. \quad (3.52)$$

Prijelaz s jednog oscilatora na sumu beskonačno njih, daje hamiltonian zračenja

$$H^{zrač} = \sum_{j, \vec{k}} \hbar\nu \left[a_j^\dagger(\vec{k}) a_j(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right], \quad (3.53)$$

kvantiziran uvjetom

$$[a_j(\vec{k}), a_{j'}^\dagger(\vec{k}')] = \delta_{jj'} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}. \quad (3.54)$$

Na određeni način to mora biti ekvivalentno energiji elektromagnetskog polja

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right). \quad (3.55)$$

Da bi postigli samo dva stanja polarizacije elektromagnetskih valova nametnut ćemo na komponente četveropolja A^μ dva uvjeta:

$$A_0(x) = 0, \quad \nabla \cdot \vec{A}(x) = 0. \quad (3.56)$$

Izrazimo li polja vektorskim potencijalom $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t$, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\dot{\vec{A}}^2 + (\nabla \times \vec{A})^2 \right]. \quad (3.57)$$

Uvodimo kvantizirano polje zračenja, *operator polja*

$$\vec{A}(x) = \text{“} \sum_{\vec{k}, i} \text{”} \left[\vec{\epsilon}_{\vec{k}, i} a_{\vec{k}, i} e^{-ik_\mu x^\mu} + \vec{\epsilon}_{\vec{k}, i}^\dagger a_{\vec{k}, i}^\dagger e^{ik_\mu x^\mu} \right] \quad (3.58)$$

gdje “ \sum ” ovisi o normalizaciji i sustavu jedinica. Primjerice, u konačnom volumenu V , za Heavyside-Lorentzove racionalizirane jedinice

$$\text{“} \sum_{\vec{k}, i} \text{”} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, i} c \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}, \quad (3.59)$$

dok je u Gaussovima jedinicama

$$\sum_{\vec{k}, i}'' = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, i} c \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}}. \quad (3.60)$$

U kontinuiranoj normalizaciji gornje relacije postaju

$$\sum_{\vec{k}}'' \equiv \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\omega)(2\pi)^3}} \quad (3.61)$$

$$\delta_{\vec{k}\vec{k}'} \equiv (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (3.62)$$

gdje je $k^0 \equiv \omega$. Operatorska priroda polja zračenja (impulsa \vec{k} i polarizacije $\vec{\epsilon}_{\vec{k}i} \perp \vec{k}$, za $i = 1, 2$) sadržana je u koeficijentima — operatorima stvaranja (a^\dagger) i poništenja (a)

$$[a_{\vec{k}i}, a_{\vec{k}'j}^\dagger] = \delta_{ij} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}; \quad (3.63)$$

$$[a_{\vec{k}i}, a_{\vec{k}'j}] = [a_{\vec{k}i}^\dagger, a_{\vec{k}'j}^\dagger] = 0. \quad (3.64)$$

Naime, pomoću tih operatora definiran je Hilbertov prostor (Fockov prostor) stanja određenog broja pobuđenja različitih frekvencija: vakuum $|0\rangle$ je definiran kao stanje bez fotona. Jednočestično stanje dobijemo djelovanjem operatora stvaranja na vakuum, $|\vec{k}, i\rangle = a_{\vec{k}i}^\dagger |0\rangle$ i normirano je na jedinicu:

$$\langle \vec{k}', j | \vec{k}, i \rangle = \langle 0 | a_{\vec{k}'j} a_{\vec{k}i}^\dagger | 0 \rangle \quad (3.65)$$

$$= \langle 0 | [a_{\vec{k}'j}, a_{\vec{k}i}^\dagger] | 0 \rangle \quad (3.66)$$

$$= \delta_{ij} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}. \quad (3.67)$$

Višečestična stanja definiramo djelovanjem umnoška operatora stvaranja na vakuum

$$|\vec{k}_1, i_1; \vec{k}_2, i_2; \dots\rangle = (a_{\vec{k}_1 i_1}^\dagger a_{\vec{k}_2 i_2}^\dagger \dots) |0\rangle. \quad (3.68)$$

Operator koji će kao vlastite vrijednosti imati broj čestica u nekom stanju, dan je s

$$N_{\vec{k}i} \equiv a_{\vec{k}i}^\dagger a_{\vec{k}i} \quad (\text{operator broja}), \quad (3.69)$$

i ima korisne komutacijske relacije

$$[N_{\vec{k}i}, a_{\vec{k}'j}^\dagger] = \delta_{ij} \delta_{\vec{k}\vec{k}'} a_{\vec{k}'j}^\dagger, \quad (3.70)$$

$$[N_{\vec{k}i}, a_{\vec{k}'j}] = -\delta_{ij} \delta_{\vec{k}\vec{k}'} a_{\vec{k}'j}. \quad (3.71)$$

Da bi došli do potpunog opisa fotonskog polja (s komutirajućim opservablama), pogodno je prijeći s transverzalnih stanja linearne polarizacije ($i = 1, 2$), na stanja kružne polarizacije ($\lambda = \pm 1$). Stanja kružne polarizacije (za \vec{k} paralelno z-osi) definirana s

$$a_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 \mp i a_2) \quad (3.72)$$

$$a_{\pm}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^{\dagger} \pm i a_2^{\dagger}) \quad (3.73)$$

$$\vec{\epsilon}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{\epsilon}_1 \pm i \vec{\epsilon}_2) \quad (3.74)$$

$$\vec{\epsilon}_{\pm}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{\epsilon}_1 \mp i \vec{\epsilon}_2) \quad (3.75)$$

vode zamjenom sumacije $\sum_{k,i} \rightarrow \sum_{k,\lambda}$ u kvantiziranom polju na

$$\vec{\epsilon}_1 a_1 + \vec{\epsilon}_2 a_2 = \vec{\epsilon}_+ a_+ + \vec{\epsilon}_- a_- \quad (3.76)$$

$$\vec{\epsilon}_1 a_1^{\dagger} + \vec{\epsilon}_2 a_2^{\dagger} = \vec{\epsilon}_+^* a_+^{\dagger} + \vec{\epsilon}_-^* a_-^{\dagger} . \quad (3.77)$$

Jednofotonsko stanje heliciteta (projekcije spina na smjer impulsa)

$$|\vec{k}\lambda\rangle = a_{\vec{k}\lambda}^{\dagger} |0\rangle \quad (3.78)$$

istovremeno je vlastito stanje četiriju operatora:

◇ operatora broja N :

$$N = \sum_{\vec{k}\lambda} N_{\vec{k}\lambda}, \quad N_{\vec{k}\lambda} = a_{\vec{k}\lambda}^{\dagger} a_{\vec{k}\lambda} \quad (3.79)$$

◇ operatora energije (komponenta $T^{00} = (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)/2$ je gustoća energije.

Odatle $P^0 \equiv H = \int d^3x T^{00}$):

$$H = \sum_{\vec{k}\lambda} \left(N_{\vec{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \omega \quad (3.80)$$

◇ operatora impulsa ($T^{0i} = (\vec{E} \times \vec{B})^i$ su komponente Poyntingovog vektora):

$$\vec{P} = \sum_{\vec{k}\lambda} N_{\vec{k}\lambda} \vec{k} \quad (3.81)$$

◇ operatora impulsa vrtnje ($\vec{S} = \vec{E} \times \vec{A}$, danog gustoćom tenzora impulsa vrtnje $\mathcal{M}^{0\mu\nu} = T^{0\mu}x^\nu - T^{0\nu}x^\mu$):

$$\vec{S} = \sum_{\vec{k}\lambda} N_{\vec{k}\lambda} \lambda \hat{k}. \quad (3.82)$$

Riječ je o skupu komutirajućih operatora

$$\begin{aligned} [H, N] &= [\vec{P}, N] = [\vec{S}, N] = 0, \\ [H, \vec{P}] &= [H, \vec{S}] = [\vec{P}, \vec{S}] = 0, \end{aligned} \quad (3.83)$$

s vlastitim vrijednostima

$$N|k\lambda\rangle = n|k\lambda\rangle \quad (3.84)$$

$$H|k\lambda\rangle = \omega|k\lambda\rangle \quad (3.85)$$

$$\vec{P}|k\lambda\rangle = \vec{k}|k\lambda\rangle \quad (3.86)$$

$$\vec{S}|k\lambda\rangle = \lambda \hat{k}|k\lambda\rangle. \quad (3.87)$$

Općenito jednofotonsko stanje je linearna superpozicija

$$C_1|k+\rangle + C_2|k-\rangle, \quad (3.88)$$

koja, uz iščezavanje jednog od koeficijenata $C_{1,2}$, vodi na vlastito stanje operatora heliciteta. Ovako opisan foton nosi sve značajke čestice. Možemo proučiti i njegovo ponašanje na diskretne transformacije.

□ UNUTRAŠNJI PARITET FOTONA

Slijedimo li transformaciju vektora stanja pod operacijom prostornog zrcaljenja $P \equiv U_P$

$$Pj^\mu(t, \vec{x})P^{-1} = P(\rho, \vec{j})P^{-1} = (\rho, -\vec{j}) = j_\mu(t, -\vec{x}), \quad (3.89)$$

vektorski potencijal će se ponašati analogno:

$$PA^\mu(t, \vec{x})P^{-1} = P\left(A_0(t, \vec{x}), \vec{A}(t, \vec{x})\right)P^{-1} \quad (3.90)$$

$$= \left(A_0(t, -\vec{x}), -\vec{A}(t, -\vec{x})\right) = A_\mu(t, -\vec{x}). \quad (3.91)$$

Eksplisnom transformacijom (operatorom P koji djeluje u Hilbertovom prostoru, a ne djeluje na eksponencijalne faktore) na vektorskom potencijalu polja zračenja

$$P\vec{A}(t, \vec{x})P^{-1} = \sum_{\vec{k}\lambda} \left[Pa_{\vec{k}\lambda} \vec{\epsilon}_{\vec{k}\lambda} P^{-1} e^{-ikx} + Pa_{\vec{k}\lambda}^\dagger \vec{\epsilon}_{\vec{k}\lambda}^* P^{-1} e^{ikx} \right] \quad (3.92)$$

i usporedbom s prostornim dijelom četverovektora u (3.91)

$$\vec{A}(t, -\vec{x}) = \sum_{\vec{k}\lambda} \left[a_{\vec{k}\lambda} \vec{\epsilon}_{k\lambda} e^{-i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{k}\lambda}^\dagger \vec{\epsilon}_{\vec{k}\lambda}^* e^{i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \quad (3.93)$$

$$= \sum_{\vec{k}\lambda} \left[a_{-\vec{k}-\lambda} \vec{\epsilon}_{-\vec{k}-\lambda} e^{-ikx} + a_{-\vec{k}-\lambda}^\dagger \vec{\epsilon}_{-\vec{k}-\lambda}^* e^{ikx} \right], \quad (3.94)$$

gdje smo u zadnjem koraku pod sumom učinili zamjenu $\vec{k} \leftrightarrow -\vec{k}, \lambda \leftrightarrow -\lambda$. Usporedbom zaključujemo

$$Pa_{k\lambda}P^{-1} = -a_{-k-\lambda} \quad (3.95)$$

$$Pa_{k\lambda}^\dagger P^{-1} = -a_{-k-\lambda}^\dagger. \quad (3.96)$$

Dakle, uz impuls i helicitet mijenja predznak pri operaciji pariteta. Pogledajmo sada transformaciju jednočestičnog stanja pri zrcaljenju prostora:

$$P|\vec{k}\lambda\rangle = Pa_{k\lambda}^\dagger P^{-1}P|0\rangle = -a_{-k-\lambda}^\dagger|0\rangle \quad (3.97)$$

$$= -|-\vec{k}, -\lambda\rangle. \quad (3.98)$$

Minus predznak u zadnjem koraku shvaća se kao unutrašnji paritet fotona, iako bi $|k\lambda\rangle$ moglo biti vlastito stanje operatora P samo uz (za fotone nemoguć) uvjet $\vec{k} = 0$.

