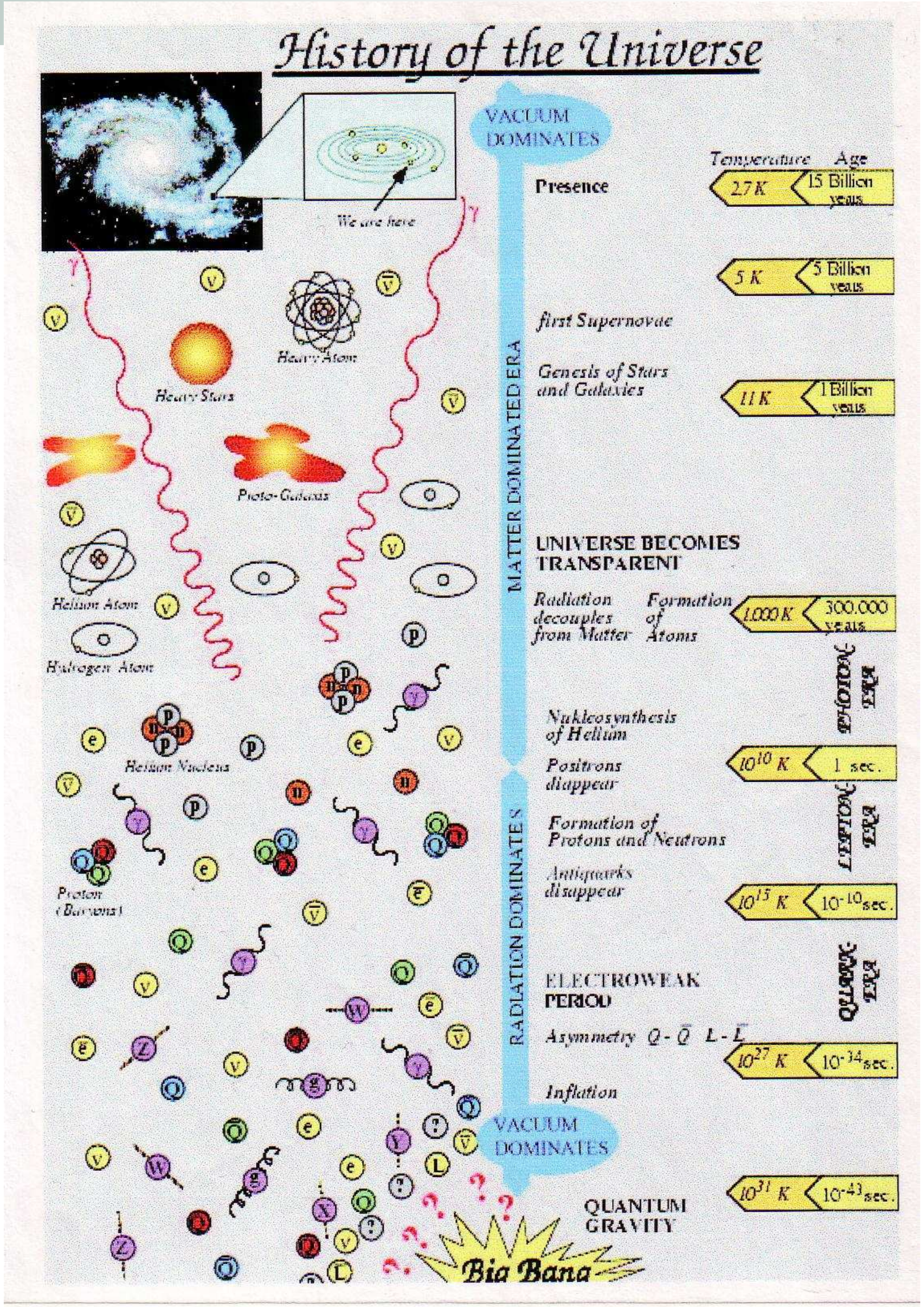
FIZIKALNA

KOZMOLOGIJA

VI.

