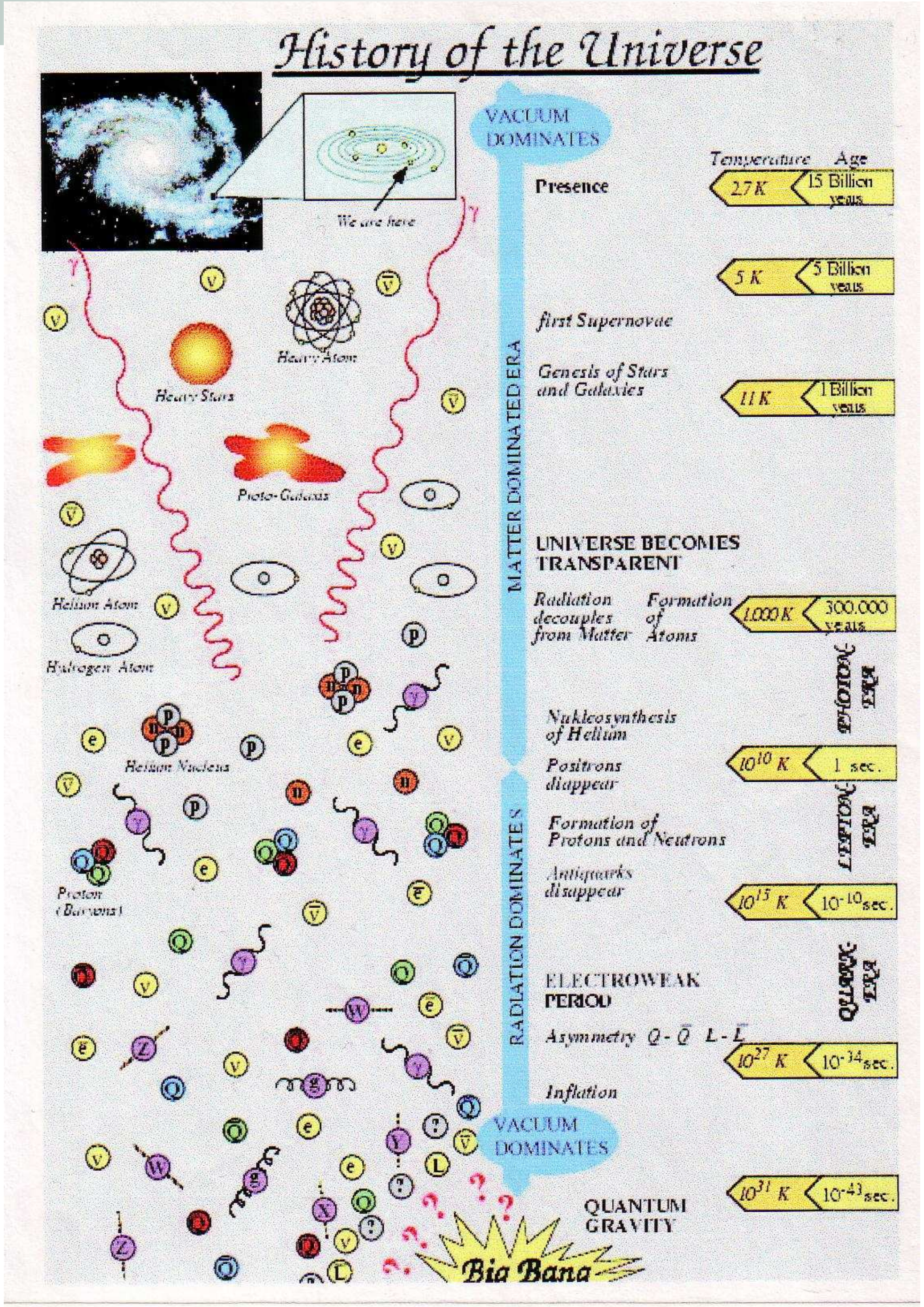
FIZIKALNA

KOZMOLOGIJA

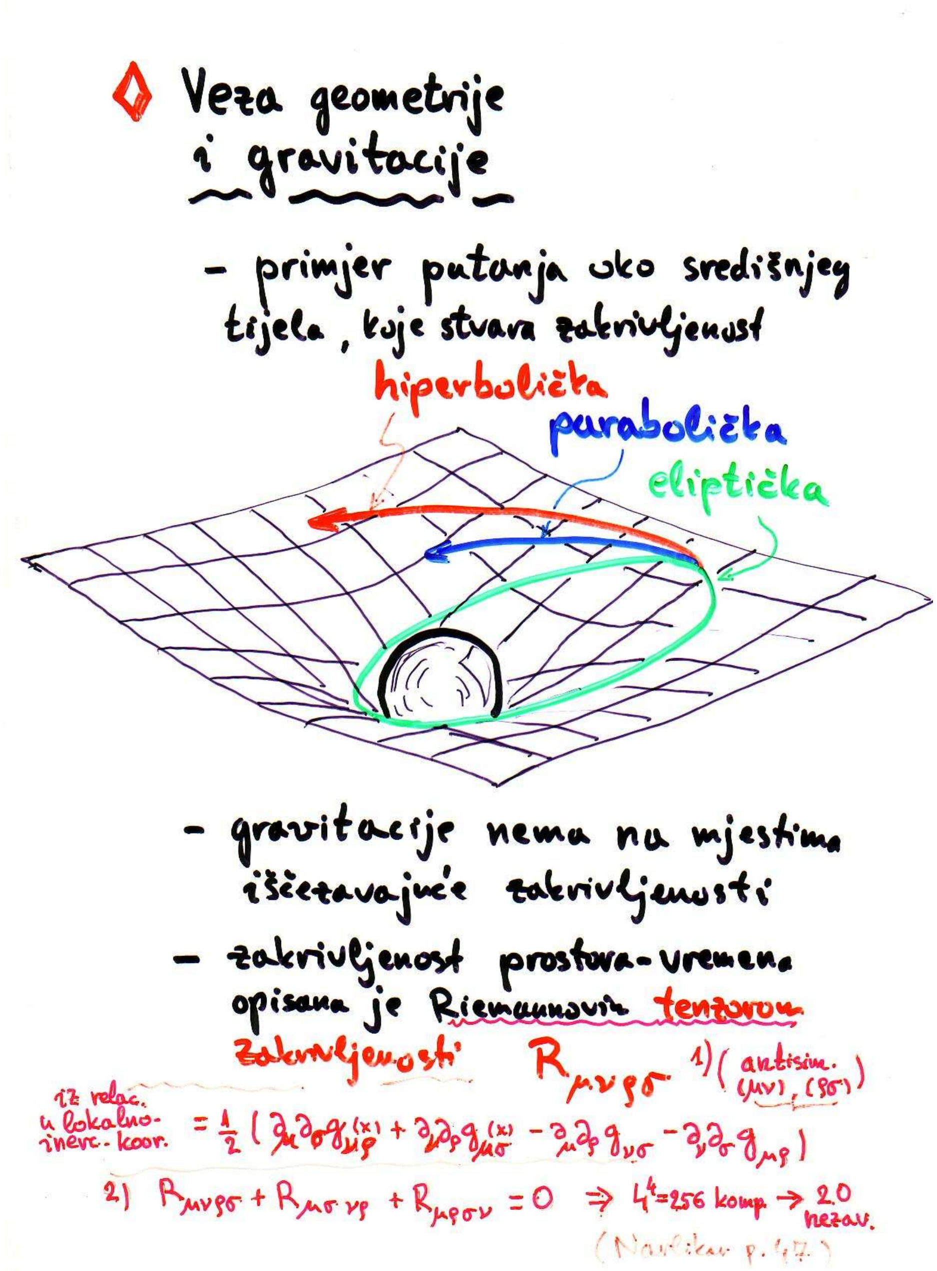
III. VEZA KOZMOLOGIJE I GRAVITACIJE



Gravitacija kao jedina poznata sila koja dominira na skali svemira

- Prvi korak je **OTR**: svođenje gravitacije na geometriju
- Slijedeći korak je

  od **OTR** do kozmologije



Od Newton-ovog do Einstein-ovog svemira

Newton-ov prostor • $\ell^2 = x^2 + y^2 + z^2$

-ovo vrijeme • t (vrem. interval)

