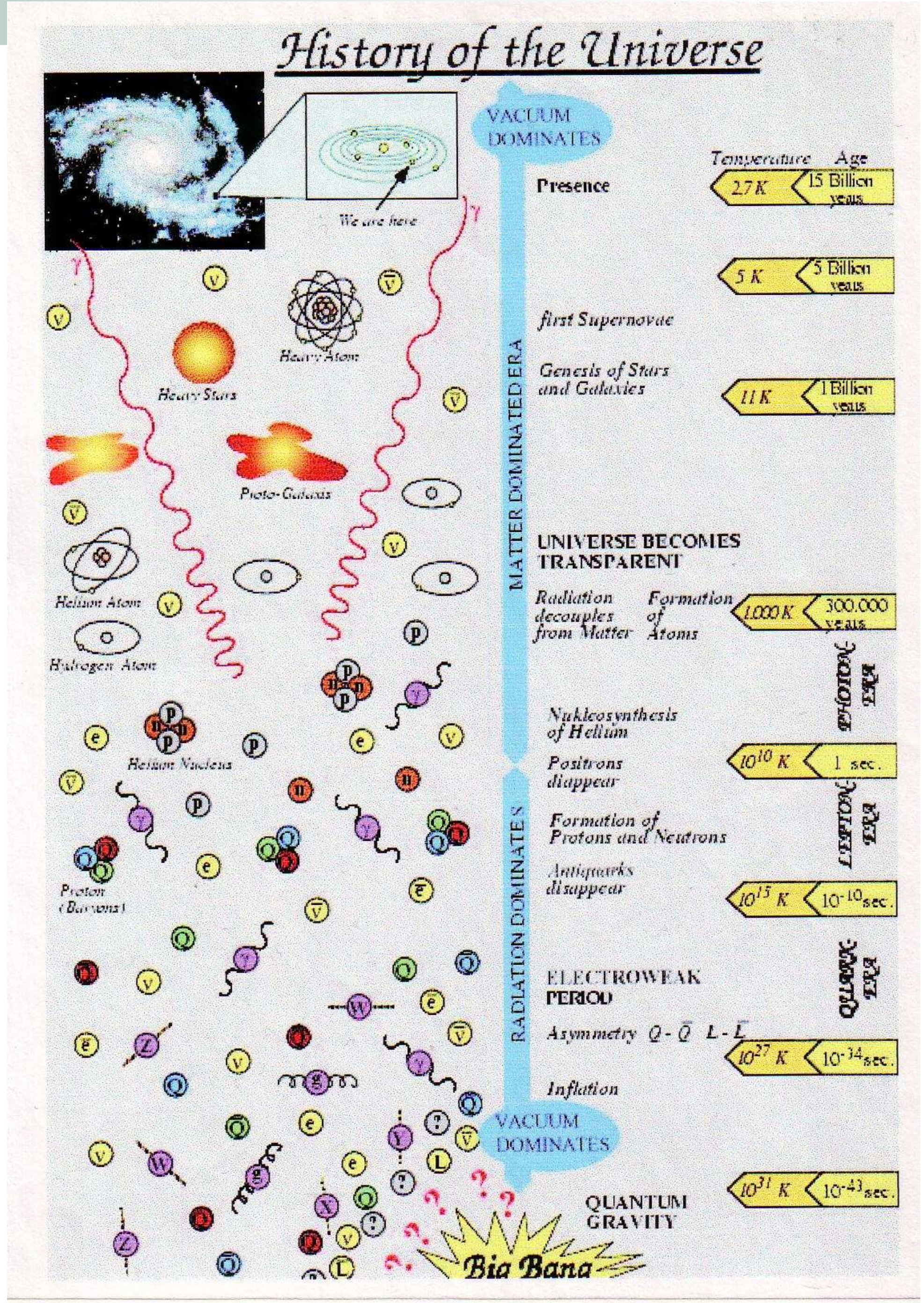
FIZIKALNA

KOZMOLOGIJA

IV. FRIEDMANNOVE JEDNADŽBE ZA IDEALIZIRANI SVEMIR



Idealiziran svemir

FRIEDMANNovi KOZMOLOŠKI MODELI

Narlikar '93, Ch4

◊ **Idealizirani svemiri**

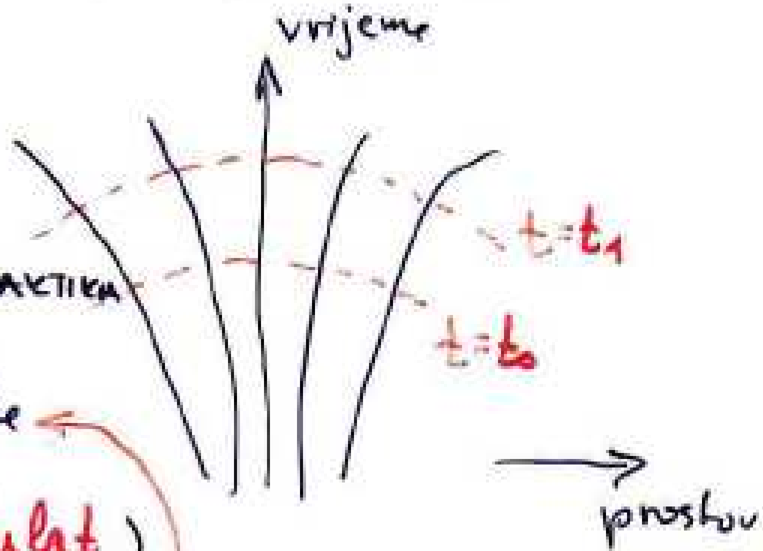
– savršeno homogeni i izotropni, poznati su kao "Robertson–Walkerovi": prostor-vrijeme je razloženo na
{ zakrivljeni prostor & **kozmičko vrijeme** :

- Satovi na **sugibajućim (engl. comoving)** galaktikama mjere **kozmičko vrijeme** ;
- Svjetske crte sugibajućih galaktika okomite su na **kozmički prostor**, koji je ravnomjerno zakrivljen i prolazi kroz jednoliku ekspanziju
- Galaktike posjeduju i osobna (engl. peculiar) gibanja, no ona su slučajna pa usrednjenjem preko velikog broja susjednih galaktika možemo ustanoviti brzinu razdvajanja (recession) na toj udaljenosti

Robertson-Walkerova metrika

– kozmička ekspanzija ukazuje na svjetske crte koje se razilaze

– 3-svežnjevi geodetskih crta GALAKTIKA ortogonalnih na prostorne hiperplohe (pravilnost poznata kao Weylov postulat)



plohe istodobnosti u odnosu na KOZMIČKO VRIJEME

KOZMOLOŠKO NAČELO zahtijeva homogenost i izotropnost svemira u svakom času kozmičkog vremena $\Rightarrow$ $g_{0i}=0$ $(i=1,2,3)$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\sigma^2$$