□ NABOJNI PARITET FOTONA

Slijedimo definiciju operacije nabojne konjugacije na naboju $CQC^{-1} = -Q$ ili struji $\vec{j} = Q\vec{v}$

$$Cj^\mu(t, \vec{x})C^{-1} = -j^\mu(t, \vec{x}), \quad (3.99)$$

što zbog C -invarijantnosti elektromagnetskog međudjelovanja ($[H_{em}, C] = 0$) povlači

$$CA^\mu(t, \vec{x})C^{-1} = -A^\mu(t, \vec{x}). \quad (3.100)$$

Izravna usporedba (kao maloprije kod P-transformacije) daje

$$Ca_{k\lambda}C^{-1} = -a_{k\lambda} \quad (3.101)$$

$$Ca_{k\lambda}^\dagger C^{-1} = -a_{k\lambda}^\dagger. \quad (3.102)$$

Odatle, iz ponašanja jednofotonskog stanja $|k\lambda\rangle = a_{k\lambda}^\dagger|0\rangle$

$$C|k\lambda\rangle = Ca_{k\lambda}^\dagger C^{-1}C|0\rangle = -a_{k\lambda}^\dagger|0\rangle = -|k\lambda\rangle \quad (3.103)$$

zaključujemo da je nabojni paritet fotona negativan,

$$\eta_c(\text{fotona}) = -1. \quad (3.104)$$

Slično, na n -fotonskom stanju

$$C|\gamma_1, \dots, \gamma_n\rangle = (-)^n |\gamma_1, \dots, \gamma_n\rangle. \quad (3.105)$$

Odatle izlazi tzv. Furryjev teorem za matricele elemente koji uključuju neparni broj fotona ($m + n = 2k + 1$)

$$\langle n \text{ fotona} | H_\gamma | m \text{ fotona} \rangle = 0. \quad (3.106)$$

Usput komentirajmo još neke matricele elemente:

- ◇ iščezavajući dijagonalni matricele element $\langle k\lambda | \vec{A} | k\lambda \rangle = \langle 0 | a_{k\lambda} \vec{A} a_{k\lambda}^\dagger | 0 \rangle = 0$ govori da električno ili magnetsko polje jednog fotona nema smisla. Ipak, polje ima neiščezavajuće fluktuacije,

$$\langle 0 | \vec{A}^2 | 0 \rangle \neq 0, \quad \langle k\lambda | \vec{A}^2 | k\lambda \rangle \neq 0. \quad (3.107)$$

- ◇ neiščezavajući nedijagonalni matricele elementi $\langle k\lambda | \vec{A} | 0 \rangle$ i $\langle 0 | \vec{A} | k\lambda \rangle$ definiraju valnu funkciju slobodnog fotona.

3.2.3 Kvantizirano Diracovo polje

Vratimo se na Diracovu jednadžbu

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i \vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta m) \psi, \quad (3.108)$$

gdje uočavamo 2×2 blokove diktirane strukturom Diracovih matrica

$$\vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.109)$$

U skladu s tim, u rješenju ravnog vala s četveroimpulsom $p^\mu = (p^0, \vec{p})$, dekompozicijom četverospinora ω na dvokomponentne bispinore

$$\psi = \omega e^{-ipx}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (3.110)$$

dobivamo vezane jednadžbe

$$p^0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cdot \mathbf{1} & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (3.111)$$

Nađimo prvo rješenja pozitivne energije, za koja

$$p^0 = +(\vec{p}^2 + m^2)^{1/2} \equiv E > 0. \quad (3.112)$$

Potražimo ta rješenja u sustavu mirovanja čestice, gdje je $p^0 = +m, \vec{p} = 0$, tako da vezani sustav jednadžbi (3.111) postaje

$$m \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cdot \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -m \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (3.113)$$

Odatle izlazi $m\chi = -m\chi$, odnosno $\chi = 0$. Zbog toga

$$\omega(p^0 = +m) = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.114)$$

pri čemu imamo dva nezavisna spinska stanja za elektron pozitivne energije u mirovanju:

$$\varphi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \varphi_{1/2} \quad \text{spina gore } (\uparrow), \quad (3.115)$$

$$\varphi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \varphi_{-1/2} \quad \text{spina dolje } (\downarrow). \quad (3.116)$$

Za neiščezavajući impuls $\vec{p} \neq 0$, eliminacijom

$$\chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \varphi \quad (3.117)$$

dolazimo na spinore pozitivne energije

$$\omega^{1,2} = \begin{pmatrix} \varphi^{1,2} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \varphi^{1,2} \end{pmatrix}. \quad (3.118)$$

Analogno, za spinore negativne energije, za koje $p^0 = -(\vec{p}^2 + m^2)^{1/2} = -E$, potražimo rješenje u sustavu mirovanja, gdje je

$$p^0 = -m, \quad \vec{p} = 0. \quad (3.119)$$

Vezani sustav jednadžbi (3.111) postaje

$$-m \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cdot \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -m \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (3.120)$$

što daje $-m\varphi = m\varphi(\varphi = 0)$, odnosno

$$\omega(p^0 = -m) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (3.121)$$

Rješenja konačnog impulsa $+\vec{p}$, odnosno četveroimpulsa $p^\mu = (-E, \vec{p})$, dobit će se eliminacijom φ iz jednadžbe

$$(-E - m)\varphi = \vec{\sigma} \cdot \vec{p}\chi, \quad (3.122)$$

što daje za negativne energije

$$\omega \sim \begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m}\chi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (3.123)$$

Pri tome treba pripaziti na suptilnost pridruživanja:

- ◇ rješenja pozitivne energije uz pozitivne frekvencije $e^{-ip \cdot x}$;
- ◇ rješenja negativne energije uz negativne frekvencije $e^{ip \cdot x}$.

Zahtjev da rješenja negativne energije budu uz $p^\mu = (-E, -\vec{p})$ vodi nas na definiciju spinora negativne energije

$$\omega^{3,4} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m}\chi^{1,2} \\ \chi^{1,2} \end{pmatrix}. \quad (3.124)$$

Pri tome identifikacija odsutnosti čestice nekog kvantnog broja s prisutnošću čestice suprotnog kvantnog broja vodi na izbor:

negativno energijska rješenja spina \downarrow = pozitivno energijska rješenja spina \uparrow ,

odnosno

$$\chi_{1/2} \equiv \chi^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.125)$$

$$\chi_{-1/2} \equiv \chi^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.126)$$

Primjetimo da dok pozitivno energijski spinor $u(p)$ zadovoljava jednadžbu

$$(\not{p} - m)u(p) = 0, \quad (3.127)$$

za elektron negativne energije $-E$ i impulsa $-\vec{p}$ jednadžba

$$(-\not{p} - m) u(-p) = 0 \quad (3.128)$$

vodi na jednadžbu za negativno energijski spinor $v(p)$

$$(\not{p} + m) v(p) = 0 . \quad (3.129)$$

Normalizacija na $2E$ čestica po jedinici volumena

$$\int_V \rho d^3r = \int \psi^\dagger \psi d^3r = u^\dagger u = 2EV \quad (3.130)$$

vodi na čestične spinore

$$u(p, s) = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \varphi^s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \varphi^s \end{pmatrix} \quad (3.131)$$

i analogno normirane ($v^\dagger v = 2E$) antičestične spinore

$$v(p, s) = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix} . \quad (3.132)$$

Uočimo da se i rješenja negativne energije mogu izraziti Paulijevim spinorima φ^s (3.115) i (3.116) za $s = 1, 2$

$$v(p, s) = -\sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} (-i\sigma_2 \varphi^s) \\ (-i\sigma_2 \varphi^s) \end{pmatrix} , \quad (3.133)$$

gdje je $E \equiv p^0 > +m$. Sumirano, normirana *pozitivno energijska* rješenja Diracove jednadžbe

$$\psi_{p,s}^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2EV}} u(\vec{p}, s) e^{-ip \cdot x} \quad (3.134)$$

treba usporediti s *negativno energijskim*

$$\psi_{-p,-s}^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2EV}} v(\vec{p}, s) e^{ip \cdot x} . \quad (3.135)$$

Uočimo da su negativno energijska rješenja impulsa p i spina s izražena v spinorom s vrijednostima $-p$ i $-s$, u skladu s Diracovom interpretacijom *rupa* u negativno energijskom moru. Primijetimo i ortogonalnost (+) i (-) rješenja, koja proizlazi iz ortogonalnosti pozitivno i negativno energijskih spinora (vidjeti zadatak 3.5, str. 58)

$$v^\dagger(-\vec{p}, s') u(\vec{p}, s) = u^\dagger(\vec{p}, s) v(-\vec{p}, s') = 0 . \quad (3.136)$$

□ **Kvantno Diracovo polje i Diracova struja**

Budući da je Diracova jednačba linearna jednačba za spinore $\psi(x)$, superpozicija rješenja bit će također rješenje. Opća superpozicija ravnih valova pozitivne i negativne frekvencije može se prikazati Fourierovim integralom

$$\psi(x) = \int d^3p \sum_{s=1,2} \{ \alpha_s(\vec{p}) u(p, s) e^{-ipx} + \beta_s^*(\vec{p}) v(p, s) e^{ipx} \}, \quad (3.137)$$

gdje su $\alpha_s(\vec{p})$ i $\beta_s^*(\vec{p})$ kompleksni koeficijenti razvoja. Već smo uočili problem ako rješenje Diracove jednačbe pokušamo interpretirati kao Schrödingerovu valnu funkciju, amplitudu vjerojatnosti nalaženja čestice u nekom dijelu prostora. Naime, ako česticu želimo locirati u dovoljno malom intervalu Δx , to po relacijama neodređenosti $\Delta p \gtrsim 1/\Delta x$ vodi na energije ΔE koje prelaze prag produkcije parova čestica-antičestica, što nas upućuje na višečestičnu, kvantnu teoriju polja.

U tom pristupu koeficijenti razvoja α_s i β_s^* postat će *operatori* b_s i d_s^\dagger , kao što smo to imali kod kvantiziranog polja zračenja. U zapisu preko operatora stvaranja antičestica (d_s^\dagger) i poništenja čestica (b_s)

$$\psi(x) = \text{“} \sum_{\vec{p}} \text{”} \sum_s [b_s(\vec{p}) u(\vec{p}, s) e^{-ipx} + d_s^\dagger(\vec{p}) v(\vec{p}, s) e^{ipx}] . \quad (3.138)$$

Ovisno o normalizaciji “ $\sum_{\vec{p}}$ ” ima značenje

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{m}{E}} \quad \text{ili} \quad \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}} \quad (3.139)$$

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{2E}} \quad \text{ili} \quad \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} . \quad (3.140)$$

Operatori poništenja spinorne čestice $b_s(\vec{p})$ (uz pozitivno energijske spinore $u(p, s)$) i stvaranja antičestice (uz negativno energijske spinore $v(p, s)$) zadovoljavaju antikomutacijske relacije

$$\{ b_s(\vec{p}), b_{s'}^\dagger(\vec{p}') \} = \{ d_s(\vec{p}), d_{s'}^\dagger(\vec{p}') \} = \delta_{ss'} \delta_{\vec{p}\vec{p}'}, \quad (3.141)$$

gdje u kontinuiranoj verziji

$$\delta_{\vec{p}\vec{p}'} = (2\pi)^3 2E(\vec{p}) \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') . \quad (3.142)$$

Uvedimo i adjungirani spinor $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$ koji zadovoljava jednačbu

$$(-i\bar{\partial} - m) \bar{\psi}(x) = 0 \quad (3.143)$$

i koji ima oblik

$$\bar{\psi} = \sum_{p,s} (b_s^\dagger(\vec{p})\bar{u}(\vec{p},s)e^{ipx} + d_s(\vec{p})\bar{v}(\vec{p},s)e^{-ipx}) . \quad (3.144)$$

Adjungirani spinori u impulsnom prostoru zadovoljavaju jednadžbu

$$\bar{u}(\vec{p},s)(\not{\partial} - m) = 0, \quad \bar{v}(\vec{p},s)(\not{\partial} + m) = 0 . \quad (3.145)$$