EKSPLICITNA RJEŠENJA

FRIEDMANNOVE JEDNADŽBE



Ravni svemir u eri tvari: w= 0

◊ Rješenja Friedmann-ovih j-bi

□ uz poznatu **jednadžbu stanja**

$$p = p(\rho) \rightarrow \boxed{p = w\rho c^2 ;\ 0 \le w \le 1}$$

- sadašnja epoha (prašina bez tlaka): $w=0$
- epoha ranog svemira (UR čestica/zrač.): $w=1/3$

i relaciju sadržanu u Friedmann j-bama (oč. tenzora $T^{\nu\mu}_{;\mu}=0$)

$$\boxed{\frac{d}{dS}(\varepsilon S^3) + 3pS^2 = 0}$$

LHS: promjena energije u sugibajućem vol.

$$\boxed{d(\rho c^2 S^3) = -p\,d(S^3)}$$

RHS: tlak × promj. vol.

$$\boxed{\rho \propto S^{-3(1+w)}} \rightarrow \ \propto \begin{cases} S^{-3} & \text{tvar } w=0 \\ S^{-4} & \text{zrač. } w=1/3 \\ \text{const.} & \text{vakuum } w=-1 \end{cases}$$

□ Fr. j.

$$\boxed{\underbrace{\frac{\dot S^2}{S^2}}_{\equiv H^2} + \frac{kc^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho} \qquad (*)$$

$/H^2 \Rightarrow$

$$1 + \frac{kc^2}{H^2S^2} = \frac{\rho}{3H^2/8\pi G} \Rightarrow$$

$$k = \frac{S^2H^2}{c^2}(2q-1) \quad \text{ili} \quad \frac{kc^2}{H^2S^2} = \frac{\rho}{\frac{3H^2}{8\pi G}} - 1$$

$$\Omega \equiv \rho/\rho_c$$

Vježba:
6.1 slučaj obične tvari
6.2 primjeri neobične
...

- Rješenje za $k=0$

Einstein-deSitterov model (1932)

$(*)\big|_{t=t_0}$ uz Hubbleovu konstantu sadašnje epohe $H_0 \equiv \frac{\dot{S}}{S}\Big|_{t_0}$ $\Rightarrow$

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \equiv \rho_c$$

$$= 2 \cdot 10^{-29}\, h_0^2\, g\, cm^{-3} \simeq 10^2 \cdot \rho_B$$

gustoća opažene barionske tvari $\simeq 10^{-31}\, g\, cm^{-3}$

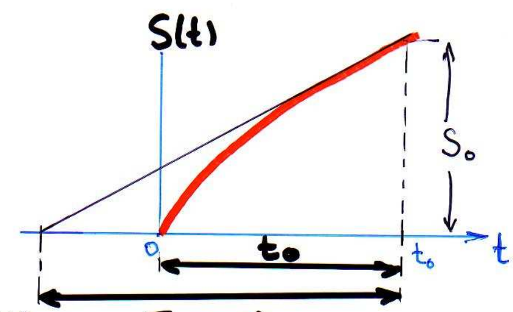
$$\frac{\dot{S}}{S} \equiv H(t) = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho\right)^{1/2}$$