uz različite mogućnosti za zakrivljenost 3D površine

(r, ϑ, φ) su "sugibajuće koordinate"

$$\boxed{ds^2 = c^2 dt^2 - S^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)\right]}$$

Kao 4-D interval usklađen s kozmološkim načelom!

uz transf. radijalne koor. $\bar{r} = \frac{2r}{1+(1-kr^2)^{1/2}}$

$$\boxed{c^2 dt^2 - \frac{S^2(t)}{\left(1+\frac{k\bar{r}^2}{4}\right)^2}\left[d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)\right]}$$

očigledna je izotropnost u $(\bar{r}, \vartheta, \varphi)$!

10 komponenti metričkog tenzora $\longrightarrow$ jedna f-ja $S(t)$, f-ja ekspanzije.

SUGIBAJUĆE KOORDINATE EKSPANDIRAJUĆEG SVEMIRA

- sustav sugibajućih koordinata <=> KOZMOLOŠKE KOORDINATE

od pomoći kozmolozima koji moraju razlikovati osobna gibanja od ekspanzije,

da bi se na temelju izučavanja malog **idealiziranog** područja moglo zaključiti o ekspanziji svemira kao cjeline, s **univerzalnim**

faktorom širenja (engl. scaling factor) S.

radijalna sugibajuća koordinata -KOORDINATNA UDALJENOST

□ $\text{udaljenost} = S \cdot \underbrace{(\overset{\chi}{\text{koord. udaljenost}})}_{\text{konstanta u fiksiranom sugibajućem koor. sust.}}$ (1)