$\underbrace{\qquad}_{\text{dvije invarijante}}$

Einsteinov prostor

◊ **specijalne relativnosti (STR)**

- jedinstvena udaljenost u geometriji Minkowskoga
  (struktura prostora-vremena takva da su dobro definirani samo intervali VLASTITOG VREMENA)

• $s^2 = c^2(\Delta\tau)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta\vec{x})^2$

$$ds^2 = c^2(d\tau)^2 = c^2(dt)^2 - (d\vec{x})^2 \qquad (1)$$

1. **invarijanta** (**Lorentzovih transf.** {pomak + vrtnja} koje povezuju INERCIJALNE SUSTAVE)

• c (brzina svjetlosti) je
2. **invarijanta** (ista za sve opažače)

& kovarijantnost zakona (istih —"—)

◊ **Einsteinova opća relativnost (OTR)**

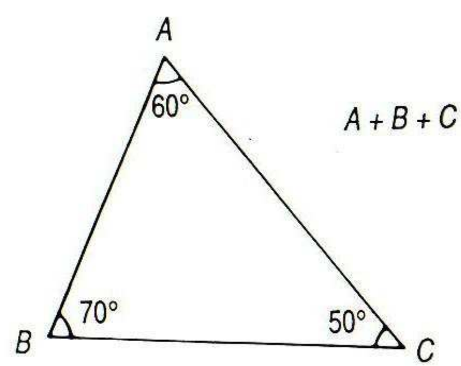
proširuje **kovarijantnost zakona** na širu klasu opažača, koji su u sustavima u slobodnom padu !

Invarijantni interval (1) poopćuje se na

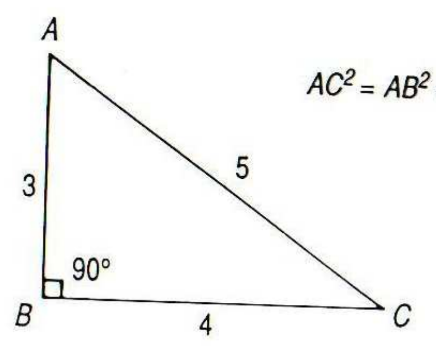
$$ds^2 = c^2(d\tau)^2 = g_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu dx^\nu \qquad (2)$$

(1) → (2) znači
napuštanje prostora
"ravnozemaca" (flatlanders)

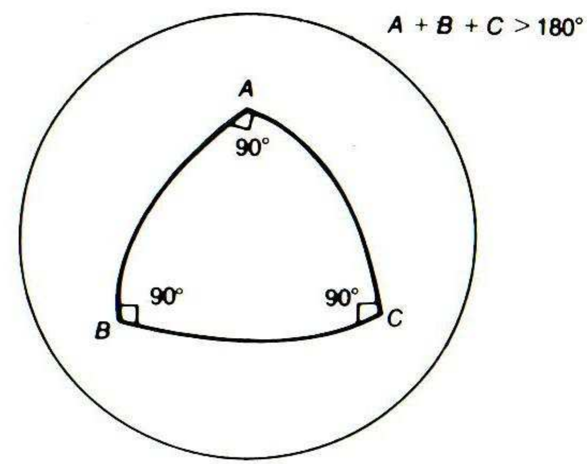
U općoj relativnosti (OTR)



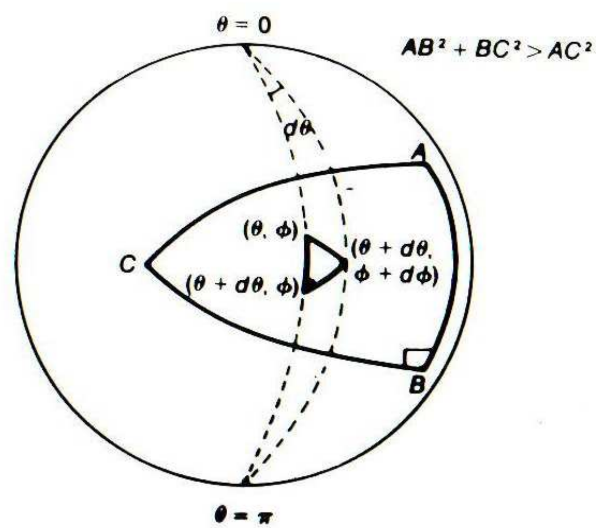
(a)



(b)



(a)



(b)

prijelaz s (1) na (2)
odgovara prijelazu s
ravnih na zakrivljene trokute.

