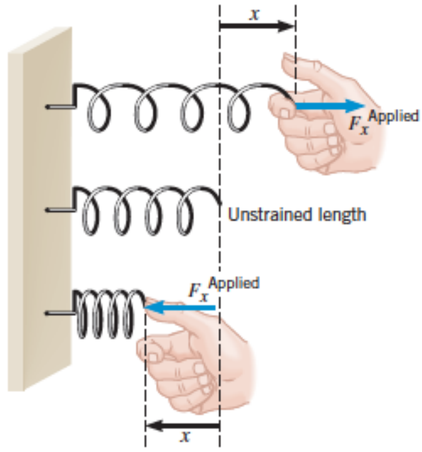
10. TITRANJE I ELASTIČNOST

(pripremljeno prema poglavlju 10, Cutnell & Johnson: Physics, 9th edition, John Wiley and Sons, (2012), poveznica: www.pdf-archive.com/2018/04/25/cutnell)



Idealna opruga i jednostavno harmonijsko titranje. Opruge su predmeti koji imaju brojne primjene, kao što su tipke na tipkovnici, automobilski sustava ovjesa, madraci i brojne druge. U uporabi se mogu istegnuti ili stisnuti (slika desno). Kada ruka primjenjuje silu povlačenja F_x, kao odgovor opruga se isteže za iznos x. Eksperimentom se može pokazati da za relativno male pomake, sila F_x je izravno proporcionalna pomaku x. Ukoliko uvedemo konstantu proporcionalnosti k imamo:

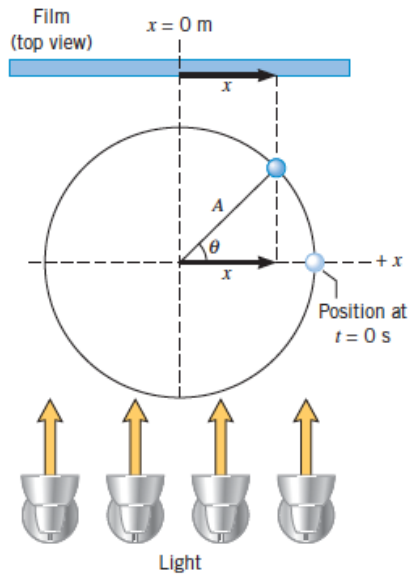
$$F_x = kx \qquad (10.1)$$

Konstanta k naziva se konstanta opruge, a iz jednadžbe (10.1) vidimo da one ima dimenziju sile po jedinici duljine, dakle (N/m). One opruge za koje vrijedi da je $F_x = kx$ zovemo idelane oruge.

Hookeov zakon. Sile kojom djeluje idealna opruga iznosi

$$F_x = -kx \qquad (10.2)$$

Ovdje k označava konstantu opruge, x istegnuće opruge, a F_x sila kojom opruga djeluje na neko tijelo. Negativni predznak označava da je sila kojom opruga odgovara na deformaciju usmjerena u suprotnom smjeru od deformacije.

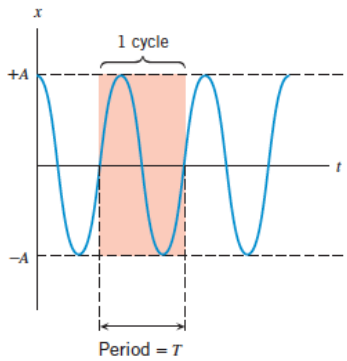


Jednostavno harmonijsko titranje i jednoliko gibanje po kružnici. Jednostavno harmonijsko titranje može se definirati tako da mu se odrede pomak, brzina i ubrzanja.

Da bismo to matematički ispravno opisali jednostavno harmonijsko titranje, promotrimo kružno gibanje. Postavimo kuglicu na ploču koja se rotira. U tom se slučaju kugla se kreće po kružnici radijusa A konstantnom brzinom. Kako se kreće lopta, njezina sjena pada na zaslon. Opažamo da se sjena giba između dvije krajnje točke. Pretpostavimo da se kuglica u početku nalazi na osi x u točki $x = A$. Kod jednolikog kružnog gibanja, kuglica se kreće konstantnom kutnom brzinom ω, a u vrementu t se nalazi pod kutem $\theta = \omega t$. U tom se slučaju projekcija položaja na os x može zapisati kao:

$$x = A\cos\theta = A\cos\omega t \qquad (10.3)$$

Na slici desno dan je grafički prikaz ove jednadžbe. Kako vrijeme prolazi, sjena kuglice oscilira između vrijednosti $x = A$ i $x = -A$. Polumjer kružnice A odgovara amplitudi jednostavnog harmonijskog gibanja. Za bilo koji objekt tijekom jednostavnog harmonijskog titranja, vrijeme potrebno za završetak jednog ciklusa je *period* T. Vrijednost T ovisi o kutnoj brzini kuglice jer što je veća kutna brzina, to je kraće vrijeme potrebno za dovršetak jednog okretaja. Odnos između ω i T možemo dobiti iz relacije $\omega = \Delta\theta/\Delta t$. Za jedan ciklus $\Delta\theta = 2\pi$ te $\Delta t = T$ tako da dobivamo



$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (\omega \text{ u rad/s}) \qquad (10.4)$$

Umjesto perioda, često govorimo o frekvenciji titranja f. Frekvenciju definiramo kao broj ponavljanja u sekundi. Dakle, frekvencija i period su povezani prema

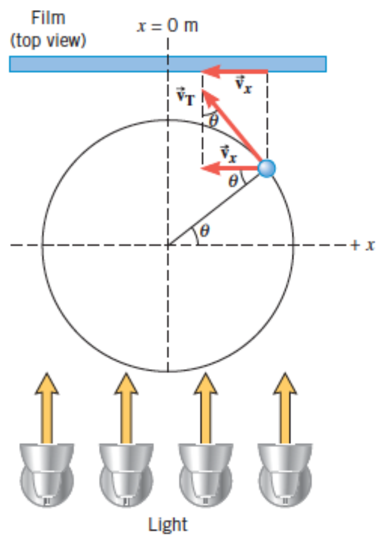
$$f = \frac{1}{T} \qquad (10.5)$$

Jedinica za frekvenciju je jedan Hertz (Hz), a nazvana je po Heinrichu Hertzu (1857-1894). Korištenjem veze između kutne brzine i perioda, $\omega = 2\pi/T$, jednadžbe (10.5) dobivamo odnos:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad (10.6)$$

Veličinu ω obično nazivamo kružna frekvencija.

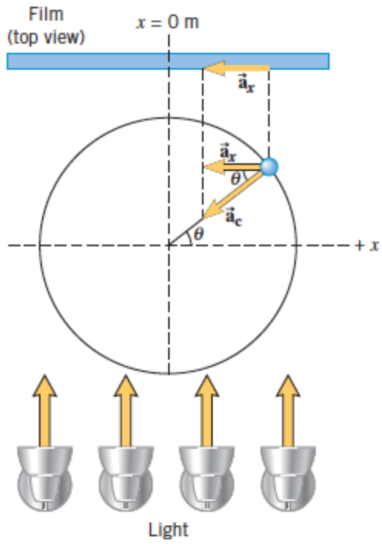
Brzina. Da bismo odredili brzinu tijela koje jednostavno harmonijski titra, koristit ćemo vezu između kružnog gibanja i jednostavnog harmonijskog titranja. Na slici desno prikazana je tangencijalna brzina kuglice. Sa skice se može vidjeti da je brzina sjene x komponenta vektora $\vec{\mathbf{v}}_\mathrm{T}$; to jest $v_x = -v_\mathrm{T} \sin\theta$, gdje je $\theta = \omega t$. Budući da je tangencijalna brzina v_T povezana s kutnom brzinom ω relacijom $v_\mathrm{T} = r\omega$, a radijus iznosi $r = A$, slijedi da je $v_\mathrm{T} = A\omega$. Stoga je brzina u jednostavnom harmonijskom titranju dana s



$$v_x = -v_\mathrm{T} \sin\theta = -A\omega \sin\omega t \qquad (10.7)$$

Uočimo da ta brzina nije konstantna, već kako vrijeme prolazi varira između maksimalne i minimalne vrijednosti. Kad sjena prolazi kroz položaj $x = 0$, brzina ima maksimalni iznos $A\omega$.