2-D površina $\sim S^2$

3-D volumen $\sim S^3$

U ekspandirajućem svemiru S raste u kozm. vremenu

→ povezuje se s **Hubble**ovom konstantom:

□ brzina razdvajanja sugibajućih tijela $= \dot{S} \cdot \underbrace{(\overset{\chi}{\text{koor. udalj}})}_{(1)=\frac{\text{udaljenost}}{S}}$ (2)

$$= \left(\frac{\dot{S}}{S}\right) \cdot \text{udaljenost} \qquad (2')$$

$\equiv H(t)$ (Hubbleov Parametar)

⇓

□ akceleracija razdvajanja $= \ddot{S} \cdot (\overset{\chi}{\text{koor. udalj.}}) = \frac{\ddot{S}}{S} \cdot \text{udalj.}$

∴ {parametar deceleracije "q"}: $-q(t)\,H^2 \equiv \frac{\ddot{S}}{S}$ [Narlikar (4.40)]

VEZA PARAMETRA SKALE I CRVENOG POMAKA

Vježba 4.1:
Formula za crveni pomak

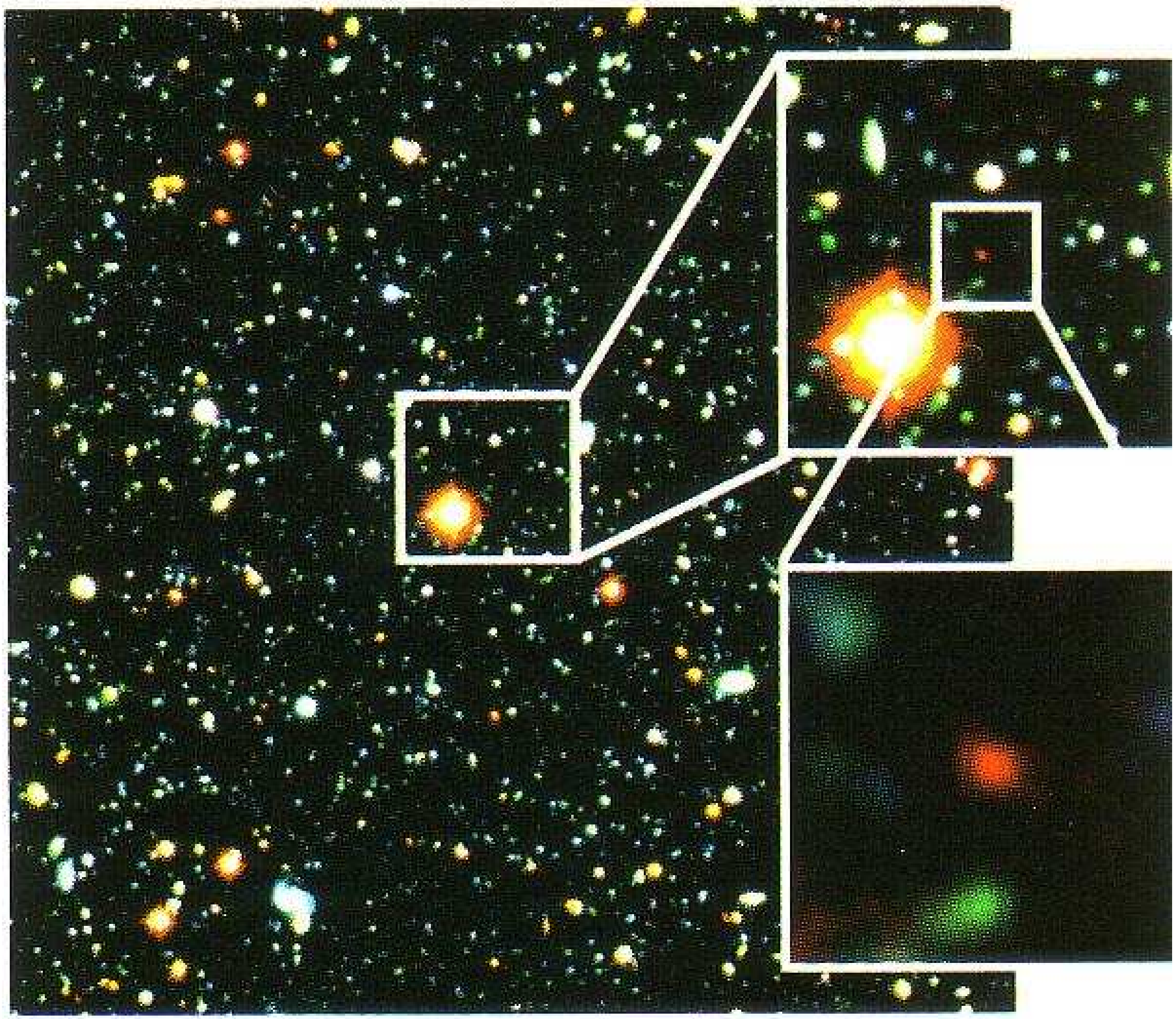
$$\frac{S(t_0)}{S(t_e)} = z + 1$$

Vježba 4.2:
Za male z

Za male crvene pomake

$$z = H_0 (t_0 - t_e) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 (t_0 - t_e)^2 + \dots$$

Galaktika na z=6.96, M. Iye et. al. 2006 Nature 443, 186



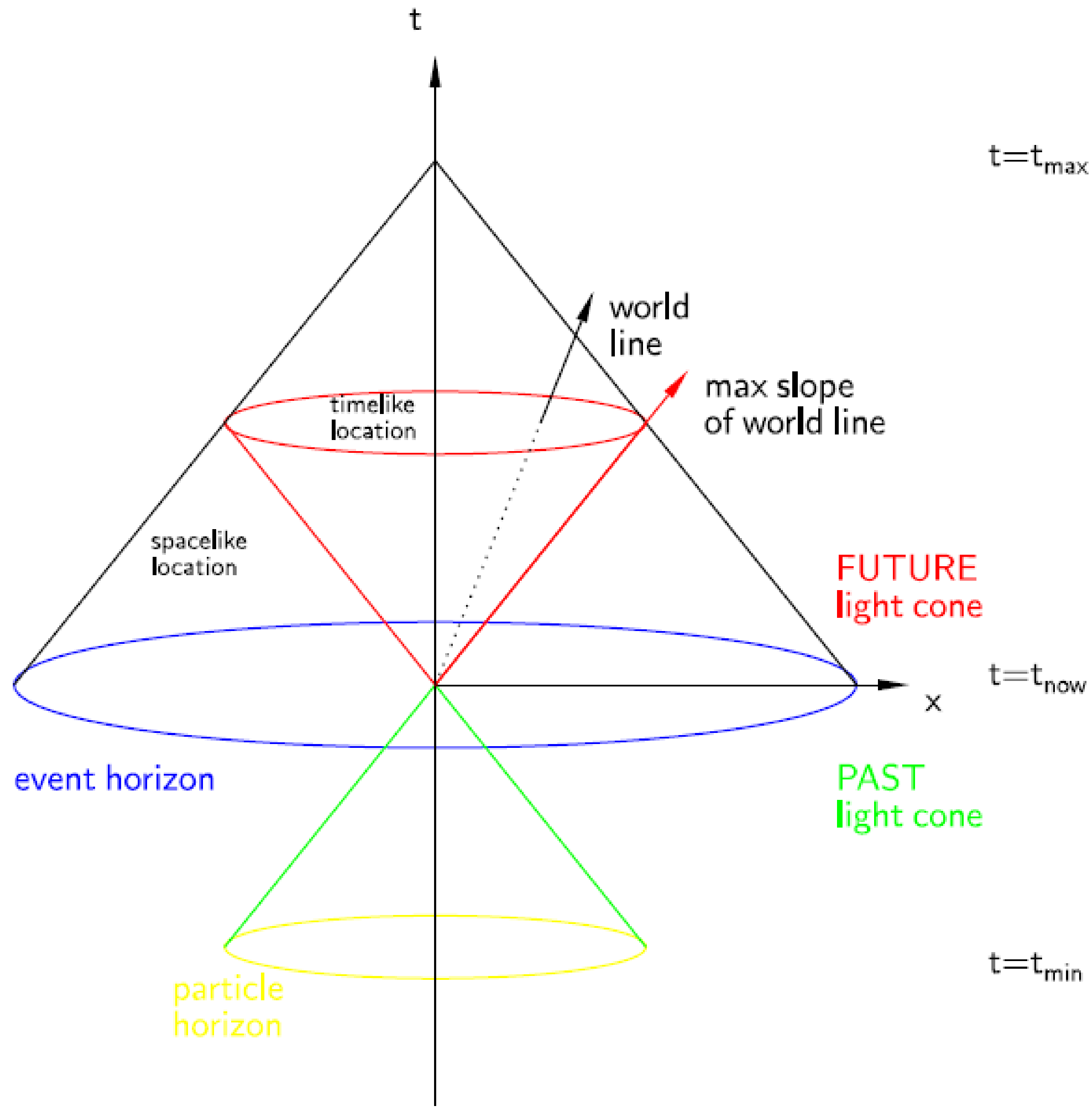
ČESTIČNI HORIZONT (PROŠLOSTI) & HORIZONT DOGAĐAJA (BUDUĆNOSTI)