"Sferozemci" (spherelanders)
ili
"Hiperzemci" (hyperlanders)

mogu istražiti svoj 2-D svijet (utvrditi mu geometriju) bez "izlaženja" u 3. dimenziju :

(Zbroj unutarnj. kuteva trokuta) − π = (zakrivlj. K) · Površina trokuta

triangulacija u uniformnom prost.

ili Gaussovim teoremom izvrsnosti :

$$l^2 = f(x^2) + 2g(x \cdot y) + h(y^2)$$

f, g, h − metrički koef.

	zakrivlj. opć.	zakrivlj. UNIFORM
3 koef. za 2D prost.	K(položaj) 1	K-const.
6 koef. za 3D	6 zakriv.	3 (tipa K)
10 koef. za 4D	20 zakrivlj.	

opć. Riemann : $\boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$ nezav. komp. metričkog tenzora (s n^2 komp.)

$\boxed{\frac{n^2(n^2-1)}{12}}$ nezavisnih komp. Riemannovog tens. zakrivlj. (s n^4 komp.)

Među ne-euklidskim prostorima (vizualiziranim 2-D plohama u 3D prost.) od posebnog su interesa UNIFORMNI (homogeni i izotropni) s KONGRUENTNOM geometrijom (prostornim formama invarij. na translacije i rotacije)

SFERIČNA geom. (Georg Riemann, 1826-1866)

Površina sfere − vjerno dočarava ZATVORENOST i KONAČNOST prostora pozitivne zakrivljenosti $K = \frac{1}{R^2} > 0$

(oba radijusa zakrivljenosti sjede s iste strane plohe)

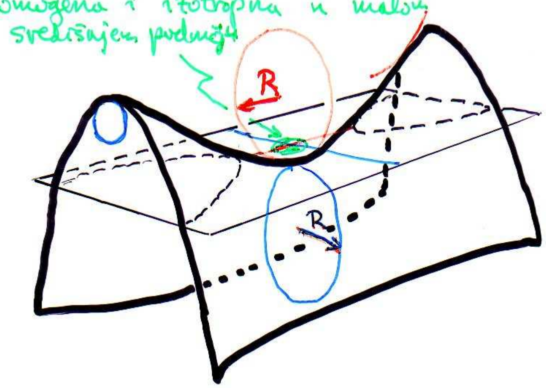
HIPERBOLIČNA geom. (Johann Karl Friedrich Gauss, 1777-1855 ; Nikolai Lobačevski, 1793-1856 ; Janos Bolyai, 1802-60)

Sedlena ploha − neuniformna

homogena i izotropna u malom središnjem području

dočarava OTVORENOST BESKONAČNOST

$K = -\frac{1}{R^2} < 0$



STR (nerazlikovanje inerc. sust.)
OTR (inerc. od sustava u slob. padu)

- **STR**: kontrakcija duljina, dilatacija vremena
- **OTR** s “jakim principom ekvivalencije” savijanje zraka svjetlosti, usporavanje vremena u gravitacijskom polju (BeG 3.3)
- **Okvir** (str. 3-2):

Mjera jakosti gravitacije (brzina oslobađanja)

Slabi i jaki oblik principa ekvivalencije

- **Geodetska jednadžba: prikaz slobodnog pada u općim koordinatama**

Princip ekvivalencije i geodetska jednadžba

Svođenje gravitacije na geometriju*) omogućuje da

$\boxed{\text{zakrivljene svjetske crte ravnog prostora-vremena}}$

svedemo na

$\boxed{\text{ravne svjetske crte zakrivljenog prost-vrem.}}$

*) pomoću SLABOG PRINCIPA EKVIVALENCIJE:

Gravitacija se može ukloniti lokalno (u malim prost-vrem. intervalima) izborom sustava u slobodnom padu ($\xi^\alpha(x)$)

(poništavanje inercijalne i gravitacijske sile
⇒ Newtonova ekvivalencija inercijalne i gravitacijske mase)

$\boxed{\text{Oko točke P}}$

$g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$; vlast. vrijeme $ds = c\,dt_0$

$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, d\xi^\mu d\xi^\nu$

trajektorija je pravac $\boxed{\left.\dfrac{d^2\xi^\alpha}{ds^2}\right|_P = 0}$

$\dfrac{d\xi^\alpha}{ds} = \dfrac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\dfrac{dx^\mu}{ds} \Rightarrow$

$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \Rightarrow$

$g_{\mu\nu} = \dfrac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\dfrac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}$

$\boxed{\text{U opć. koordinatama } x^\mu}$

$$\Rightarrow \boxed{0 = \frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \underbrace{\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}}_{\equiv \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}}$$

$$\Rightarrow \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)$$

STR:

invarijantnost veličina, **kovarijantnost** zakona

- **OTR uvodi opću kovarijantnost**

OPĆA KOVARIJANTNOST

– KOVARIJANTNOST OTR

prema JAKOM PRINCIPU EKVIVALENCIJE:

Poopćenje tenzorskih formula STR (zakona prir. u sust. slob. pada)

(na bilo koji sustav)

zamjenama

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$$

$$\partial_\mu \equiv {}_{,\mu} \rightarrow \nabla_\mu \equiv {}_{;\mu}$$

KOVARIJANTNA derivacija

- kontravarijantnog vektora

$$V^\mu_{\ ;\lambda} = \partial_\lambda V^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\alpha} V^\alpha \equiv V^\mu_{\ ,\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\alpha} V^\alpha$$

- kovarijantnog vektora

$$V_{\mu;\lambda} = \partial_\lambda V_\mu - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} V_\alpha \equiv V_{\mu,\lambda} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} V_\alpha$$

- uočimo razliku ponovljenih kovarij. derivac. (mjeri promjenu smjera paralel-transportiranog vektora na zatvor. krivulji)

$$V_{\mu;\nu;\lambda}(x) - V_{\mu;\lambda;\nu}(x) = -R^\beta_{\mu\nu\lambda}(x)\, V_\beta(x)$$

Riemannov tenzor zakrivljenosti

$$R^\beta_{\mu\nu\lambda} = \partial_\lambda \Gamma^\beta_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\beta_{\mu\lambda} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \Gamma^\beta_{\alpha\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \Gamma^\beta_{\alpha\lambda}$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\alpha} R^\alpha_{\nu\rho\sigma}$$

- simetrija $R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}$
- antisim. $R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho}$
- cikličnost $R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\sigma\nu\rho} + R_{\mu\rho\sigma\nu} = 0$

Einsteinove jednadžbe

- **10 jedn. polja**
- **4 jedn. gibanja**
- **Usporedba geodetske jednadžbe i Lorentzove sile**

Tenzori nižeg ranga

Ricci-jev $R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\nu\sigma} \equiv R^{\sigma}{}_{\mu\nu\sigma}$

simetričan $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$;

Skalarna zakrivljenost

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \ ;$$

Einsteinov tenzor

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

s posebnom ulogom u Einsteinovoj OTR:

zakrivljenost prost-vrem. = konst. × $\underbrace{\text{materija}}_{\text{svi oblici energije koji posjeduju masu}}$

"Ricci = energija"

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \varkappa T_{\mu\nu}, \quad \varkappa = -\frac{8\pi G_N}{c^4}$$

Einsteinova j-ba

OTR ne govori o konstanti vezanja

prepoznaje se za male zakrivljenosti – slaba gravitac. polja

skup 10 j-bi =>

Riemann = Ricci + Weyl (mjeri plimna naprezanja)