Ubrzanje. U jednostavnom harmonijskom titranju, brzina nije konstantna pa prema tome mora postojati ubrzanje. Ovo ubrzanje se može odrediti koristeći vezu između kružnog gibanja i harmonijskog titranja. Kao što prikazuje slika desno, kuglica se na referentnom krugu kreće kružnom putanjom pa, prema tome, ima centripetalno ubrzanje $\vec{\mathbf{a}}_\mathrm{c}$ koje je usmjereno prema središtu kruga, a sjena na zaslonu ima x komponentu centripetalnog ubrzanja koja iznosi $a_x = -a_\mathrm{c} \cos\theta$. Veza između centripetalnog ubrzanja i kutne brzine je $a_\mathrm{c} = r\omega^2$ dok $r = A$. Korištenjem veze $\theta = \omega t$ dobivamo da ubrzanje za jednostavno harmonijsko titranje iznosi



$$a_x = -a_\mathrm{c} \cos\theta = -A\omega^2 \cos\omega t \quad (10.8)$$

Uočimo da ubrzanje, poput brzine, nema konstantnu vrijednost. Maksimalni iznos ubrzanja je $A\omega^2$.

Frekvencija titranja. Korištenjem drugog Newtonovog zakona ($F_x = ma_x$), moguće je odrediti frekvenciju na kojom titra tijelo mase m vezano na elastičnu oprugu. Dakle, neto sila koja djeluje na tijelo je sila opruge, pa u tom slučaju drugi Newtonov zakon postaje $-kx = ma_x$. S obzirom na to da za jednostavno harmonijsko titranje vrijedi da je pomak u vremenu dan sa $x = A\cos\omega t$, a ubrzanje sa $a_x = -A\omega^2 \cos\omega t$, možemo pokazati da ovakve funkcije mogu zadovoljiti jednadžbu $-kx = ma_x$. Ta jednadžba poprima oblik:

$$-k(A\cos\omega t) = m(-A\omega^2 \cos\omega t)$$

te dobivamo vezu između mase, konstante opruge i kružne frekvencije

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (10.9)$$

Energija i jednostavno harmonijsko titranje. Vidjeli smo da tijelo na visini iznad površine zemlje ima gravitacijsku potencijalnu energiju. Opruga, također ima potencijalnu energiju kada se opruga rastegne ili stisne, a nazivamo ju elastičnom potencijalnom energijom.

Da bismo pronašli izraz za potencijalnu potencijalnu energiju, odredit ćemo rad koji sila opruge napravi na nekom predmetu. Rad izvršen konstantnom silom dan je jednadžbom $W = Fs$. Međutim, sila opruge nije konstantna već se mijenja linearno s istegnućem, $F = -kx$. Ukoliko se tijelo pomakne s položaja x_0 na položaj x_f ono je prešlo put $s = x_0 - x_\mathrm{f}$. S obzirom na to da se sila mijenja linearno s istegnućem opruge, možemo izračunali prosječnu silu na tom putu: $\bar{F}_x = \frac{1}{2}(kx_0 - kx_\mathrm{f})$. Korištenjem prosječne sile i prijeđenog puta dobivamo da je

$$W_\mathrm{opruge} = \bar{F}_x s = \frac{1}{2}(kx_0 - kx_\mathrm{f})(x_0 - x_\mathrm{f})$$

$$W_{\text{opruge}} = \underbrace{\tfrac{1}{2}kx_0^2}_{\substack{\text{Početna potencijalna} \\ \text{energija opruge}}} - \underbrace{\tfrac{1}{2}kx_f^2}_{\substack{\text{Konačna potencijalna} \\ \text{energija opruge}}} \qquad (10.10)$$

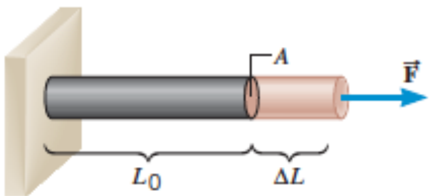
Definicija potencijalne energije opruge. Potencijalna energija opruge, PE, konstante elastičnosti k istegnute x, iznosi

$$\text{PE} = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad (10.11)$$

Prigušeno harmonijsko titranje. U jednostavnom harmonijskom titranju tijelo oscilira stalnom amplitudom jer ne postoji rasipanje energije. U stvarnosti je, međutim, uvijek prisutno trenje. Zbog gubitka energije, amplituda oscilacija se smanjuje kako vrijeme prolazi, a gibanje više nije jednostavno harmonijsko. Takov gibanje naziva se prigušenim harmonijskim titranjem, a smanjenje amplitude naziva se gušenje.