Normalizacija spinora izlazi iz eksplicitnih rješenja:

$$u^\dagger(\vec{p},s)u(\vec{p},s') = 2E\delta_{ss'} \quad (3.146)$$

$$\bar{u}(\vec{p},s)u(\vec{p},s') = 2m\delta_{ss'} \quad (3.147)$$

$$v^\dagger(\vec{p},s)v(\vec{p},s') = 2E\delta_{ss'} \quad (3.148)$$

$$\bar{v}(\vec{p},s)v(\vec{p},s') = -2m\delta_{ss'} . \quad (3.149)$$

Uvedimo operator broja čestica $N(p,s) = b_s^\dagger(p)b_s(p)$ i antičestica $\bar{N}(p,s) = d_s^\dagger(p)d_s(p)$. Za vježbu provjerimo korisne antikomutacijske relacije:

$$[N(\vec{p},s), b_{s'}(\vec{p}')] = -\delta_{\vec{p}\vec{p}'}\delta_{ss'}b_s(\vec{p}) \quad (3.150)$$

$$[\bar{N}(\vec{p},s), d_{s'}(\vec{p}')] = -\delta_{\vec{p}\vec{p}'}\delta_{ss'}d_s(\vec{p}) \quad (3.151)$$

$$[N(\vec{p},s), b_s^\dagger(\vec{p}')] = +\delta_{\vec{p}\vec{p}'}\delta_{ss'}b_s^\dagger(\vec{p}) \quad (3.152)$$

$$[\bar{N}(\vec{p},s), d_s^\dagger(\vec{p}')] = +\delta_{\vec{p}\vec{p}'}\delta_{ss'}d_s^\dagger(\vec{p}) . \quad (3.153)$$

Provjerimo da u skladu s Paulijevim principom N i \bar{N} poprimaju vlastite vrijednosti 0 ili 1. Na vakuumskom stanju $|0\rangle$ (za koje $b_s(p)|0\rangle = 0$) vlastita vrijednost je 0:

$$N(p,s)|0\rangle = 0 . \quad (3.154)$$

Na jednočestičnom stanju $|p,s\rangle = b_s^\dagger(p)|0\rangle$ vlastita vrijednost je 1:

$$N(p,s)|p,s\rangle = N(p,s)b_s^\dagger(p)|0\rangle = |p,s\rangle , \quad (3.155)$$

pri čemu smo upotrijebili komutator $[N(p,s), b_s^\dagger(p)] = b_s^\dagger(p)$. Na dvočestičnom stanju, trivijalno vrijedi

$$b_s^\dagger(p)b_s^\dagger(p)|0\rangle = -b_s^\dagger(p)b_s^\dagger(p)|0\rangle , \quad (3.156)$$

čime je zadovoljen Paulijev princip.

Promotrimo Diracovu struju konstruiranu od kvantnih spinora. Ona sadrži raspodjelu naboja (ρ) i struja (\vec{j}) sustava elektrona i pozitrona

$$j^\mu(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x). \quad (3.157)$$

Opservabilna veličina bit će npr. ukupni naboj takvog sustava

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3x j^0(\vec{x}, t=0) = -e \int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \psi \\ &= -e \sum_{\vec{p}, s} (b_s^\dagger(p) b_s(p) + d_s(p) d_s^\dagger(p)) \end{aligned} \quad (3.158)$$

Komutator $\{d, d^\dagger\} = 1$ omogućit će izražavanje operatora naboja operatorima broja elektrona i pozitrona

$$Q = -e \sum_{\vec{p}, s} (N(p, s) - \bar{N}(p, s) + 1), \quad (3.159)$$

no preostao je i posljednji konstantni član koji vodi u sumi na beskonačni naboj. Ovakvu beskonačnost eliminira se zahtjevom da se složeni operatori poput struje moraju uvesti u *normalnom poretku*, s operatorima stvaranja lijevo od operatora poništenja. Tada, normalno uređen operator (u “sendviču” dvotočki)

$$j^\mu = -e : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : \quad (3.160)$$

zahtijeva normalno uređenje drugog člana u (3.158)

$$: d_s(\vec{p}) d_s^\dagger(\vec{p}) := -d_s^\dagger(\vec{p}) d_s(p), \quad (3.161)$$

bez konstantnog člana u (3.158). Modificirana, *normalno uređena* teorija rješava problem beskonačnog naboja. Pri tome gustoća vjerojatnosti $\psi^\dagger(x) \psi(x)$ više nije pozitivno definitna — nemoguće je u kvantnoj teoriji zadržati jednočestičnu interpretaciju spinora.

□ NABOJNA KONJUGACIJA

Operatori stvaranja i poništenja neposredno daju smisao prebacivanja čestica u antičestice ukoliko nabojna konjugacija daje

$$\mathcal{C} b_s(p) \mathcal{C}^{-1} = d_s(p) \quad (3.162)$$

$$\mathcal{C} b_s^\dagger(p) \mathcal{C}^{-1} = d_s^\dagger(p), \quad (3.163)$$

što na kvantnom polju $\psi(x)$ daje

$$\begin{aligned} \psi^c(x) &= \mathcal{C} \psi(x) \mathcal{C}^{-1} \\ &= \text{“} \sum_{\vec{p}} \text{”} \sum_s [d_s(\vec{p}) u(p, s) e^{-ipx} + b_s^\dagger(p) v(p, s) e^{ipx}]. \end{aligned} \quad (3.164)$$

Iz oblika kvantiziranog adjungiranog spinora $\bar{\psi}(x)$ u relaciji (3.144) vidi se da je u linearnoj vezi s (3.164) što možemo zapisati kao

$$(\psi^c(x))_\alpha = \mathcal{C}\psi_\alpha(x)\mathcal{C}^{-1} = C_{\alpha\beta} (\bar{\psi}(x))_\beta, \quad (3.165)$$

odnosno $\mathcal{C}\psi\mathcal{C}^{-1} = C\bar{\psi}^T$. Pokazat ćemo to iz Diracove jednadžbe. Vidjeli smo da se u klasičnoj elektrodinamici gibanje čestice naboja $-e$ u elektromagnetskom potencijalu $A^\mu = (A^0, \vec{A})$ dobiva minimalnom supstitucijom (3.39)

$$p^\mu \rightarrow p^\mu + eA^\mu, \quad (3.166)$$

što je praćeno kvantno mehaničkom supstitucijom

$$i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu + eA^\mu. \quad (3.167)$$

Možemo se pitati kakva je veza spinora elektrona koji zadovoljava Diracovu jednadžbu (naboja $-e$) u elektromagnetskom polju

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu + eA_\mu) - m] \psi = 0 \quad (3.168)$$

i spinora pozitrona ψ^c koji zadovoljava ekvivalentnu Diracovu jednadžbu (za naboj $+e$)

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m] \psi^c = 0. \quad (3.169)$$

Kompleksnim konjugiranjem jednadžbe (3.168) dobivamo

$$[-\gamma^{\mu*} (i\partial_\mu - eA_\mu) - m] \psi^* = 0. \quad (3.170)$$

Ako uspijemo naći matricu $C\gamma^0$ koja zadovoljava

$$-(C\gamma^0) \gamma^{\mu*} = \gamma^\mu (C\gamma^0) \quad (3.171)$$

ovu prethodnu relaciju mogli bi pisati u obliku

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m] (C\gamma^0\psi^*) = 0. \quad (3.172)$$

To vodi na potvrdu naslućene veze s nabojno konjugiranim i (transponiranim) adjungiranim spinorom

$$\psi^c = C\gamma^0\psi^* = C\bar{\psi}^T. \quad (3.173)$$

U Diracovoj reprezentaciji γ matrica, mogući izbor je

$$C\gamma^0 = i\gamma^2 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & 0 & & \\ & & -1 & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.174)$$

Primjerice, specijalni spinor $\psi^{(1)}$ prelazi u

$$\begin{aligned}\psi^{(1)c} &= i\gamma^2 [u^{(1)}(\vec{p})e^{-ipx}]^* = u^{(4)}(-\vec{p})e^{ipx} \\ &= v^{(1)}(\vec{p})e^{ipx} .\end{aligned}\quad (3.175)$$

Sam operator C zadovoljava

$$C^{-1}\gamma^\mu C = (-\gamma^\mu)^T \quad C = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T \quad (3.176)$$

i daje

$$\bar{\psi}^c = -\psi^T C^{-1} . \quad (3.177)$$

Odatle za struju elektrona

$$j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi , \quad (3.178)$$

dobivamo njoj pridruženu struju s nabojno konjuigranim poljem

$$\begin{aligned}j_c^\mu &= -e\bar{\psi}^c\gamma^\mu\psi^c \\ &= +e\psi^T C^{-1}\gamma^\mu C\bar{\psi}^T \\ &= -(-e)\psi^T (\gamma^\mu)^T \bar{\psi}^T \\ &= -(-)e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi .\end{aligned}\quad (3.179)$$

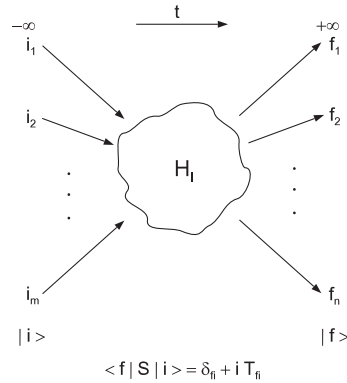
Ekstra “−” predznak u posljednjem koraku (od antikomutirajućeg kvantnog polja) suptilan je i važan za interpretaciju j_c^μ kao struje pozitrona. Uz prije ustanovljenu transformaciju vektorskog potencijala očigledna je C invarijantnost elektromagnetskog međudjelovanja:

$$j_\mu^c (A^\mu)^c = (-j_\mu)(-A^\mu) = j_\mu A^\mu . \quad (3.180)$$

3.3 Feynmanov opis elektrodinamike

3.3.1 Perturbacijska konstrukcija S matrice

Usmjerimo sada našu pažnju na procese tipične za svijet elementarnih čestica — kratkotrajne susrete čestica pristiglih iz prostorno-vremenski udaljenog područja (“prošle beskonačnosti”). Po prolasku kroz malo područje međudjelovanja, čestice se udaljavaju u “beskonačnu budućnost”. Izučavanje takvih procesa upućuje na upotrebu *interaktivnog dijela* Hamiltoniana, koji će u spoju s upravo spomenutim asimptotskim početnim i konačnim stanjima, voditi na pojam *operatora sudara*, tzv. S matricu. Operator sudara teorije polja preuzima ulogu kvantnomehničkog Hamiltoniana, kao operatora evolucije.



Slika 3.15: Prijelaz između početnog $|i\rangle$ i konačnog stanja $|f\rangle$ opisivat ćemo matrice elementom operatora sudara S koji sadrži nesmetani (neinteresantni) prijelaz dan s δ_{fi} i fizikalno interesantne prijelaze pod utjecajem H_I sadržane u prijelaznim amplitudama T_{fi}

□ SLIKA INTERAKCIJE

Dvije poznate kvantnomehaničke slike, Schrödingerovu i Heisenbergovu, upotunit ćemo Diracovom slikom (*slikom interakcije*), prikladnom za opis elementarnih čestica u međudjelovanju. Prisjetimo se *Schrödingerovog* opisa, čuvenom jednažbom iz odjeljka 2

$$i \frac{\partial}{\partial t} |a, t\rangle_S = H |a, t\rangle_S, \quad (3.181)$$

u koju ulaze vremenski ovisna stanja i vremenski neovisan operator H . Za česticu “ a ” vektor stanja $|a, t\rangle_S$ ili valna funkcija $\psi(\vec{x}, t)$ zadovoljava

$${}_S \langle a, t | a, t \rangle_S = \int d^3x \psi^*(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) = 1. \quad (3.182)$$

Heisenbergova reformulacija ovog opisa prenosi *svu* vremensku ovisnost sa stanja na operatore. Operatori polja $\psi(\vec{x}, t)$ (fermionski) i $A(\vec{x}, t)$ (bozonski), u Heisenbergovoj slici simetrični su na translacije u vremenu:

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{iHt} \psi(\vec{x}, 0) e^{-iHt}, \quad (3.183)$$

$$A(\vec{x}, t) = e^{iHt} A(\vec{x}, 0) e^{-iHt}. \quad (3.184)$$

Takvom relacijom između vremenski ovisnog i vremenski neovisnog operatora, povezane su Heisenbergova i Schrödingerova slika, simbolički

$$A_H = e^{iHt} A_S e^{-iHt}. \quad (3.185)$$

Tada, deriviranjem po vremenu

$$\frac{\partial}{\partial t} A_H(t) = iH e^{iHt} A_S e^{-iHt} + e^{iHt} A_S e^{-iHt} (-iH), \quad (3.186)$$

dobivamo relaciju

$$\frac{\partial}{\partial t} A_H(t) = i [H, A_H], \quad (3.187)$$

koja iskazuje vremensku promjenu operatora pomoću njegovih komutatora s hamiltonianom. Očigledno, A_H je vremenski neovisan samo za one operatore A , koji su konstante gibanja. Stanje

$$|a, t\rangle_S = e^{-iHt} |a\rangle_H \quad (3.188)$$

zadovoljavat će Schrödingerovu jednadžbu (3.181).

