Rješenje 8: Termodinamika ravnotežnih procesa

I. Picek, Fizikalna kozmologija

U nerelativističkom limesu vrijedi

$$E_i = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_i^2} \approx m_i + \frac{\mathbf{p}^2}{2m_i}. \tag{1}$$

Tada relacija (2) iz zadatka postaje

$$n_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{e^{\sqrt{\mathbf{p}^2+m_i^2}/T} \pm 1} \approx \frac{g}{2\pi^2} e^{\frac{m_i}{T}} \int \mathbf{p}^2 e^{-\frac{\mathbf{p}^2}{T}} = g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-m_i/T}. \tag{2}$$

U drugoj jednakosti je zanemaren ± 1 član, to jest upotrebljeno je da kada vrijedi $E \gg T$, tada $f(\mathbf{p}) \approx e^{-E(\mathbf{p})/T}$.

Analogno

$$\rho_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int \frac{\left(m_i + \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right) d^3p}{e^{\sqrt{\mathbf{p}^2+m_i^2}/T} \pm 1} \approx m_i n_i + \frac{g_i}{4\pi^2 m_i} e^{m_i/T} \int \mathbf{p}^4 e^{-\mathbf{p}/m_i T} = m_i n_i + \frac{3T}{2} n_i. \tag{3}$$

Bozonska, tj. fermionska priroda čestice ne igra ulogu u izrazima, budući da je ± 1 član zanemaren u računu. Prosječna energija pojedine vrste čestica je dana sa

$$\langle E_i \rangle = \frac{\rho_i}{n_i} = m_i + \frac{3}{2} T. \tag{4}$$

U punim jedinicama, gornja relacija glasi

$$\langle E_i \rangle = m_i c^2 + \frac{3k_b}{2} T. \tag{5}$$

To je poznata relacija, koja kaže, da osim energije mirovanja čestice $m_i c^2$, prosječna termalna energija čestice je $3k_b T/2$.