Čestični horizont

$$d_H(t_0) = S(t_0)\int_0^{r_e}\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = S(t_0)\int_0^{t_0}\frac{c\,dt}{S(t)}$$

Horizont događaja

$$d_E = S(t)\int_t^{\infty}\frac{c\,dt'}{S(t')}$$


t
$t=t_{max}$
world
line
max slope
of world line
timelike
location
spacelike
location
FUTURE
light cone
$t=t_{now}$
x
event horizon
PAST
light cone
$t=t_{min}$
particle
horizon

R-W metrika, Cristoffel, Ricci...

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left(1, \underbrace{\frac{-S^2}{1-kr^2}}, \underbrace{-S^2 r^2}, \underbrace{-S^2 r^2 \sin^2\vartheta}\right)$$

$$g_{00} = 1, \quad g_{rr} = -\frac{S^2}{1-kr^2}, \quad g_{\vartheta\vartheta}, \quad g_{\varphi\varphi}$$

Kontravarijantni

$$g^{\mu\nu} \qquad\qquad g^{ii} = (g_{ii})^{-1}, \quad i = r, \vartheta, \varphi$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left[g_{\beta\mu,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta} \right]$$

$$\Gamma^{0}_{rr} = \frac{S\dot{S}}{c(1-kr^2)}, \quad \Gamma^{0}_{\vartheta\vartheta} = \frac{S\dot{S}r^2}{c}, \quad \Gamma^{0}_{\varphi\varphi} = \frac{S\dot{S}r^2\sin^2\vartheta}{c}$$

$$\Gamma^{r}_{rr} = \frac{r}{1-kr^2}, \quad \Gamma^{\vartheta}_{r\vartheta} = \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^{r}_{\vartheta\vartheta} = -r(1-kr^2)$$

$$\Gamma^{r}_{0r} = \Gamma^{\vartheta}_{0\vartheta} = \Gamma^{\varphi}_{0\varphi} = \frac{1}{c}\frac{\dot{S}}{S}$$

$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = -r(1-kr^2)\sin^2\vartheta, \quad \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta, \quad \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} = \mathrm{ctg}\,\vartheta$$

$$R_{\beta\mu} = -\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha,\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\alpha}$$

$R_{0\mu} = 0$, $R_{ij} = 0$ za $i \neq j$ (za vježbu)

$$R_{00} = \frac{3\ddot{S}}{c^2 S} \quad , \quad R_{ii} = \frac{S\ddot{S} + 2\dot{S}^2 + 2kc^2}{c^2 S^2} \qquad (i = r, \vartheta, \varphi)$$

$$R = g^{\mu\lambda} R_{\mu\lambda} = R^{\mu}_{\mu} = \frac{6}{c^2 S^2}\left(\ddot{S}S + \dot{S}^2 + kc^2\right)$$

$$G^0_0 \equiv R^0_0 - \frac{1}{2}R = -\frac{3}{c^2}\left(\frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2}\right)$$

$$G^1_1 \equiv R^1_1 - \frac{1}{2}R = -\frac{1}{c^2}\left(2\frac{\ddot{S}}{S} + \frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2}\right) = G^2_2 = G^3_3$$

Lijeva strana Einsteinove jedn.