Moguća je i takva reformulacija, *slika interakcije*, u kojoj se samo *dio* vremenske ovisnosti vektora stanja prenosi na operatore. Pritom hamiltonian rastavimo na slobodni i interakcijski dio

$$H = H_0 + H_I \quad (3.189)$$

i uvodimo operator

$$\begin{aligned} A_I(\vec{x}, t) &= e^{iH_0 t} A_S(\vec{x}) e^{-iH_0 t} \\ &= e^{iH_0 t} e^{-iHt} A_H(\vec{x}, t) e^{iHt} e^{-iH_0 t}. \end{aligned} \quad (3.190)$$

Uvođenjem $U(t, 0)$, operatora evolucije od trenutka $t = 0$ do trenutka t

$$U(t, 0) = e^{iH_0 t} e^{-iHt}, \quad (3.191)$$

operator A u slici interakcije evoluira na način

$$A_I(\vec{x}, t) = U(t, 0) A_H(\vec{x}, t) U^\dagger(t, 0), \quad (3.192)$$

dakle po slobodnoj jednadžbi, a vektor stanja ima prikaz

$$\begin{aligned} |a, t\rangle_I &= e^{iH_0 t} |a, t\rangle_S \\ &= U(t, 0) |a\rangle. \end{aligned} \quad (3.193)$$

Time vektori stanja u slici interakcije zadovoljavaju jednadžbu

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} |a, t\rangle_I &= e^{iH_0 t} H_I e^{-iH_0 t} |a, t\rangle_I \\ &\equiv H_I(t) |a, t\rangle_I. \end{aligned} \quad (3.194)$$

Pritom smo u zadnjem koraku uveli operator interakcije u slici interakcije, koji se može napisati kao

$$H_I(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} [H_0, H_I]_n t^n . \quad (3.195)$$

Operator $U_I(t, t_0)$ koji daje evoluciju stanja

$$|a, t\rangle_I = U_I(t, t_0)|a, t_0\rangle_I , \quad (3.196)$$

i sam zadovoljava jednadžbu (3.194):

$$i \frac{\partial}{\partial t} U_I(t, t_0) = H_I(t) U_I(t, t_0) . \quad (3.197)$$

Rješenje te jednadžbe vodit će nas na S matricu.

□ OPERATOR EVOLUCIJE

Rješenje jednadžbe (3.197) dobiva se iterativno: polazimo od početnog uvjeta

$$U_I^{(0)} = U_I(t_0, t_0) = I , \quad (3.198)$$

pa u prvom približenju dobivamo

$$i \partial_t U_I^{(1)} = H_I(t) U_I^{(0)} \Rightarrow U_I^{(1)}(t, t_0) = -i \int_{t_0}^t H_I(t') dt' . \quad (3.199)$$

Tada u slijedećem koraku

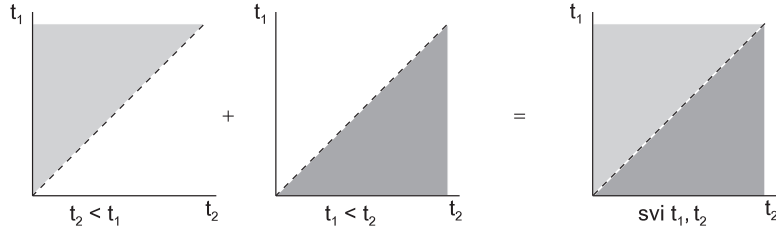
$$i \partial_t U_I^{(2)} = H_I(t) U_I^{(1)} \Rightarrow U_I^{(2)}(t, t_0) = -i \int_{t_0}^t H_I(t') U_I^{(1)}(t', t_0) dt' . \quad (3.200)$$

Budući da $H_I(t')$ ne komutira nužno s $H_I(t'')$, poredak u dvostrukom integralu je važan i određen je vremenskim slijedom $t > t' > t''$, dakle

$$U_I^{(2)}(t, t_0) = (-i)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_I(t') H_I(t'') . \quad (3.201)$$

Općenito, u n -toj iteraciji

$$U_I^{(n)}(t, t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) , \quad (3.202)$$



Slika 3.16: Integrali preko dva osjenčana područja na lijevoj strani su jednaki pa zajedno daju integral preko ukupnog područja, prikazan na desnoj strani

gdje $t > t_1 > t_2 \dots > t_n = t_0$. Takav poredak, u kojemu kasnija vremena dolaze na lijevoj strani, osiguravamo uvođenjem vremenski uređenog produkta za operatore bozonskih i fermionskih polja :

◇ za bozonske operatore

$$T(A(t_1)A(t_2)) = \left\{ \begin{array}{ll} A(t_1)A(t_2) & \text{za } t_1 > t_2 \\ A(t_2)A(t_1) & \text{za } t_2 > t_1 \end{array} \right\} ; \quad (3.203)$$

◇ za fermionske operatore

$$T(\psi(t_1)\psi(t_2)) = \left\{ \begin{array}{ll} \psi(t_1)\psi(t_2) & \text{za } t_1 > t_2 \\ -\psi(t_2)\psi(t_1) & \text{za } t_2 > t_1 \end{array} \right\} . \quad (3.204)$$

Za umnožak dva hamiltoniana interakcije vremensko uređenje možemo napisati u obliku

$$T(H_I(t_1)H_I(t_2)) = H_I(t_1)H_I(t_2)\Theta(t_1-t_2) + H_I(t_2)H_I(t_1)\Theta(t_2-t_1) , \quad (3.205)$$

gdje je $\Theta(x) = 1$ za $x > 0$ i nula za x negativan. To omogućava da se, sukladno slici 3.16, dvostruki integral simetrizira i prikaže u obliku

$$U_I^{(2)}(t, t_0) = \frac{(-i)^2}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T(H_I(t_1)H_I(t_2)) . \quad (3.206)$$

Općenito, postoji $n!$ uređenja u vremenski uređenom umnošku n članova, što vodi na simetrizirani oblik

$$U_I^{(n)}(t, t_0) = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \dots \int_{t_0}^t dt_n T(H_I(t_1)H_I(t_2)\dots H_I(t_n)) . \quad (3.207)$$

Na temelju simetriziranog zapisa , suma n -strukih raspršenja može se formalno zapisati u eksponencijalnom obliku

$$U_I(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} U_I^{(n)}(t, t_0) = T \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right]. \quad (3.208)$$

□ S MATRICA

U granicama neizmjerne prošlosti i budućnosti ($t_0 \rightarrow -\infty, t \rightarrow \infty$) relacija (3.208) daje *Dysonovu formulu* za S matricu

$$S = \lim(t_0 \rightarrow -\infty, t \rightarrow \infty) U_I(t, t_0) = T \exp \left\{ -i \int d^4x \mathcal{H}_I(x) \right\}. \quad (3.209)$$

Prije nego se pozabavimo primjenom ove formule na račun elektromagnetskih procesa, naglasimo važnost slike interakcije: gustoća hamiltoniana \mathcal{H}_I razlikuje se od \mathcal{H}_I^H u Heisenbergovoj slici. \mathcal{H}_I^H je povezan s kanonskim tenzorom energije-impulsa

$$\Theta^{\mu\nu}(x) = \Pi^\mu(x) \partial^\nu \Phi(x) - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (3.210)$$

na način

$$\mathcal{H}_I^H(t, \vec{x}) = \Theta_I^{00}(x), \quad (3.211)$$

gdje je $\Theta_I^{\mu\nu}(x)$ dio tenzora pridružen interaktivnom dijelu lagrangiana. Taj hamiltonian definiran *kanonskim* tenzorom energije-impulsa zadovoljava

$$H_I^H(t) = e^{i(H_0+H_I)t} H_I e^{-i(H_0+H_I)t} \quad (3.212)$$

umjesto relacije uvedene u (3.194)

$$H_I(t) = e^{iH_0t} H_I e^{-iH_0t}, \quad (3.213)$$

za hamiltonian $H_I(t)$ koji ulazi u izraz (3.209) za operator sudara – S matricu. Stoga će dinamičke varijable u slici interakcije biti građene od *slobodnih* polja Heisenbergove slike.

□ PRIMJER SPINORNE ELEKTRODINAMIKE

Na temelju gore rečenog, za spinornu elektrodinamiku kojom ćemo opisivati sustav elektrona i fotona

$$\mathcal{H}_I(t, \vec{x}) = -g^{00} \mathcal{L}_I^{(0)}(x), \quad (3.214)$$

gdje

$$\mathcal{L}_I^{(0)}(x) = -e : \bar{\psi}_{(0)}(x) \gamma^\mu \psi_{(0)}(x) : A_\mu^{(0)}(x) . \quad (3.215)$$

Ovdje su $\psi_{(0)}(x)$, $\bar{\psi}_{(0)}(x)$ i $A_\mu^{(0)}(x)$ operatori slobodnih polja u Heisenbergovoj slici. Pritom je uvedeno i normalno uređenje “: :” koje osigurava iščezavajuće kvantne brojeve za vakuumsko stanje. Vremensko uređenje je također dobro definirano čak i kad su dvije vremenske koordinate iste. Naime, iz komutatora slobodnih polja izlazi

$$\left[\mathcal{L}_I^{(0)}(x), \mathcal{L}_I^{(0)}(y) \right] = 0 \quad \text{za} \quad (x - y)^2 < 0 , \quad (3.216)$$

dakle komutiranje za prostorne udaljenosti. To osigurava Lorentzovu invarijantnost T-produkta i S matrice (vidjeti komentar na kraju poglavlja).

Time dolazimo do operatora S matrice teorije smetnje

$$S = T \exp \left\{ -ie \int d^4x : \bar{\psi}_{(0)}(x) \gamma^\mu \psi_{(0)}(x) : A_\mu^{(0)}(x) \right\} . \quad (3.217)$$

Bez ulaženja u potankosti i potencijalne teškoće teorije polja formulirane u slici interakcije, pedagoško-pragmatični razlozi odabiru taj pristup kao onaj koji će nas najkraćim putem dovesti do proračuna istinskih procesa.

□ WICKOV TEOREM I PROPAGATORI

U izrazu (3.217) pojavljuje se vremensko uređenje produkta normalnih uređenja. Kako se to dalje obrađuje, sadržano je u tzv. *Wickovom teoremu*. Taj se teorem dokazuje u udžbenicima teorije polja, a mi ćemo ga ovdje samo navesti i ilustrirati rezultate njegove primjene.

Za *vremenske produkte*, Wickov teorem svodi T-produkt n linearnih operatora na sumu normalnih produkata, sa svim mogućim *kronološkim kontrakcijama*,

$$\begin{aligned} T(\Phi_1 \dots \Phi_N) &= : \Phi_1 \dots \Phi_N : + : \overline{\Phi_1 \Phi_2} \dots \Phi_N : + \overline{\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_N} : \\ &+ : \overline{\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4} \dots \Phi_N : + \dots \end{aligned} \quad (3.218)$$

Budući da mi u praksi radimo s T-produktima normalnih produkata, kontrakcije se ne čine unutar prvobitnih normalno uređenih grupa (između polja u istoj točki.) Naime, kronološke kontrakcije prikazuju propagatore slobodnih polja, u kvantnoj elektrodinamici:

$$\text{foton: } \overline{A_{(0)}^\mu(x) A_{(0)}^\nu(y)} \equiv \langle 0 | T(A_{(0)}^\mu(x) A_{(0)}^\nu(y)) | 0 \rangle \quad (3.219)$$

$$\text{fermion: } \overline{\psi_{(0)}(x) \bar{\psi}_{(0)}(y)} \equiv \langle 0 | T(\psi(x) \bar{\psi}(y)) | 0 \rangle . \quad (3.220)$$

Riječ je o specijalnom slučaju *Greenovih* funkcija N-točaka, definiranih preko vakumske srednje vrijednosti umnoška polja $\Phi(x)$

$$G(x_1, \dots, x_N) = \langle 0|T(\Phi(x_1)\dots\Phi(x_N))|0\rangle. \quad (3.221)$$

Kauzalne Greenove funkcije dvije točke (dobivene Feynmanovim zaobilaženjem polova, $m \rightarrow m - i\epsilon$, $\lambda \rightarrow \lambda - i\epsilon$) imaju oblik

$$\begin{aligned} \overline{A_{(0)}^\mu(x)A_{(0)}^\nu(y)} &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k \left\{ -g^{\mu\nu} + (1-a) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - a\lambda^2 + i\epsilon} \right\} \\ &\quad \times \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iD_{(0)}^{\mu\nu}(k) e^{-ik(x-y)}, \end{aligned} \quad (3.222)$$

$$\begin{aligned} \overline{\psi_{(0)}(x)\bar{\psi}_{(0)}(y)} &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} iS_{(0)}(p) e^{-ip(x-y)}. \end{aligned} \quad (3.223)$$

Iz tih izraza mogu se isčitati Fourierovi transformati tih propagatora, ($iD_0^{\mu\nu}(k)$, i $iS_0(p)$), s kojima ćemo raditi u *impulsnom* prostoru (vidjeti dodatak C).