Tjerano harmonijsko titranje i rezonancija. U ovom se odjeljku govori o povećanju amplitude koja nastaje pri neprekidnom dodavanju energije oscilirajućem sustavu. Da bismo pokrenuli titranje, u početku smo morali primijeniti silu kojom smo izmaknuli tijelo iz ravnoteže. Međutim, što se događa ako neka sila ne djeluje samo na početku već cijelo vrijeme? Na primjer, silu može pružiti osoba koja jednostavno gura i povlači predmet naprijed-nazad. Rezultat takvog djelovanja sile je gibanj koje nazivamo tjerano harmonijsko titranje, do kojeg dolazi zbog sile koju zovemo sila tjeranja.

Rezonancija. Ukoliko sila tjeranja ima istu frekvenciju kao i jednostavno harmonijsko titranja dolazi do zanimljivog fenomana. Budući da sila tjeranja i brzina uvijek imaju isti smjer, što je posljedica iste frekvencije, ukupna mehanička energija sustava se konstantno povećava. Kao rezultat toga, amplituda postaje sve veća i veća. Taj fenomen konstantnog rasta energije u sustavu zovemo rezonancija.

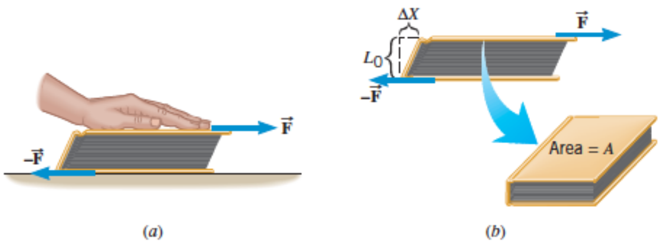


Elastične deformacije. Istezanje, kompresija i Youngov modul. Vidjeli smo da se opruga vraća u prvobitni oblik kada je ukloni sila koja djeluje na nju. Zapravo, svi materijali se na neki način deformiraju kad se stisnu ili rastegnu, a mnogi od njih, poput gume, vraćaju se u prvobitni oblik kada se ukloni cijeđenje ili istezanje. Za takve materijale kažemo da su elastični. Eksperimenti su pokazali da se kod malih deformacija iznos sile može izraziti sljedećim odnosom:

$$F = Y\left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)A \qquad (10.12)$$

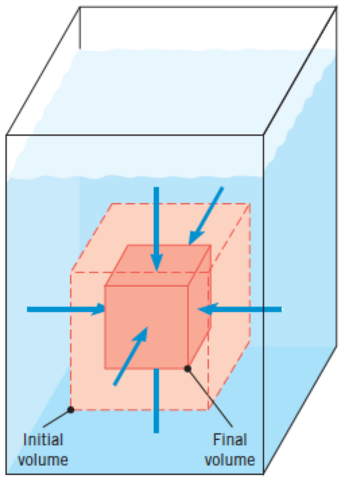
Kao što prikazuje slika desno gore, na kraj štapa djeluje sila iznosa F, sila djeluje okomito na površinu štapa poprečnog presjeka A, te mu se kao posljedica djelovanja sile duljina promijeni s L_0 na L. Parametar Y je konstanta proporcionalnosti nazvana Youngov modul, po Thomasu Youngu (1773–1829). Youngov modul ima dimenziju sile po jedinici površine (N/m^2).

Smicanje. Čvrsti je predmet moguće deformirati na drugi način osim istezanjem ili stiskanjem. Na primjer, stavite knjigu na grubi stol i gurnite gornju koricu, kao na slici desno. Primijetite da se gornja korica i stranice ispod nje pomiču u odnosu na nepomičnu donju koricu. Deformacija do koje je ovdje došlo naziva se smicanje i nastaje zbog kombiniranog učinka sile koja se primjenjuje na vrh knjige i sile na dnu knjige. Uočimo da su ovdje smjerovi sila su paralelni s koricama knjige. Te dvije sile imaju jednake veličine, ali i suprotne smjerove, tako da knjiga ostaje u ravnoteži. Sila iznosa F dovodi do smicanja iznosa Δx za objekt debljine L_0:



$$F = S\left(\frac{\Delta x}{L_0}\right)A \tag{10.13}$$

Konstanta S naziva se modul smicanja i ima istu dimenziju Youngov modul (N/m^2).



Promjena volumena. Kada se tlačna sila primjenjuje duž jedne dimenzije krutog tijela, duljina tog tijela se mijenja. Međutim, ukoliko primijenimo silu tlaka sa svih strana, do će dovesti do smanjenja volumena, kao što prikazuje slika desno. Ovakva vrsta tlaka događa se, na primjer, kada je predmet potopljen u tekućinu pa tekućina pritišće sa svih strana. Sile koje u takvim situacijama djeluju okomite su na svaku površinu pa je pogodnije je govoriti o okomitoj sili po jedinici površine, a ne o iznosu sile. Veličina koja označava silu po jedinici površine naziva se tlak P.