20 komp = 10 + 10

Svođenje gravitacije na zakrivljenost i Einsteinova gravitacijska jednadžba

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\varkappa T_{\mu\nu}$$

$$\varkappa = \frac{8\pi G_N}{c^4}$$

10 jedn. polja

- **3 pogleda na Einst. jedn.**
- **Newtonova granica**

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

4 jedn. gibanja (BeG App. A)

Usporedba geodetske jednadžbe i Lorentzove sile

Einsteinova kozmološka jednadžba

Od OTR do KOZMOLOGIJE

Narlikar '93, Ch 3

◊ Einsteinov svemir (1917)

- zamišljen kao posvuda ispunjen materijom

uz dodatne pretpostavke SIMETRIJA:

- HOMOGENOST & IZOTROPNOST

uz ondašnje vjerovanje astronoma da nema širenja ili sažimanja, pretpostavlja

- STATIČNOST

↳ omogućava izoliravanje vremenske koordinate:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \alpha_{ij} dx^i dx^j \qquad (i,j = 1,2,3)$$

konst. (zbog homogenosti)

$\nexists\ dt\,dx^i$ (zbog izotropnosti)

Nadalje, Einsteinov izbor 3-D prostora,

- ZATVORENOG

vodi na odabir 3-D površine S_3 (površine 4-D hipersfere radijusa S) dane j-bom (u Kartezijevim koor.)

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 = S^2$$

[Narlikar §3.3 $k=+1$
ibid. §3.4 za negativnu $(k=-1)$ ili iščezavajuću zakrivlj.]

Einsteinova 3D hipersfera

& inzistiranje na statičkom rješenju

("Einsteinova najveća zabluda")

Prijelazom na koordinate unutar površine

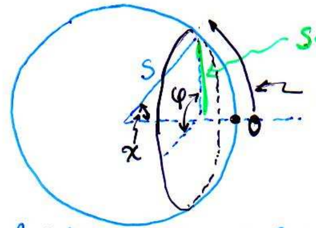
$$x_4 = S\cos\chi \qquad 0 \le \chi \le \pi$$

$$x_1 = S\sin\chi\cos\vartheta \qquad 0 \le \vartheta \le \pi$$

$$x_2 = S\sin\chi\sin\vartheta\cos\varphi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$x_3 = S\sin\chi\sin\vartheta\sin\varphi$$

Zbog zora zamislimo 2-D plohu $\vartheta = \pi/2$
→ 3D prostor dobijemo kao volumen dobiven revolucijom te površine



$S\sin\chi \equiv Sr$

$$\rho(r) = S\int_0^r \frac{dr}{(1-r^2)^{1/2}} = S\arcsin r = S\chi$$

Opseg ekvatora ($\vartheta = \pi/2$)

$$= S\int_0^{2\pi} r\,d\vartheta = 2\pi S r$$

$$d\sigma^2 = S^2(d\chi^2 + \sin^2\chi\,d\varphi^2)$$

- Interval duljine na plohi S_3

$$d\sigma^2 = S^2[d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2)]$$

uz $r = \sin\chi \in [0, 1]$

$$= S^2\left[\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2)\right]$$

površina $S_3 = 4\pi S^2\sin^2\chi$

volumen $S_3 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} d\chi\, S^3\sin^2\chi\sin\vartheta = 2\pi^2 S^3$

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\sigma^2$$

$$= c^2dt^2 - S^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2)\right]$$

poopć. $S^2(t)$; $k = \pm 1, 0$

Uz $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \vartheta$, $x^3 = \varphi$ & $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

$$g_{00} = 1 \;,\; g_{11} = -\frac{S^2}{1-r^2} \;,\; g_{22} = -S^2 r^2 ,\; g_{33} = -S^2 r^2 \sin^2\vartheta$$

$$g^{00} = 1 ,\; g^{11} = -\frac{1-r^2}{S^2} \;,\; g^{22} = -\frac{1}{S^2 r^2} \;,\; g^{33} = -\frac{1}{S^2 r^2 \sin^2\vartheta}$$

vodi na neiščezavajuće

$$\Gamma^1_{11} = \frac{r}{1-r^2} \;,\; \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} \;,\; \Gamma^1_{22} = -r(1-r^2)$$

$$\Gamma^1_{33} = -r(1-r^2)\sin^2\vartheta \;,\; \Gamma^2_{33} = -\sin\vartheta\cos\vartheta \;,\; \Gamma^3_{23} = \cot\vartheta$$

i neiščezavajuće komponente Einsteinovog tenzora:

$$G^0_0 \equiv R^0_0 - \frac{1}{2}R = -\frac{3}{S^2} \;;\; G^1_1 = G^2_2 = G^3_3 = -\frac{1}{S^2}$$

