

## Rješenje 2: GPS

I. Picek, Fizikalna kozmologija

1. Potrebni parametri se dobivaju iz poznatog vremena revolucije satelita

$$T_s = 12 \text{ h} = 4.32 \cdot 10^4 \text{ s.} \quad (1)$$

Za to vrijeme vrijeme satelit prevoli orbitu

$$T_s v_s = 2\pi r_s. \quad (2)$$

Sa druge strane, iz centripetalnog ubrzanja satelita

$$\frac{v_s^2}{r_s} = G_N \frac{M}{r_s^2} \implies r_s = G_N \frac{M}{v_s^2}, \quad (3)$$

gdje je  $M$  masa Zemlje. Iz relacija (2) i (3) slijedi

$$r_s = \sqrt[3]{\frac{G_N M}{(2\pi)^2 T_s^2}}. \quad (4)$$

Numeričke vrijednosti potrebnih parametara su

$$G_N = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, \quad M = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad (5)$$

što vodi na

$$r_s = 2.66 \cdot 10^7 \text{ m.} \quad (6)$$

ili izraženo preko radiusa Zemlje,  $R = 6.38 \cdot 10^6 \text{ m}$

$$r_s = 4.17 R. \quad (7)$$

Iz tog računa se dobiva za brzinu

$$v_s = \frac{2\pi v_s}{T_s} = 3.86 \cdot 10^3 \text{ m/s} \approx 3.9 \text{ km/s.} \quad (8)$$

2. Dilatacija vremena u STR vodi na

$$\tau_s = \gamma_s \tau_0, \quad (9)$$

dano faktorom

$$\gamma_s = \sqrt{1 - \beta_s^2} = 1 + \beta_s^2 + \dots \quad (10)$$

tako da će korekcija biti

$$\frac{\beta_s^2}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{v_s^2}{c^2} \right) = 0.83 \cdot 10^{-10} \quad (11)$$

Treba primjetiti kako je u prethodnom računu bila zanemara brzina vrtnje sata na površini Zemlje.

3. Sustavi slobodnog pada sata na satelitu i sata na Zemlji su na različitim potencijalima  $\phi = -G_N \frac{M}{r}$  što vodi na

$$\frac{\partial \tau_s}{\tau} \approx 1 + \frac{\phi_s - \phi}{c^2} = 1 - G_N \frac{M}{c^2} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r_s} \right), \quad (12)$$

gdje faktor korekcije uslijed GTR iznosi  $0.53 \cdot 10^{-9}$ . Primjerice, tijekom jedne minute uspoređujemo

$$\begin{aligned} (\Delta t)_{STR} &= 60 \cdot 0.83 \cdot 10^{-10} \text{ s} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 5 \text{ ns}, \\ (\Delta t)_{GTR} &= -60 \cdot 0.53 \cdot 10^{-9} \text{ s} = -31.8 \cdot 10^{-9} \text{ s} = -31.8 \text{ ns}. \end{aligned} \quad (13)$$

Dakle, učinak GTR na pomak sata je šesterostruko veći nego uslijed STR.