3.3.2 QED u 2. redu računa smetnje

Gore izloženo samo je sažetak gradiva kursa iz teorije polja. Za nas se radi samo o receptu koga želimo bolje upoznati kroz upotrebu kovarijantnog računa na konkretnim primjerima. Drugi red računa smetnje dan je prema (3.217) sa

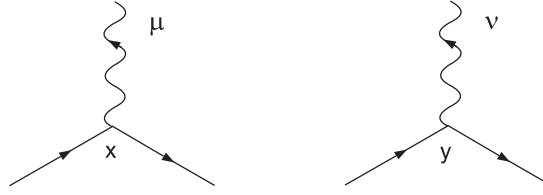
$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{(-ie)^2}{2} \int d^4x \int d^4y T (: \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) :: \bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y) :) \\ &\quad \times T(A_\mu(x)A_\nu(y)), \end{aligned} \quad (3.224)$$

gdje zbog jednostavnosti pisanja ispuštamo oznake “0” slobodnih polja. Wickov teorem nam odatle daje produkt 2x4 člana, dva člana iz

$$T(A_\mu(x)A_\nu(y)) = A_\mu(x)A_\nu(y) + \overline{A_\mu(x)A_\nu(y)} \quad (3.225)$$

i četiri člana iz

$$\begin{aligned} T(: \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) :: \bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y) :) &= \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y) : \\ &+ : \overline{\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y)} : + : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu \overline{\bar{\psi}(x)\psi(y)}\gamma^\nu\psi(y) : \\ &+ : \overline{\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \overline{\bar{\psi}(x)\psi(y)}}\gamma^\nu\psi(y) : \end{aligned} \quad (3.226)$$



Slika 3.17: *Nepovezan proces sa šest čestica, primjerice $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^- + 2\gamma$. Budući da u ovom dijagramu nema kontrakcija, dvije neovisne integracije vode na produkt dvije δ -funkcije*

Diskutirajmo redom dobivene umnoške. Potpuno normalno uređen član bez kontrakcija

$$: \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \bar{\psi} \gamma^\nu \psi A_\mu A_\nu : \quad (3.227)$$

s dijagramatskim prikazom na slici 3.17 ne prikazuje fizikalni proces. Elementi tog procesa na sl. 3.17 pripadaju S matrici 1. reda, no i tada ovakvi procesi sa slobodnim česticama ne idu.

□ FOTOLEKTRIČNI EFEKT

Ako izaberemo *matrični element* S matrice takvim odabirom početnog i konačnog stanja da je moguće očuvati četveroimpuls (primjerice apsorpcijom fotona na elektronu vezanom u atomu, dobit ćemo matrični element za fotoelektrični efekt

$$S_{fi}^{(1)} = \langle e^- | S^{(1)} | e^- \gamma \rangle = -ie \int d^4x \langle e^-(p', s') | : \bar{\psi}(t, \vec{x}) \gamma^\mu \psi(t, \vec{x}) : | e^-(p, s) \rangle \times \langle 0 | A_\mu(x) | \gamma \rangle. \quad (3.228)$$

Podsjetimo se da elektronsko stanje

$$|e^-(p, s)\rangle = b_s^\dagger(p) |0\rangle \quad (3.229)$$

zajedno s kvantnim Diracovim poljem daje

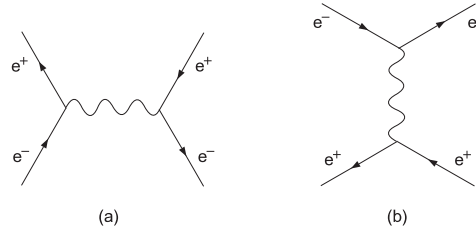
$$\psi_e(x) |e^-(p, s)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_e V}} e^{-ipx} u(p, s), \quad (3.230)$$

a fotonski dio

$$\frac{1}{\sqrt{2\omega V}} \epsilon_\mu(q, \lambda) e^{-iqx}. \quad (3.231)$$

Time S matrični element postaje

$$S_{fi}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2E(p)V}} \frac{1}{\sqrt{2E(p')V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} (2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q)$$



Slika 3.18: Anihilacijski dijagram (a) i dijagram izmjene (b) dobiveni kontrakcijom fotonskog polja za e^+e^- raspršenje

$$\begin{aligned} & \times (-ie)\bar{u}(p', s')\gamma^\mu u(p, s)\epsilon_\mu(q, \lambda) \\ & = i \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i)}{\prod_i (2E_i V)^{1/2} \prod_f (2E_f V)^{1/2}} \mathcal{M}_{fi}, \end{aligned} \quad (3.232)$$

gdje smo račun procesa ogolili na račun *invarijantne amplitude* za fotoelektrični efekt

$$\mathcal{M}_{fi} = -e\bar{u}(p', s')\gamma^\mu u(p, s)\epsilon_\mu(q, \lambda). \quad (3.233)$$

Nakon ove digresije s uvođenjem invarijantne amplitude za fotoelektrični efekt, nastavimo s drugim članom. Član s kontrakcijom fotonskog polja

$$: \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\bar{\psi}\gamma^\nu\psi : \overline{A_\mu(x)A_\nu(y)} \quad (3.234)$$

prikazan je dijagramom na sl. 3.18. U ovisnosti o izboru stanja koja daje S matrični element, ovaj će dijagram prikazivati e^-e^- , e^+e^+ ili e^+e^- raspršenja. Članovi s jednom fermionskom kontrakcijom

$$: \bar{\psi}(y)\gamma^\nu\overline{\psi(y)\psi(x)\gamma^\mu\psi(x)} : : A_\mu(x)A_\nu(y) : \quad (3.235)$$

ili

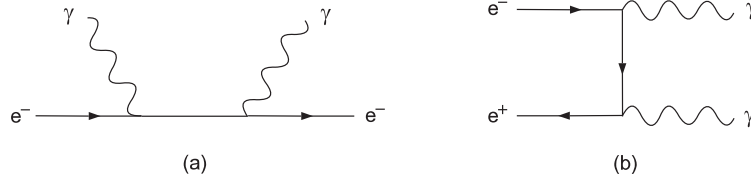
$$\overline{\psi(x)\gamma^\mu\psi(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y)} : A_\mu(x)A_\nu(y) : \quad (3.236)$$

prikazani na sl. 3.19 ovisno o izboru početnog i končnog stanja vodit će na komptonско raspršenje (sl. 3.19(a)) ili stvaranje/poništenje e^+e^- (sl. 3.19(b)).

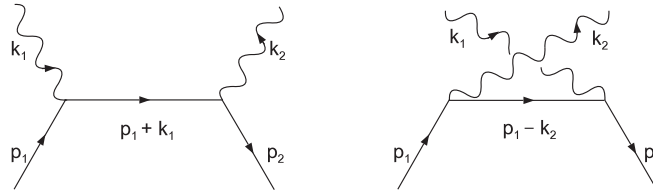
□ KOMPTONSKO RASPRŠENJE

Elastično raspršenje zračenja na elektronima u najnižem je redu dano S matričnim elementom

$$\begin{aligned} \langle \gamma e^- | S^{(2)} | \gamma e^- \rangle & = \frac{(-ie)^2 (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + p_1 - k_2 - p_2)}{2 \sqrt{\prod_i (2E_i V) \prod_f (2E_f V)}} 2\bar{u}(p_2, s_2) \\ & \times 2 \left\{ \gamma^\mu \frac{i}{\not{p}_1 + \not{k}_1 - m + i\epsilon} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{i}{\not{p}_1 - \not{k}_2 - m + i\epsilon} \gamma^\mu \right\} \\ & \times u(p_1, s_1)\epsilon_\mu(k_2, \lambda')\epsilon_\nu(k_1, \lambda). \end{aligned} \quad (3.237)$$



Slika 3.19: Kontrakcija fermionskog polja vodi na komptonsko raspršenje (a) ili dvofotonsku anihilaciju (b)



Slika 3.20: Feynmanovi dijagrami komptonskog raspršenja

Dva člana iz ovog izraza reprezentirana su s dva Feynmanova dijagrama u impulsnom prostoru (sl. 3.20). Na ovom primjeru eksplicirano je kako je, uvođenjem tzv. *Feynmanovih pravila* (vidjeti dodatak C), moguće iz takvih dijagrama odmah očitati invarijantnu amplitudu M_{fi} .

Naglasimo da je nalaženje invarijantne amplitude ključni korak proračuna bilo kojeg procesa. Uz izraze za udarni presjek na kraju ovog odjeljka i tragove za γ matrice koje ćemo uvesti u slijedećem odjeljku, dobiva se za komptonsko raspršenje

$$\frac{d\sigma}{dt} = 8\pi r_e^2 \frac{m^2}{(s-m^2)^2} \left\{ \left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right)^2 + \frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{s-m^2}{u-m^2} + \frac{u-m^2}{s-m^2} \right) \right\}, \quad (3.238)$$

gdje je

$$r_e^2 = \frac{\alpha^2}{m^2}, \quad (3.239)$$

klasični radijus elektrona, a pokrate s, t, u

$$s = (p_2 + k_1)^2, \quad t = (p_1 - p_2)^2, \quad u = (p_1 - k_2)^2 \quad (3.240)$$

su tzv. Mandelstamove varijable. One su povezane s energijama ulaznog i izlaznog fotona (ω i ω') na način

$$s = m^2 + 2m\omega \quad \text{i} \quad u = m^2 - 2m\omega', \quad (3.241)$$

što u laboratorijskom sustavu (uz kut raspršenog fotona θ) daje čuvenu Klein-Nishina formulu :

$$\frac{d\sigma}{2\pi \sin \theta d\theta} = \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2 \theta \right]. \quad (3.242)$$

Pritom vrijedi

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m} (1 - \cos \theta), \quad (3.243)$$

odakle

$$\omega > \omega' > \frac{\omega}{1 + 2\omega/m} \quad (3.244)$$

pa na niskim energijama ($\omega \ll m$, $\omega \simeq \omega'$) vrijedi klasična Thomsonova formula

$$\frac{d\sigma}{2\pi \sin \theta d\theta} = \frac{1}{2} r_e^2 (1 + \cos^2 \theta). \quad (3.245)$$

Za podrobnosti Rayleighova i Thomsonova raspršenja vidjeti [?] i komentare na kraju poglavlja.