$\rho \propto S^{-3}$ u sadašnjoj $(w=0)$ epohi

$$\Rightarrow \int dS\, S^{-1+3/2} \propto \int dt$$

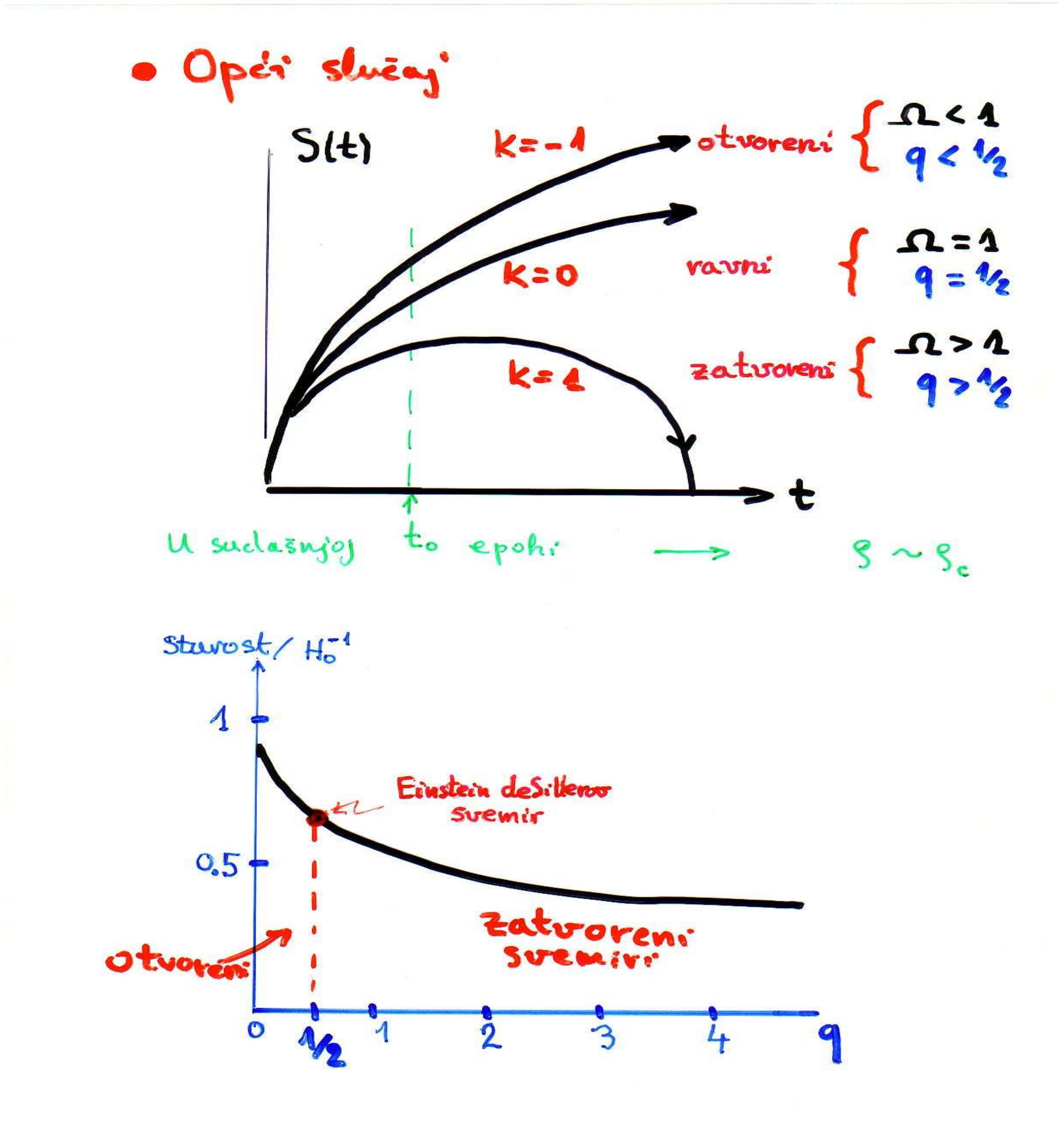
$$\Rightarrow \frac{2}{3} S^{3/2} \propto t - t_{poč}$$

$$\boxed{\frac{S(t)}{S_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \quad ; \quad S(t_{poč}) = 0}$$



- Hubble-ovo vrijeme $T_H = H_0^{-1}$
- $\frac{1}{S_0}\dot{S}\Big|_{t=t_0} = \frac{2}{3}\frac{1}{t_0}$ $\Rightarrow$ starost svemira $t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1}$

Dodajmo k=1, -1



• Opći slučaj
S(t)
k=-1
otvoreni
Ω < 1
q < 1/2
k=0
ravni
Ω = 1
q = 1/2
k=1
zatvoreni
Ω > 1
q > 1/2
t
U sadašnjoj t₀ epohi
ρ ~ ρc
Starost / H₀⁻¹
1
0.5
Einstein deSitterov svemir
otvoreni
zatvoreni svemiri
0
1/2
1
2
3
4
q

