Rješenje 5: de Sitterov svemir

I. Picek, Fizikalna kozmologija

De Sitterov svemir opisuje ravni svemir ($k = 0$), bez materije $\rho_m = 0$, te bez zračenja $\rho_r = 0$. Jedina komponenta svemira je vakuumska energija. Iz prve Friedmanove jednadžbe slijedi

$$\frac{\dot{a}}{a} \equiv H(t) = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \tag{1}$$

Rješenje te jednadžbe je $a(t) = a_0 e^{Ht}$, što odgovara tvrdnji izrečenoj u zadatku. Element duljine je tada dan sa

$$ds^2 = dt^2 - a_0^2 e^{2Ht} \left(dr^2 + r^2 d\Omega^2\right) \tag{2}$$

Kako bi se odredilo područje koje je kauzalno povezano s opažačem u ishodištu, promatraju se fotoni koji se gibaju radijalno iz ishodišta $r = 0$ prema van

$$ds^2 = 0 = dt^2 - a_0^2 e^{2Ht} dr^2 \tag{3}$$

Iz gornje jednadžbe slijedi

$$\pm dr = \frac{1}{a_0} e^{-Ht} dt \tag{4}$$

Odabire se + predznak, budući da radijalna koordinata raste u vremenu. Integrira se gornja jednadžba

$$\begin{aligned} \int_0^R dr &= \frac{1}{a_0} \int_0^T e^{-Ht} dt \\ \Rightarrow R &= \frac{1}{a_0 H} \left(1 - e^{-HT}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Koordinatna udaljenost koji fotoni mogu prijeći u vremenu T je dana izrazom

$$R = \frac{1}{a_0 H} \left(1 - e^{-HT}\right) \tag{6}$$

U limesu $T \to \infty$ imamo

$$\lim_{T \to \infty} = \frac{1}{a_0 H} < \infty \tag{7}$$

Dakle, postoji maksimalna koordinatna udaljenost koji fotoni mogu prijeći, čak i ako za to imaju beskonačno vremena na raspolaganju. Radijus $\frac{1}{a_0 H}$ zovemo de Sitterov radijus.