□ OSTALI PROCESI U 2. REDU

Na redu su procesi s dvije kontrakcije. Pogledajmo najprije slučaj gdje je fermionska kontrakcija u (3.226) praćena dodatnim sparivanjem fotonskog polja $\overline{A(x)}A(y)$:

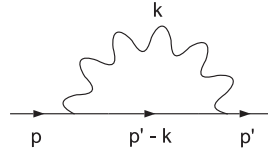
$$\begin{aligned} S_{fi}^{(2)} &= -e^2 \int d^4x d^4y \langle e^-(p', s') | \overline{A_\mu(x)} A_\nu(y) \\ &\quad \times : \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \overline{\psi(x)\psi(y)} \gamma^\mu \psi(y) : | e^-(p, s) \rangle \\ &= -i \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p' - p)}{\sqrt{4EE'V^2}} \mathcal{M}_\Sigma, \end{aligned} \quad (3.246)$$

gdje je

$$\mathcal{M}_\Sigma = \bar{u}(p', s') \Sigma(p) u(p, s). \quad (3.247)$$

Pritom smo uveli *vlastitu energiju* elektrona $\Sigma(p)$ prikazanu na slici 3.21. Riječ je o dijagramu s petljom, koji se izvrednjuje na način

$$-i\Sigma^{(2)}(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m - i\epsilon} \gamma^\nu. \quad (3.248)$$



Slika 3.21: Feynmanov dijagram koji odgovara vlastitoj energiji elektrona

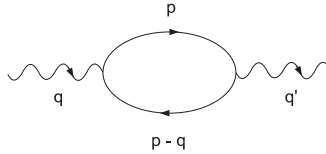
Pokažimo da ovakve kvantne korekcije mijenjaju masu i propagator elektrona. Naime, umeci vlastite energije u propagator mogu se prosumirati :

$$\begin{aligned} \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(p)} &= \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} [-i\Sigma(p)] \frac{i}{\not{p} - m} + \\ &+ \frac{i}{\not{p} - m} [-i\Sigma(p)] \frac{i}{\not{p} - m} [-i\Sigma(p)] \frac{i}{\not{p} - m} + \dots \quad (3.249) \end{aligned}$$

U korigiranom (prosumiranom) propagatoru pol je pomaknut s m na $m + \Sigma(m)$. Odgovarajućim uklanjanjem beskonačnosti (renormalizacijskim programom koji izlazi iz okvira ovog udžbenika) nalazi se pol ovako “obučenog” propagatora. Zahtjev da se položaj pola elektromagnetskog propagatora podudara s *fizikalnom masom* elektrona u svim redovima računa *teorije smetnje* vodi nas na takvu redefiniciju $\Sigma(p)$, da bude ispunjeno

$$\Sigma(\not{p} = m) = 0 \quad (3.250)$$

u svim redovima računa smetnje. Na sličan način, sparivanje svih fermionskih polja vodi nas na dijagram prikazan na slici 3.22. S matrični element za taj slučaj



Slika 3.22: Feynmanov dijagram koji odgovara vakuumske polarizaciji (vlastitoj energiji fotona)

je

$$S_{fi}^{(2)} = -i \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(q' - q)}{\sqrt{4\omega\omega'} (2\pi)^3} \mathcal{M}_{\Pi} . \quad (3.251)$$

U izvrijednjavanju ove invarijantne amplitude \mathcal{M}_{Π} treba upotrijebiti dodatno Feynmanovo pravilo

$$(-) \text{ predznak za svaku zatvorenu fermionsku petlju .} \quad (3.252)$$

Uzevši to u obzir

$$\mathcal{M}_\Pi = (\varepsilon_f^\mu)^* \varepsilon_i^\nu \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q), \quad (3.253)$$

gdje je

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q) = (-ie)^2 (-1) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr} \{ \gamma_\mu (\not{p} + m) \gamma_\nu (\not{p} - \not{q} + m) \}}{(p^2 - m^2 - i\epsilon)((p - q)^2 - m^2 - i\epsilon)} \quad (3.254)$$

i ima transverzalni oblik

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q) = -i (g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu) \Pi^{(2)}(q^2). \quad (3.255)$$

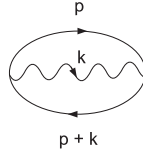
Oblačenje fotonskog propagatora (primjerice u procesu $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^-$)² može se prosumirati preko svih redova

$$\begin{aligned} \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \frac{1}{1 + \Pi(q^2)} &= \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} + \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} [-\Pi(q^2)] \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \\ &+ \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} [-\Pi(q^2)] \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} [-\Pi(q^2)] \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} + \dots \end{aligned} \quad (3.256)$$

Fotonski pol ostaje na $q^2 = 0$, što je osigurano baždarnom invarijantnošću. Stoga su ispunjeni uvijeti baždarne invarijantnosti

$$q_\mu \Pi^{\mu\nu} = \Pi^{\mu\nu} q_\nu = 0. \quad (3.257)$$

Na kraju, kontrakcija svih polja vodi na vakuumsku petlju (sl. 3.23). Iako



Slika 3.23: Feynmanov dijagram za vakuumsku petlju

neišćezavajući (zapravo divergentni), ovakvi se doprinosi mogu zanemariti jer oni prikazuju fluktuacije vakuuma, a mi sve fizikalne procese promatramo relativno u odnosu na vakuum, pa ove doprinose nakon renormalizacije normaliziramo na jedinicu.

² γ^* znači da foton nije na masenoj ljusci

□ **VJEROJATNOSTI PRIJELAZA**

Iz navedenih S matričnih elemenata vidjeli smo da se u

$$S_{fi} = \langle f|S|i\rangle = \delta_{fi} + i T_{fi} \quad (3.258)$$

prijelazni matrični element T_{fi} izražava invarijantnom amplitudom \mathcal{M}_{fi}

$$T_{fi} = \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \mathcal{M}_{fi}}{\sqrt{\prod_i (2E_i V) \prod_f (2E_f V)}}. \quad (3.259)$$

Zanimat će nas vjerojatnost prijelaza u jedinici vremena

$$dW = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|T_{fi}|^2}{T}. \quad (3.260)$$

Uz Fermijev trik, zamjenu

$$[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i)]^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \cdot VT, \quad (3.261)$$

prijelaz u jedno konačno stanje dan je s

$$dW = \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) V}{\prod_i (2E_i V) \prod_f (2E_f V)} |\mathcal{M}_{fi}|^2, \quad (3.262)$$

što se za grupu konačnih stanja množi još množiteljem faznog prostora

$$\phi_f = \prod_f \left[\frac{d^3 p_f V}{(2\pi)^3} \right]. \quad (3.263)$$

Eksplicitno navodimo dva primjera vjerojatnosti procesa :

- ◇ Raspad 1 čestice \rightarrow 2 čestice $(E_1, p_1; E_2, p_2)$ iz sustava mirovanja $(\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \equiv \vec{p}', E_1 + E_2 = m)$

$$dW = \frac{1}{32\pi m^2} |\mathcal{M}_{fi}|^2 |\vec{p}'| d\Omega; \quad (3.264)$$

- ◇ Raspršenja $a + b \rightarrow c + d$ u sustavu težišta $(\vec{p}_a = -\vec{p}_b \equiv \vec{p}, \vec{p}_c = -\vec{p}_d \equiv \vec{p}', E_a + E_b = E)$

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2 E^2} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} d\Omega'. \quad (3.265)$$

□ UNITARNOST

Pokažimo još neke korisne relacije koje izlaze iz zahjeteva očuvanja vjerojatnosti. Naime, očuvanje vjerojatnosti povlačit će unitarnost S matrice. Počnemo li s normiranim stanjem $|i\rangle$

$$\langle i|i\rangle = 1 \quad (3.266)$$

vjerojatnost nalaženja konačnog stanja $|f\rangle$ dana je kvadratom modula S matričnog elementa

$$P_f = |\langle f|S|i\rangle|^2. \quad (3.267)$$

Stoga je ukupna vjerojatnost nalaženja bilo kojeg konačnog stanja $|f\rangle$ jednaka jedinici :

$$\sum_f |\langle f|S|i\rangle|^2 = \sum_f \langle i|S^\dagger|f\rangle \langle f|S|i\rangle = \langle i|S^\dagger S|i\rangle = 1 \quad (3.268)$$

što vrijedi za bilo koje početno stanje $|i\rangle$ pa iz toga slijedi operatorska relacija

$$S^\dagger S = 1. \quad (3.269)$$

Za matricu raspršenja T_{fi} u relaciji (3.258) iz umnoška koji je po (3.269) jedinica

$$SS^\dagger = (1 + iT)(1 - iT^\dagger) = 1 + i(T - T^\dagger) + TT^\dagger \quad (3.270)$$

slijedi

$$-i(T - T^\dagger) = TT^\dagger. \quad (3.271)$$

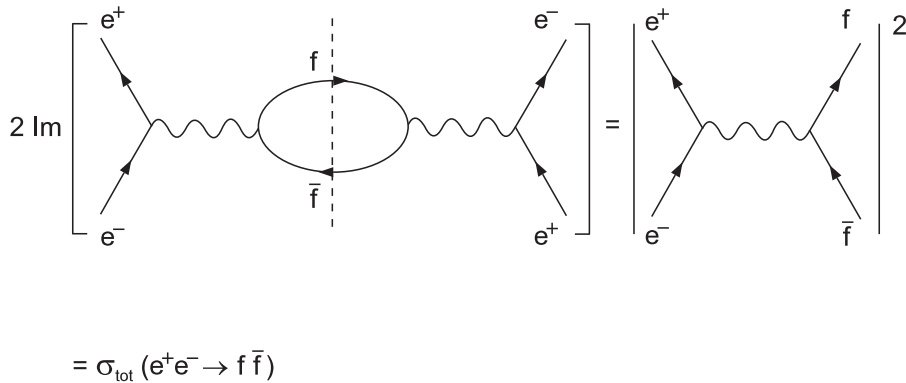
Rastavimo li T na realni i imaginarni dio, $T = \text{Re}T + i\text{Im}T$, nalazimo

$$2 \text{Im}(T) = TT^\dagger. \quad (3.272)$$

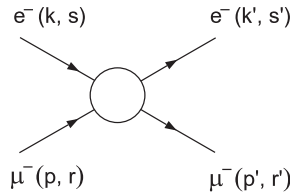
Za isto ulazno i izlazno stanje, iz relacije $(T^\dagger)_{ki} = (T_{ik})^*$ proizilazi

$$2\text{Im}T_{ii} = (TT^\dagger)_{ii} = \sum_k T_{ik}(T^\dagger)_{ki} = \sum_k |T_{ik}|^2. \quad (3.273)$$

Kao neposredno primjenu ovog rezultata navodimo izračunavanje udarnog presjeka $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ pomoću imaginarnog, *apsorptivnog* dijela vakuumske polarizacije (tzv, spektralne funkcije). Uz pridruživanje fermionskih struja i odabir doprinosa spektralnog fermiona f u petlji, dobivamo prikaz udarnog presjeka prema slici 3.24 Za račun diskontinuiteta koji doprinose spektralnoj funkciji upotrebljavaju se tzv. Cutotsky-eva pravila (vidi [?],[?]). U slijedećem odjeljku dat ćemo prikaz alternativnog, izravnog računa udarnog presjeka za nas važnog procesa $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.



Slika 3.24: Udarni presjek anihilacije e^+e^- izražen imaginarnim dijelom dijagrama vakuumske polrizacije



Slika 3.25: Kinematika $e\mu$ raspršenja. Zaokruženo područje skriva sve moguće “unutrašnje procese” koji doprinose tom raspršenju

3.3.3 Raspršenje $e^-\mu^-$ i poništenje $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

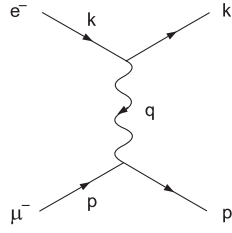
U svom početku QED je zamišljena kao teorija elektrona i fotona. Budući da je mion samo teža kopija elektrona, QED mora vrijediti kao univerzalna teorija međudjelovanja leptona i fotona. Elementarno međudjelovanje sadrži uz elektronsku i mionsku struju

$$\mathcal{L}_I(x) = -eA_\alpha(x) : \bar{\psi}_e(x)\gamma^\alpha\psi_e(x) : -eA_\alpha(x) : \bar{\psi}_\mu(x)\gamma^\alpha\psi_\mu(x) : \quad (3.274)$$

Ilustrirajmo primjenu te teorije na proračunu udarnog presjeka elastičnog $e^-\mu^-$ raspršenja (sl. 3.25). Proračun ovog procesa natjerat će nas da izučimo tehnike računa s Diracovim γ matricama koje će biti dostatne i za kasnije proračune slabih procesa.

□ CASIMIROV TRIK I TRAGOVI γ MATRICA

Najčešće je pri raspršenju čestica orijentacija spinova slučajna i jednostavno se broje čestice raspršene u dani smjer. Pridruženi udarni presjek dobit će se usrednjavanjem po početnim i sumiranjem po konačnim spinskim konfiguracijama.



Slika 3.26: Doprinos slici 3.25 u najnižem redu računa smetnje

Provesti to preko svih pojedinačnih amplituda može biti prilično težak posao. Ovdje ćemo naučiti trik kojim se taj posao zaobilazi izravnim računom kvadrata invarijantne amplitude, bez da pojedinačne amplitude uopće računamo.