Diskusija kozmološke konstante

$$\boxed{\text{KOZMOLOŠKI MODELI S } \Lambda\text{ - ČLANOM}}$$

Einstein-Friedmann-ove j-be / za prašinu

$$2\frac{\ddot S}{S} + \frac{\dot S^2 + kc^2}{S^2} - \Lambda c^2 = \left(\frac{8\pi G}{c^2} T^1_1\right) \to 0$$

$$\frac{\dot S^2 + kc^2}{S^2} - \frac{\Lambda}{3} c^2 = \left(\frac{8\pi G}{3c^2} T^0_0\right) \to \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \frac{S_0^3}{S^3}$$

vode (za $S = S_0$, $\dot S = 0$, $\ddot S = 0$) na

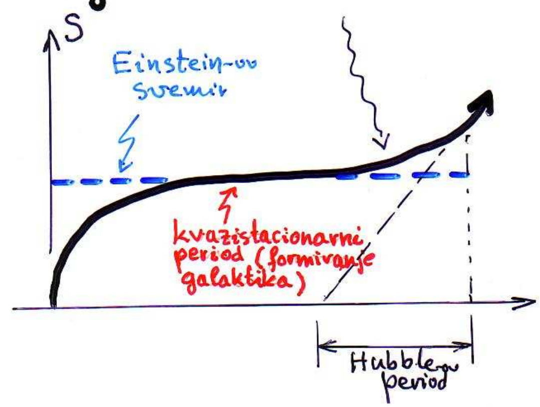
◊ STATIČKI EINSTEINOV MODEL

uz uvjete $\boxed{\Lambda = \Lambda_c = \frac{1}{S_0^2} \; ; \quad \rho_0 = \frac{\Lambda_c c^2}{4\pi G}}$ za $k=+1$,

uz koje je statičko rješenje moguće!

Nestabilnost na malu promjenu $\Lambda = \Lambda_c + \varepsilon \Rightarrow$

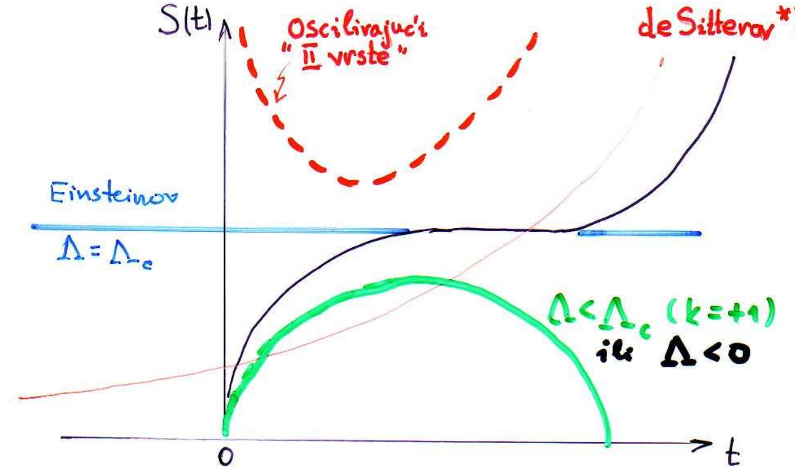
◊ Eddington - Lemaître-ov model



Kozmologije s $k=0$ ili $k=-1$

$$\dot{S}^2 = -kc^2 + \frac{1}{3}\Lambda c^2 S^2 + \frac{8\pi G}{3}\rho_0 S_0^3/S$$

Za $\Lambda > 0$ ekspanzija ($\dot{S}$ ne mijenja predznak)



Općenito (iz Einst-Friedmann-ovih j-b)

$$\Omega_0 = 2q_0 + \underbrace{\frac{2}{3}\Lambda \frac{c^2}{H_0^2}}$$

*) za $\Lambda > 0$ moguća je negativna deceleracq. (akcelerirajuća ekspanzija !) – od dodatne kozmičke repulzije.