- **Friedmannove j-be**
  - kao specifikacija Einsteinovih BEZ kozmol. člana, na IDEALIZIRANI SVEMIR s **Robertson-Walkerovom metrikom** kojom izražavamo lijevu stranu Einst. j-be

"LHS": – Einsteinov tenzor

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

$$G^1_1 \equiv R^1_1 - \frac{1}{2} R = -\frac{1}{c^2}\left(2\frac{\ddot{S}}{S} + \frac{\dot{S}^2 + k c^2}{S^2}\right) = G^2_2 = G^3_3$$

$$G^0_0 \equiv R^0_0 - \frac{1}{2} R = -\frac{3}{c^2}\left(\frac{\dot{S}^2 + k c^2}{S^2}\right)$$

Einsteinova jednadžba vrijedi kovarijantno - sugibajuće koordinate transformiramo u **koordinate slobodnog pada**, gdje su nam poznati izrazi za tenzor energije-impulsa

$$T^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\beta} T^{\alpha\beta}(\xi=0) \; ; \quad x = x(\xi=0)$$

$$T^{00} = \rho \; , \; T^{ii} = p = -p\,\eta^{ii}$$

$(i = r, \vartheta, \varphi)$

$$T^{\mu\nu} = U^\mu U^\nu \rho + (U^\mu U^\nu - g^{\mu\nu})\,p$$

$$U^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^0}$$ 4-brzina $\begin{cases} x\text{-a u odn. na } \xi \\ \text{č. u sust. } x \; (=0 \text{ u sust. } \xi) \end{cases}$

& desna strana jednadžbe

"RHS" – desna strana Einsteinove j-be
određena tenzorom energije-impulsa, $T_{\mu\nu}$

$$-\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \qquad \begin{cases} T^0_0 = \varepsilon \\ \underbrace{T^1_1 = T^2_2 = T^3_3}_{\text{izotropnost!}} = -p \end{cases}$$

$$2\frac{\ddot{S}}{S} + \frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{c^2} T^i_i \quad ; \; i = 1,2,3 \qquad (1)$$

$$\frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} T^0_0 \qquad (2)$$

$$T^\mu{}_\nu = \underbrace{T^\mu{}_\nu\big|_{\text{tvari}}}_{\xrightarrow{\text{URL}} \text{diag}(\varepsilon, -\varepsilon/3, -\varepsilon/3, -\varepsilon/3)} + \underbrace{T^\mu{}_\nu\big|_{\text{zračenja}}}_{T^0_0 = \varepsilon}$$

VEZA DVIJU JEDNADŽBI

$(1)-(2) \Rightarrow$

$$2\frac{\ddot{S}}{S} = -\frac{8\pi}{3c^2}G(\rho c^2 + 3p)$$

$\frac{d}{dt}\left[(1) \times S^2\right] \Rightarrow$

$$2\dot{S}\ddot{S} = \frac{8\pi}{3}G(\dot{\rho}S^2 + 2\rho S\dot{S})$$

$$\boxed{\dot{\rho}c^2 S + 3(\rho c^2 + p)\dot{S} = 0}$$

Vježba 4.3: Slično pokazati

$$\frac{d}{dS}(\rho c^2 S^3) + 3pS^2 = 0$$

DANAŠNJA EPOHA – EPOHA MATERIJE

U današnjoj epohi (s faktorom širenja S_0)

gustoća zračenja $\varepsilon_0 \simeq 10^{-13}\,\mathrm{erg\,cm^{-3}}$ $\ll$ gustoća tvari $\gtrsim$ $\rho_0 c^2 \gtrsim 10^{-10}\,\mathrm{erg\,cm^{-3}}$

indicira prijelaz na $S \simeq 10^{-3} S_0$

svemira dominiranog zračenjem $\longrightarrow$ u svemir dominiran materijom

Sugibajući volumen

$V = V_0 \left(\frac{S}{S_0} \right)^3$

uz konstantan broj čestica

$\Rightarrow \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{S_0}{S} \right)^3$

Izbor $\begin{cases} T^0_0 = \rho_0 c^2 \frac{S_0^3}{S^3} \\ T^i_i = 0 \end{cases}$

vodi na Friedmannove j-be

$$\boxed{\begin{aligned} &2\frac{\ddot{S}}{S} + \frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} = 0 \\ &\frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} = \frac{8\pi G \rho_0}{3} \cdot \frac{S_0^3}{S^3} \end{aligned}}$$

- nisu nezavisne $\rightarrow$ iz jedne od njih određuje se $S(t)$ za 3 slučaja $(k = 0, 1, -1)$, zasebno.