Definicija tlaka. Tlak P se definira kao omjer sile F, koja je okomita na površinu, i iznosa površine na koju sila djeluje, A:

$$P = \frac{F}{A} \tag{10.14}$$

SI Jedinica tlaka: N/m^2 = Pascal (Pa)

Ova jedinica nazvana je po francuskom znanstveniku Blaiseu Pascalu (1623–1662). Pretpostavimo da na tijelo djelujemo tlakom iznosa P. Zbog djelovanja tlaka, volumen objekta se mijenja za iznos $\Delta V = V - V_0$, gdje su V i V_0 označavaju krajnji i početni volumen. Takva promjena tlaka događa se, na primjer, kada plivač zaroni dublje u vodu. Eksperiment otkriva da je tlak P potreban za promjenu volumena ΔV izravno proporcionalna omjeru $\Delta V / V_0$:

$$P = -B\frac{\Delta V}{V_0} \tag{10.15}$$

gdje B označava konstantu proporcionalnosti. Njena je dimenzija ista kao i Young-ovog modula i modula smicanja, (N/m^2), a vrijednost ovisi o svojstvu materijala.

11. FLUIDI
(pripremljeno prema poglavlju 11, Cutnell & Johnson: Physics, 9th edition, John Wiley and Sons, (2012), poveznica: www.pdf-archive.com/2018/04/25/cutnell)

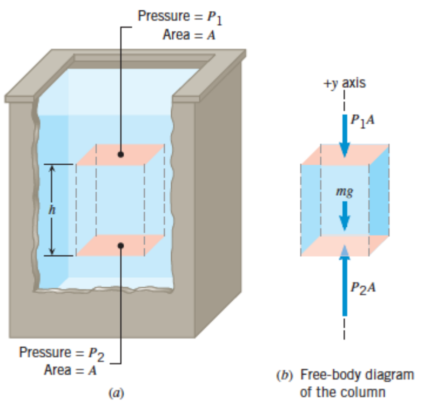
Fluidi su materijali koji imaju svojstvo da mogu teći, a uključuju i plinove i tekućine. Najpoznatiji plin je zrak, a njegovo stujanje znamo kao vjetar. Voda je najpoznatija tekućina, a njeno proticanje koristimo na razne načine, za dobivanje električene energije u hidroelektranama do splavarenja vodom. Gustoća mase tekućine ili plina jedno je od važnih svojstava.

Definicija gustoće. Gustoća neke tvari je masa te tvari, m, podijeljena s njezinim volumenom, V:

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{11.1}$$

SI Jedinica gustoće: kg/m^3

Odnos tlaka i dubine u statičnoj tekućini. Iz iskustva znamo da što dublje ronimo, to jače voda pritišće naše tijelo. Da bismo odredili odnos tlaka i dubine, prisjetimo se drugog Newtonovog zakona ($\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$). Uočimo da na tekućinu djeluju dvije sile. Jedna je gravitacijska sila - to jest težina tekućine. Druga je tlak tekućine. Budući da se tekućina nalazi u mirovanju, odnosno njegovo je ubrzanje nula, ukupna sila na tekućinu je nula. Primijenimo uvjet ravnoteže na jedan proizvoljno odabrani stupac tekućine. Na slici desno odabran je pravilni geometrijski oblik. Na gornju stranicu površine A djeluje tlak tekućine iznosa P_1 koji generira silu prema dolje iznosa P_1A. Slično, na donjoj strani tlak je P_2 koji generira silu prema gore iznosa P_2A. Također, na ovaj stupac vode djeluje sila teža koja iznosi mg. Budući da je stupac u ravnoteži, zbroj vertikalnih sila mora biti jednak nuli



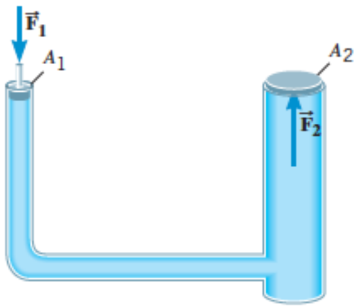
$$P_2A - P_1A - mg = 0 \quad \text{ili} \quad P_2A = P_1A + mg$$