$$\Omega_M = 2q_0 + 2\Omega_\Lambda$$

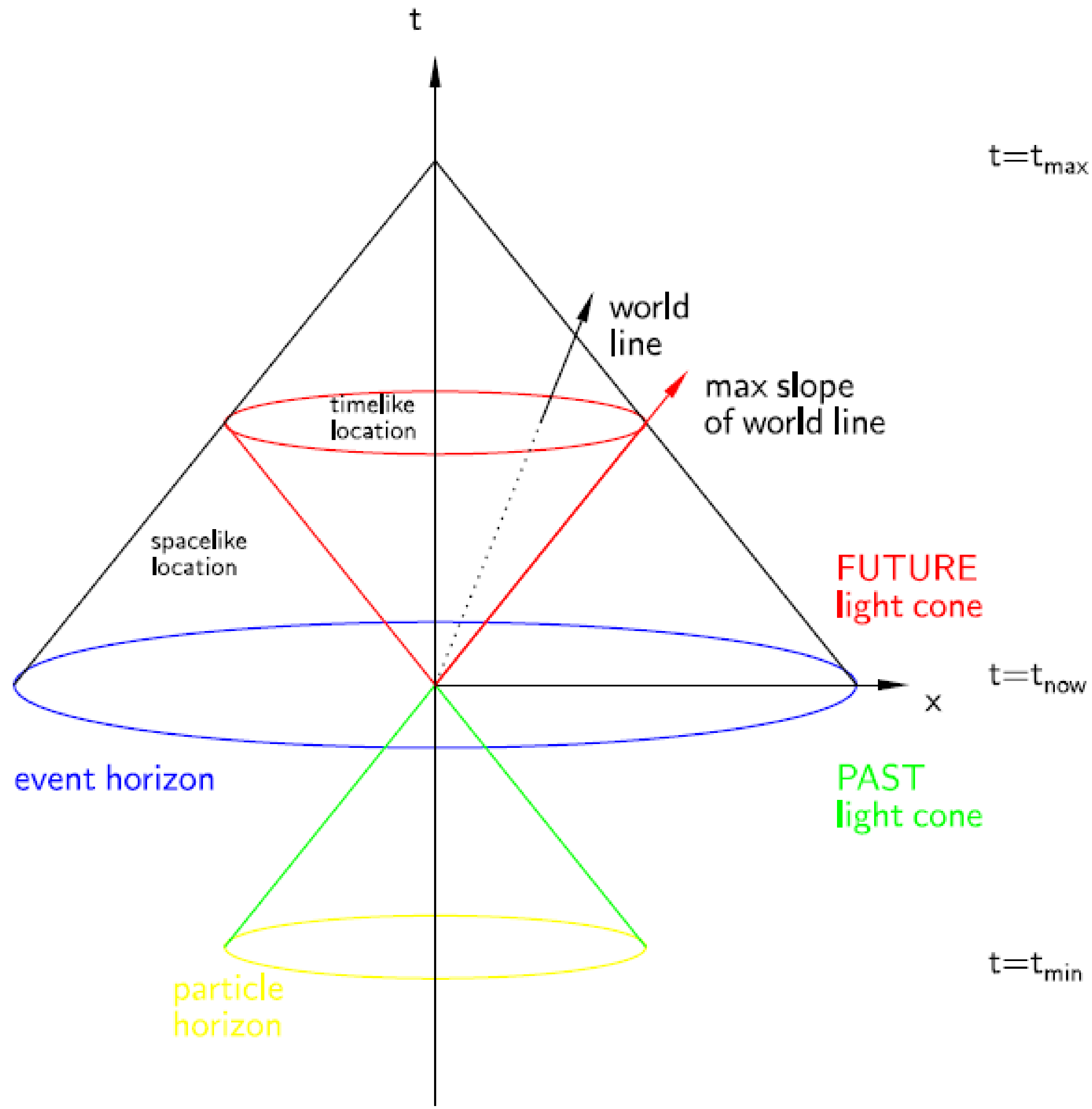
ČESTIČNI HORIZONT (PROŠLOSTI) & HORIZONT DOGAĐAJA (BUDUĆNOSTI)