Prema Dysonovoj formuli, najniži doprinos procesu μ -e raspršenja naći ćemo u drugom redu razvoja eksponenta,

$$S^{(2)} = \frac{(i)^2}{2} \int d^4x \int d^4y T [\mathcal{L}_I(x)\mathcal{L}_I(y)] . \quad (3.275)$$

U matičnom elementu

$$\begin{aligned} S^{(2)} &\equiv \langle \mu^-, e^- | S^{(2)} | \mu^-, e^- \rangle \\ &= \frac{(-ie)^2}{2} \langle \mu^-, e^- | \int d^4x \int d^4y T [: \bar{\psi}_e(x) \gamma^\alpha \psi_e(x) + \psi_\mu(x) \gamma^\alpha \psi_\mu(x) :] \\ &\quad \times [: \bar{\psi}_e(y) \gamma^\beta \psi_e(y) + \psi_\mu(y) \gamma^\beta \psi_\mu(y) :] | \mu^-, e^- \rangle \\ &\quad \times T(A_\alpha(x)A_\beta(y)) \end{aligned} \quad (3.276)$$

to odgovara približenju jednofotonskom izmjenom prikazanom na sl. 3.26. Invarijantna amplituda jednofotonske izmjene dana je Feynmanovim pravilima iz prethodnog odjeljka (vidjeti dodatak C)

$$\mathcal{M} = [\bar{u}(k', s') (-ie\gamma^\mu)u(k, s)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} [\bar{u}(p', r') (-ie\gamma^\nu)u(p, r)] . \quad (3.277)$$

Kinematika sa slike dostatno specificira elektronske i mionske spinore, pa eksplicitne indekse na njima ispuštamo. S tako priređenom amplitudom ulazimo u račun kvadrata modula invarijantne amplitude $|\mathcal{M}|^2$. Za slučaj raspršenja nepolariziranih čestica promatrat ćemo spinski usrednjenu vjerojatnost

$$|\mathcal{M}|^2 \rightarrow \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{(2s_e + 1)(2s_\mu + 1)} \sum_{spin} |\mathcal{M}|^2 . \quad (3.278)$$

Sumiranje po spinovima, uz usrednjenje po spinovima početnih stanja daje

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{q^4} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum_{s, s'} \sum_{r, r'} |\bar{u}(k', s')_\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} u(k, s)_\beta$$

$$\times \bar{u}(p', r')_{\alpha'} (\gamma_{\mu})_{\alpha' \beta'} u(p, r)_{\beta'}|^2 . \quad (3.279)$$

U kvadratu modula pod sumom

$$[(\bar{u}\gamma^{\mu}u)_{k'k}(\bar{u}\gamma_{\mu}u)_{p'p}] [(\bar{u}\gamma^{\nu}u)_{k'k}(\bar{u}\gamma_{\nu}u)_{p'p}]^* \quad (3.280)$$

kompleksno konjugiranje osnovnog bloka, koji je matrica tipa 1×1 , podudara se s hermitskim konjugiranjem:

$$\begin{aligned} [(\bar{u}\gamma^{\nu}u)_{k'k}]^* &= [(\bar{u}\gamma^{\nu}u)_{k'k}]^{\dagger} \\ &= [u(k')^{\dagger}\gamma^0\gamma^{\nu}u(k)]^{\dagger} \\ &= u^{\dagger}(k)\gamma^{\nu\dagger}\gamma^{0\dagger}u(k') \\ &= \bar{u}(k)\gamma^{\nu}u(k') . \end{aligned} \quad (3.281)$$

U zadnjem koraku upotrijebili smo svojstva γ matrica

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 , \quad \gamma^{\nu\dagger} = \gamma^0\gamma^{\nu}\gamma^0 . \quad (3.282)$$

Dakle, kompleksna konjugacija izmijeni poredak matrice produkta u elektronskom i mionskom dijelu, što vodi na izraz

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{e^4}{q^4} \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \bar{u}(k', s')_{\alpha} (\gamma^{\mu})_{\alpha\beta} u(k, s)_{\beta} u(k, s)_{\gamma} (\gamma^{\nu})_{\gamma\delta} u(k', s')_{\delta} \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{r,r'} \bar{u}(p', r')_{\alpha'} (\gamma_{\mu})_{\alpha'\beta'} u(p, r)_{\beta'} u(p, r)_{\gamma} (\gamma_{\nu})_{\gamma'\delta'} u(p', r')_{\delta'} \end{aligned} \quad (3.283)$$

Primjenom relacija potpunosti za Diracove spinore

$$\sum_{s=1,2} u_{\alpha}(p, s) \bar{u}_{\beta}(p, s) = (\not{p} + m)_{\alpha\beta} \quad (3.284)$$

$$\sum_{s=1,2} v_{\alpha}(p, s) \bar{v}_{\beta}(p, s) = (\not{p} - m)_{\alpha\beta} \quad (3.285)$$

dobivamo

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{e^4}{q^4} \frac{1}{2} (\not{k}' + m_e)_{\delta\alpha} (\gamma^{\mu})_{\alpha\beta} (\not{k} + m_e)_{\beta\gamma} (\gamma^{\nu})_{\gamma\delta} \\ &\quad \times \frac{1}{2} (\not{p}' + m_{\mu})_{\delta'\alpha'} (\gamma^{\mu})_{\alpha'\beta'} (\not{p} + m_{\mu})_{\beta'\gamma'} (\gamma^{\nu})_{\gamma'\delta'} \\ &= \frac{e^4}{q^4} L_{elektron}^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{mion} . \end{aligned} \quad (3.286)$$

U zadnjem koraku uveli smo elektronski (mionski) tenzor

$$\begin{aligned} L_{elektron}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \text{Tr} [(k' + m_e)\gamma^\mu (k + m_e)\gamma^\nu] \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} [k'\gamma^\mu k\gamma^\nu + m_e^2\gamma^\mu\gamma^\nu] . \end{aligned} \quad (3.287)$$

Uz relacije za tragove Diracovih γ matrica (vidjeti dodatak B) dobivamo

$$L_{elektron}^{\mu\nu} = 2 [k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu + g^{\mu\nu}(m_e^2 - k' \cdot k)] \quad (3.288)$$

i slično za mionski tenzor

$$L_{mion}^{\mu\nu} = 2 [p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu + g^{\mu\nu}(m_\mu^2 - p' \cdot p)] . \quad (3.289)$$

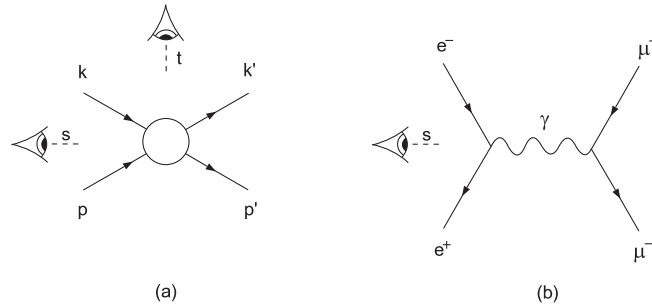
Odatle dobivamo

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{8e^4}{q^4} [(k' \cdot p')(k \cdot p) + (k' \cdot p)(k \cdot p') - (k' \cdot k)m_\mu^2 \\ &\quad - (p' \cdot p)m_e^2 + 2m_e^2m_\mu^2] . \end{aligned} \quad (3.290)$$

U ultrarelativističkom limesu (zanemarivanjem m_e^2 i m_μ^2)

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{8e^4}{(k - k')^4} [(k' \cdot p')(k \cdot p) + (k' \cdot p)(k \cdot p')] . \quad (3.291)$$

Izraženo Mandelstamovim varijablama prema slici 3.27(a)



Slika 3.27: (a) s i t kanal primijenjen pod (b) na e^+e^- anihilaciju

$$\begin{aligned} s &\equiv (k + p)^2 \simeq 2k \cdot p = 2k' \cdot p' \\ t &\equiv (k - k')^2 \simeq -2k \cdot k' = -2p \cdot p' \\ u &\equiv (k - p')^2 \simeq -2k \cdot p' = -2k' \cdot p \end{aligned} \quad (3.292)$$

dobivamo

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2}. \quad (3.293)$$

Upotrebom križne simetrije (simetrije na zamjenu $k' \leftrightarrow -p$) možemo odavde dobiti amplitudu $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. Ona odgovara s -kanalnom procesu na slici 3.27(b)

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 2e^4 \frac{t^2 + u^2}{s^2}. \quad (3.294)$$

Izraz za nepolarizirano raspršenje (3.293) i izraz (3.294) elektron-pozitron anihilacije u mion-antimion par povezani su jednostavnim $s \leftrightarrow t$ zamjenom Mandelstamovih varijabli. Specificirajmo vrijednosti impulsa i energije elektrona i miona u sustavu težišta :

$$\vec{p}_{e^-} = -\vec{p}_{e^+} \equiv \vec{p}, \quad \vec{p}_{\mu^-} = -\vec{p}_{\mu^+} \equiv \vec{p}' \quad (3.295)$$

$$s = (E_{e^-} + E_{e^+})^2 = E^2. \quad (3.296)$$

Izraz za diferencijalni udarni presjek (3.265)

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \quad (3.297)$$

uz vrijednosti s, t, u varijabli u sustavu težišta gdje je $k = |\vec{p}| = |\vec{p}'|$:

$$\begin{aligned} s &= 4(k^2 + m^2) \\ t &= -2k^2(1 - \cos\theta) \\ u &= -2k^2(1 + \cos\theta) \end{aligned} \quad (3.298)$$

daje

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 s} 2e^4 \frac{1}{2} (1 + \cos^2\theta) = \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2\theta). \quad (3.299)$$

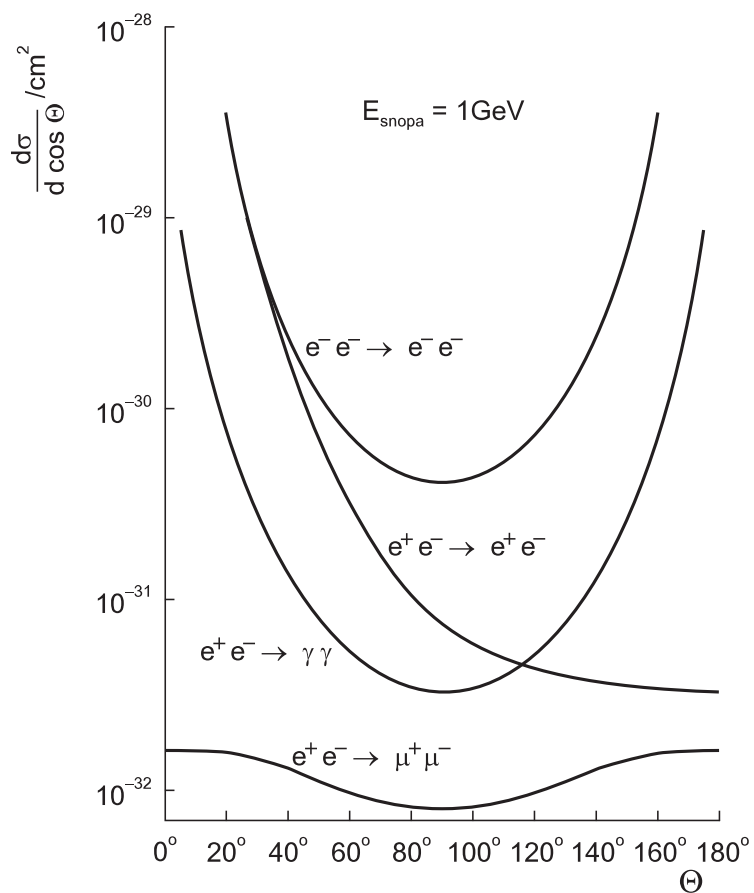
Integrirano po prostornom kutu to vodi na ukupni udarni presjek

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}. \quad (3.300)$$

Izrazimo li s varijablu energijom snopa $s = E^2 = (2E_{\text{snopa}})^2$ dobiva se poznato ponašanje udarnog presjeka s energijom snopa

$$\sigma \simeq \frac{22 \text{ nb}}{E_{\text{snopa}}^2 (\text{u GeV}^2)}, \quad (3.301)$$

prikazano na sl. 3.28. Ovaj proces služiti će nam u slijedećem poglavlju kao referentni proces za produkciju hadrona u e^+e^- sudarima. Ova formula bit će korigirana doprinosima višeg reda na sl. 3.29 koje ćemo ovdje zanemariti. Na ovom mjestu dat ćemo jos usporedbu tog referentnog procesa s drugim čisto elektromagnetskim procesima prikazanim na sl. 3.30.