Uz zakrivljenost "k" & S(t):

$$g_{00} = 1 \;,\; g_{11} = -\frac{S^2}{1-kr^2} \;,\; g_{22} = -S^2 r^2 ,\; g_{33} = -S^2 r^2 \sin^2\vartheta$$

$$g^{00} = 1 ,\; g^{11} = -\frac{1-kr^2}{S^2} \;,\; g^{22} = -\frac{1}{S^2 r^2} \;,\; g^{33} = -\frac{1}{S^2 r^2 \sin^2\vartheta}$$

vodi na neiščezavajuće $\Gamma^1_{01} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^3_{03} = \frac{1}{c}\frac{\dot S}{S}$,

$$\Gamma^0_{11} = \frac{S\dot S}{c(1-kr^2)} \;,\; \Gamma^0_{22} = \frac{S\dot S r^2}{c} \;,\; \Gamma^0_{33} = \frac{S\dot S \sin^2\vartheta}{c} \;;$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{kr}{1-kr^2} \;,\; \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} \;,\; \Gamma^1_{22} = -r(1-kr^2)$$

$$\Gamma^1_{33} = -r(1-kr^2)\sin^2\vartheta \;,\; \Gamma^2_{33} = -\sin\vartheta\cos\vartheta \;,\; \Gamma^3_{23} = \cot\vartheta$$

i neiščezavajuće komponente Einsteinovog tenzora:

$$G^0_0 \equiv R^0_0 - \frac{1}{2}R = -\frac{3}{S^2}\left(\frac{\dot S^2 + kc^2}{S^2}\right) \Lambda \;;\; G^1_1 = G^2_2 = G^3_3 = -\frac{1}{S^2}\left(2\frac{\ddot S}{S} + \frac{\dot S^2 + kc^2}{S^2}\right) \Lambda$$

Tvar bez gibanja ...

- Za svemir ispunjen prašinom u mirovanju RHS Einst. j-be $T^0_0 = \rho_0 c^2$; $T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = 0$

$\Rightarrow$ dvije nezavisne j-be

$$\lambda - \frac{3}{S^2} = -\frac{8\pi G}{c^2}\rho_0 \quad ; \quad \lambda - \frac{1}{S^2} = 0$$

bez smislenog (statičkog) rješenja !

Einstein uvodi **KOZMOLOŠKI ČLAN**

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu}$$

$$\boxed{S = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/2} = \frac{c}{2\sqrt{\pi G \rho_0}}} \quad \begin{cases} S \simeq 10^{29}\ \mathrm{cm} \\ \Lambda \simeq 10^{-58}\ \mathrm{cm}^{-2} \end{cases} \quad (\text{uz } \rho_0 \simeq 10^{-31}\ \mathrm{g/cm^3})$$

Gibanje bez tvari

de Sitter-ov svemir (1917)

Suprotno Einsteinovom očekivanju, jednadžbe OTR daju rješenje i za prostor-vrijeme bez materije ($T_{\mu\nu} = 0$)

→ s intervalom

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{H^2R^2}{c^2}\right)dt^2 - \frac{dR^2}{1-\left(\frac{H^2R^2}{c^2}\right)} - R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2)$$

veza:

$$\Lambda = \frac{3H^2}{c^2}$$

prividno statični svemir

→ u novim koordinatama $(t, r, \vartheta, \varphi)$

$$ds^2 = c^2dt^2 - e^{2Ht}\left[dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2)\right]$$

otkriva prostor tipa Minkowskog, čiji se prostorni dio napuhuje: za razliku od "Einsteinove tvari bez gibanja", ovdje je riječ o "gibanju bez tvari" (Eddington)