Čestični horizont

$$d_H(t_0) = S(t_0)\int_0^{r_e}\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = S(t_0)\int_0^{t_0}\frac{c\,dt}{S(t)}$$

Horizont događaja

$$d_E = S(t)\int_t^{\infty}\frac{c\,dt'}{S(t')}$$


t
t=tmax
world
line
max slope
of world line
timelike
location
spacelike
location
FUTURE
light cone
t=tnow
x
event horizon
PAST
light cone
t=tmin
particle
horizon

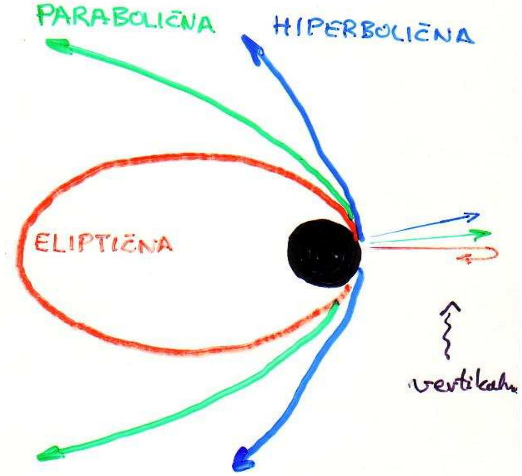
Vježba: Friedmannove jednadžbe u Newtonovoj granici

Ekspandirajuća kozmička lopta

- RAZUMIJEVANJE FRIEDMANN-ovih J-bi u okviru Newtonove kozmologije [Edward Milne & William McCrea 1934]

- Tangencijalno izbacivanje brzinom v,

$$v \gtreqless v_{oslob.}$$



$$(v_{oslob.})^2 = \frac{2GM}{r}$$

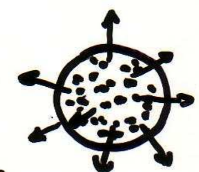
za statičku loptu fiksiranog radijusa r, mase M

- Zamislimo sada EKSPANDIRAJUĆU loptu *)

K.E. + P.E. = $E_{ukup.}$

konstantna za svaku česticu → za jediničnu masu na površini

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = E_u$$



$$v^2 = \frac{2GM}{r} + 2E_u \qquad (*)$$

$$E_u \gtreqless 0$$

← kad lopti nedostaje K.E. za ekspanziju do ∞-sti

*) čestice na lopti su u slobodnom padu u gravitac. polju lopte

U usporedbi s "faktorom širenja" / **parametrom skale**

za kozmičku loptu radijusa r_0 $\longleftrightarrow$ S_0 ,

u nekom drugom času $\quad r = r_0 \left(\frac{S}{S_0} \right) \Rightarrow$ brzina površine v :

$\Rightarrow \boxed{v = r_0 \frac{\dot{S}}{S_0}}$

Masa lopte & $\boxed{M = \frac{4\pi r^3}{3} \rho}$

uvršteno u **(*)** $\Rightarrow$

$$\dot{S}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho S^2 + \underbrace{\frac{S_0^2}{r_0^2} \cdot (2E_u)}_{\text{const.}}$$

const. $\leftrightarrow$ $-kc^2$ Friedmannove j-be

ima istu vrij. za sve čestice u lopti

Jednadžba kozmičke lopte podudara se s Friedmannovom

USPOREDBA

Newton		**OTR**
orbite ←	**k**	→ **geometrije**
u običnom prostoru ←	**ekspanziju**	→ prostora samog

podudaranje u režimu podudaranja Newtonove gravitac. i OTR (za slabu gravitaciju , izraženu s $(v_{osc.})^2 \ll c^2$)

→ za mali uzorak lokalnog svemira nema potrebe razlikovati gibanje kroz prostor i sugibanje u ekspandirajućem prostoru.

Newtonova slika svodi ekspanziju na početni uvjet / početno "lansiranje"