Slika 3.30: Usporedba diferencijalnih udarnih presjeka za $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ (Møllerovo raspršenje), $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ (Bhabha raspršenje), $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ anihilacije i našeg referentnog $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ raspršenja, za energiju snopa 1 GeV

□ **Bilješke/komentari**

- ◇ Primjerice, klasična Thomsonova formula iz 1906. zadržala je svoju valjanost kao niskoenergijska granica kovarijantnoga Klein-Nishinina računa (za slučaj fotonskih energija znatno većih od energija vezanja elektrona u atomu);
- ◇ Reyleighovo raspršenje opisuje suprotnu granicu i daje objašnjenje plavetnila neba (ili njegovo rumenilo pri zalasku sunca);
- ◇ Zašto vidimo Sunce kao kuglu dobro definirane granice, kad znamo da takva granica za plinovitu kuglu nebi smjela postojati?
- ◇ Lorentzova transformacija može promijeniti poredak $x_i^0 \leq x_j^0$ ako i samo ako $x_i - x_j < 0$. No tada se po jednadžbi (3.216) originalni poredak može uspostaviti bez promjene T-produkta.

□ **Seminarske teme :**

Jackson, J. D. and L. B. Okun, "Historical Roots of Gauge Invariance", hep-ph/0012061

Lepage, G. P. , "What is Renormalization?", u knjizi predavanja na Boulder, Univ. of Colorado, 1989, ed. T. DeGrand and D. Toussaint, World Scientific , str. 483

Veltman, M. , "Perturbation Theory and Relative Space", hep-ph/9404358

Weinberg, S. , "What is Quantum Field Theory, and What Did We Think It Is?", hep-th/9702027

□ **Zadaci :**

Zadatak 3.1 Naći trag $\text{tr}(ab)$ i $\text{tr}(abca)$.

Rješenje :

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(ab) &= \text{tr}(ba) = \frac{1}{2} \text{tr}(ab + ba) \\
 &= a \cdot b \text{tr}(1) = 4a \cdot b ; \\
 \text{tr}(abca) &= 2a \cdot b \text{tr}(ca) - \text{tr}(bacca) \\
 &= 8a \cdot b c \cdot d - 2a \cdot c \text{tr}(ba) + \text{tr}(bcaca) \\
 &= 8a \cdot b c \cdot d - 8a \cdot c b \cdot d + 2a \cdot d \text{tr}(bc) - \text{tr}(abcac)
 \end{aligned}
 \tag{3.302}$$

$$= 8(a \cdot b \cdot c \cdot d - a \cdot c \cdot b \cdot d + a \cdot d \cdot b \cdot c) - \text{tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}). \quad (3.303)$$

$$(3.304)$$

Zadatak 3.2 Totalni udarni presjek je fizikalna veličina koja ne može ovisiti o sustavu u kojem se mjeri, tj.

$$\sigma_T = \int \frac{d\sigma(\theta_{LS}, \phi_{LS})}{d\Omega_{LS}} d\Omega_{LS} = \int \frac{d\sigma(\theta_{CM}, \phi_{CM})}{d\Omega_{CM}} d\Omega_{CM}. \quad (3.305)$$

LS je oznaka za laboratorijski sustav, a CM za sustav težišta. Kako ϕ daje komponentu veličine gibanja okomitu na relativni smjer gibanja, to je $\phi_{LS} = \phi_{CM}$. Iz izraza koji preko Lorentzovih transformacija povezuju LS i CM izračunava se jacobijan transformacije J

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{LS} \cdot J, \quad (3.306)$$

gdje je

$$J = \frac{\partial(\cos \theta_{LS})}{\partial(\cos \theta_{CM})}. \quad (3.307)$$

Na temelju toga razmotriti slučaj elastičnog raspršenja $A + B \longrightarrow A + B$.

Rješenje : Neka je x smjer gibanja. Onda vrijedi

$$p_{LS}^\mu = (E_{LS}, p_{LS} \cos \theta_{LS}, p_{LS} \sin \theta_{LS}, 0) \quad (3.308)$$

$$p_{CM}^\mu = (E_{CM}, p_{CM} \cos \theta_{CM}, p_{CM} \sin \theta_{CM}, 0). \quad (3.309)$$

Lorentzova transformacija daje

$$p_{LS} \cos \theta_{LS} = \gamma(p_{CM} \cos \theta_{CM} + \beta E_{CM}) \quad (3.310)$$

$$p_{LS} \sin \theta_{LS} = p_{CM} \sin \theta_{CM}, \quad (3.311)$$

pa je

$$\text{tg } \theta_{LS} = \frac{p_{CM} \sin \theta_{CM}}{\gamma(p_{CM} \cos \theta_{CM} + \beta E_{CM})}. \quad (3.312)$$

Za slučaj $A + B \longrightarrow A + B$ se $E_{A/CM}$ ne mijenja, a

$$\beta = \frac{p_{CM}}{E_{B/CM}}; \quad \gamma = \frac{E_{B/CM}}{M_B}. \quad (3.313)$$

Uvrštavanjem dobijemo

$$\text{tg } \theta_{LS} = \frac{M_B \sin \theta_{CM}}{E_B \cos \theta_{CM} + E_A}, \quad (3.314)$$

pa je

$$J = \frac{\tau_1^2 |\tau_2 \cos \theta_{CM} + 1|}{[(1 - \tau_1^2) \cos^2 \theta_{CM} + 2\tau_2 \cos \theta_{CM} + \tau_1^2 + \tau_2^2]^{3/2}} \quad (3.315)$$

gdje je $\tau_1 = M_B/E_B$ i $\tau_2 = E_A/E_B$. Za nerelativistički limes, $\tau_1 \rightarrow 1$ i $\tau_2 \rightarrow M_A/M_B$ dobijemo

$$J = \frac{|\tau_2 \cos \theta_{CM} + 1|}{[2\tau_2 \cos \theta_{CM} + 1 + \tau_2^2]^{3/2}}. \quad (3.316)$$

Zadatak 3.3 Mandelstamove su varijable za proces raspršenja

$$1 + 2 \longrightarrow 3 + 4 \quad (3.317)$$

definirane na način

$$s \equiv (p_1 + p_2)^2; \quad t \equiv (p_1 - p_3)^2; \quad u \equiv (p_1 - p_4)^2. \quad (3.318)$$

Pokazati da s, t i u nisu nezavisne nego da vrijedi

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2. \quad (3.319)$$

Rješenje : Riješimo problem u sustavu težišta (CM), gdje je

$$p_1 = (E_1, \vec{p}); \quad p_2 = (E_2, -\vec{p}); \quad p_3 = (E_3, \vec{q}); \quad p_4 = (E_4, -\vec{q}). \quad (3.320)$$

Onda je

$$s + t + u = (E_1 + E_2)^2 + (E_1 - E_3)^2 - (\vec{p} - \vec{q})^2 + (E_1 - E_4)^2 - (\vec{p} + \vec{q})^2. \quad (3.321)$$

Kako je općenito

$$p_i^2 = E_i^2 - \vec{p}_i^2 = m_i^2, \quad (3.322)$$

iz zakona očuvanja

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \Rightarrow E_1 + E_2 = E_3 + E_4 \quad (3.323)$$

izrazi se npr. E_4 i lako se dobije, uvrštavanjem, tražena relacija.

Zadatak 3.4 Odrediti fizikalno područje Mandelstamovih varijabli s, t i u , za slučaj elastičnog raspršenja $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, (tj. $m_1 = m_3$ i $m_2 = m_4$).

Rješenje : Pokažimo najprije da je $E_1 = E_3$ i $E_2 = E_4$. U sustavu težišta (CM) imamo

$$p_1 = (E_1, \vec{p}); \quad p_2 = (E_2, -\vec{p}); \quad p_3 = (E_3, \vec{q}); \quad p_4 = (E_4, -\vec{q}). \quad (3.324)$$

Iz zakona očuvanja četverovektora impulsa dobijemo da je $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$, a kvadrat zbroja količine gibanja daje $p_1 p_2 = p_3 p_4$ što nam uz

$$p_1^2 = E_1^2 - \vec{p}^2 = m_1^2 = p_3^2 = E_3^2 - \vec{q}^2 = m_1^2 \quad (3.325)$$

daje

$$E_1(E_1 + E_2) = E_3(E_3 + E_4), \quad (3.326)$$

tj. dobijemo da je $E_1 = E_3$. U tom se slučaju varijabla t može izraziti na način

$$\begin{aligned} t &\equiv (p_1 - p_3)^2 = 2m_1^2 - 2E_1 E_3 + |\vec{p}||\vec{q}| \cos \theta \\ &= 2m_1^2 - 2E_1^2 + 2|\vec{p}|^2 \cos \theta = -4|\vec{p}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (3.327)$$

Zahtjev $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, tj. $0 \leq \theta \leq \pi$ vodi na granice za varijablu t :

$$-4|\vec{p}|^2 \leq t \leq 0. \quad (3.328)$$

Granice za s su sasvim razumljive

$$s > (m_1 + m_2)^2, \quad (3.329)$$

a za varijablu u imamo

$$u = (p_1 - p_4)^2 = m_1^2 m_2^2 - 2E_1 E_2 - 2|\vec{p}||\vec{q}| \cos \theta, \quad (3.330)$$

što uz ograničenost kosinusa vodi na

$$-s + 2(m_1^2 + m_2^2) \leq u \leq (E_1 - E_2). \quad (3.331)$$

Zadatak 3.5 Provjeriti normiranje (+) i (-) energijskih rješenja $\Psi^{(+)}$ i $\Psi^{(-)}$ te ortogonalnost pozitivno i negativno energijskih spinora v i u .

Pokazati da vrijede relacije

$$C\gamma^0 v^*(\vec{p}, s) = u(\vec{p}, s) \quad (3.332)$$

$$C\gamma^0 u^*(\vec{p}, s) = v(\vec{p}, s) \quad (3.333)$$

i odatle

$$C\gamma^0 \Psi_{-p,-s}^{(-)*}(x) = \Psi_{p,s}^{(+)}(x). \quad (3.334)$$

Zadatak 3.6 Usporediti zbrajanje impulsa vrtnje za H atom

$$\left(\vec{F} = \vec{J} + \vec{S}_p = \vec{L} + \vec{S}_e + \vec{S}_p \right) \quad (3.335)$$

i za pozitronij

$$\left(\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = \vec{L} + \vec{S}_1 + \vec{S}_2 \right). \quad (3.336)$$

Pokušajte zamisliti najuvjerljiviji mehanizam kojim bi i sam atom vodika mogao u potpunosti izanihilirati u fotone!

Zadatak 3.7 Račun širine raspada parapozitronija ([?] str. 168) daje

$$\Gamma(1^1S_0 \rightarrow 2\gamma) = \frac{4\pi\alpha^2}{m_e^2} |\psi(0)|^2, \quad (3.337)$$

što uvrštavanjem kulonske valne funkcije u ishodištu

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi r_B^{3/2}}} e^{-|\vec{r}|/r_B} \quad (3.338)$$

daje

$$\Gamma(1^1S_0 \rightarrow 2\gamma) = \frac{1}{2} \alpha^5 m_e = 8.03 \cdot 10^{-9} s^{-1}. \quad (3.339)$$

Fizikalno interpretirati taj rezultat.

Zadatak 3.8 Pokazati da se iz (3.238) komptonski udarni presjek svodi na oblik

$$\sigma_C = 2\pi r_e^2 \frac{1}{x} \left\{ \left(1 - \frac{4}{x} - \frac{8}{x^2} \right) \ln(1+x) + \frac{1}{2} + \frac{8}{x} - \frac{1}{2(1+x)^2} \right\}. \quad (3.340)$$

U nerelativističkoj granici ($x \ll 1$) dobiva se Thomsonov udarni presjek (3.245)

$$\sigma_{Thoms} = \frac{8}{3} \pi r_e^2 (1-x), \quad (3.341)$$

a u ultrarelativističkom slučaju ($x \gg 1$)

$$\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{1}{x} \left[\ln(1+x) + \frac{1}{2} \right]. \quad (3.342)$$