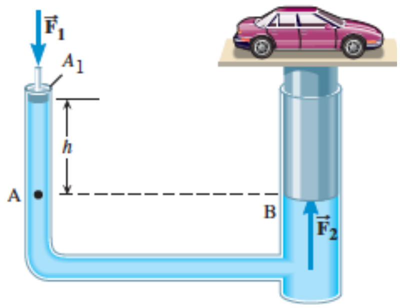
Masa m povezana je s gustoćom tekućine ρ i volumenom stupca V, $m = \rho V$. Volumen pravilnog se može izračunati ukoliko poznamo visinu stupca h te vrijedi da je $V = Ah$, pa za masu dobivamo $m = \rho Ah$. Ovom supstitucijom uvjet za ravnotežu postaje $P_2A = P_1A + \rho Ahg$. Površina A se može pokratiti, čime se dobiva rezultat

$$P_2 = P_1 + \rho hg \tag{11.2}$$

Jednadžba (11.2) vrijedi samo za tekućine kojima se gustoća ne mijenja pod tlakom, tj. jednaka je na svim dubinama. S obzirom na to da se za tekućine gustoća neznatno mijenja s tlakom ovo je dobar opis tekućina. Međutim, to nije slučaj za plinove i ovakav jednostavni odnos tlaka i dubine se na njih ne može primijeniti.

Pascalov pricip. Zatvorena tekućina može biti izložena dodatnom tlaku primjenom vanjske sile. Na primjer, na slici desno prikazane su dvije međusobno povezane cilindrične komore potpuno napunjene tekućinom. Komore su različitog promjera i spojene su priključnom cijevi. Komore su na vrhu opremljene pomičnim klipom. Razmotrimo tlak u manjoj komori u točki odmah ispod klipa, P_1. Prema definiciji, tlak koji djeluje na klip iznosi $P_1 = F_1/A_1$. Analogno možemo izračunati silu na drugi klip $P_2 = F_2/A_2$. Ukoliko se klipovi u ove dvije komore nalaze na istoj visini tada su tlakovi jednaki, $P_1 = P_2$. Iskoristimo li ovu jednakost za ove dvije komore dobivamo da vrijedi $F_1/A_1 = F_2/A_2$, odnosno dobavamo silu na drugi klip





$$F_2 = F_1 \frac{A_1}{A_2} \tag{11.3}$$

Ako je površina A_2 veće od površina A_1, velika sila F_2 može se na desnom klipu može se uravnotežiti manjom silom na lijevoj strani. Ogroman niz uređaja koristi hidraulične tekućine, baš kao što to čini i dizalica za automobile.

Arhimedov princip. Svatko tko je pokušao gurnuti loptu pod vodu osjetio je kako ju voda snažno gura natrag. Ova sila prema gore naziva se sila uzgona. Dokaz Arhimedovog principa je analogan izvodu hitrostatskog tlaka. Ovo impresivno otkriće postignuće je grčkog znastvenika Arhimeda (287-212 B.C.), a glasi:

Arhimedov princip. Tekućina djeluje silom uzgona, F_U, na tijelo koje je djelomično ili potpuno uronjeno u nju, a iznos sile jednaka je težini tekućine koju tijelo istisne, $G_{\text{tekućine}}$:

$$\underbrace{F_U}_{\substack{\text{Sila} \\ \text{uzgona}}} = \underbrace{G_{\text{tekućine}}}_{\substack{\text{Težina istisnute} \\ \text{tekućine}}} \tag{11.4}$$

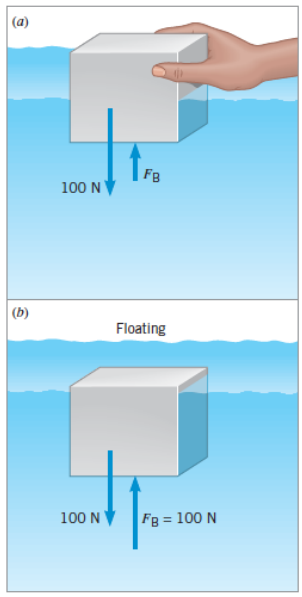


Figure 11.17 (*a*) An object of weight 100 N is being immersed in a liquid. The deeper the object is, the more liquid it displaces, and the stronger the buoyant force is. (*b*) The buoyant force matches the 100-N weight, so the object floats.

Fluidi u pokretu. Flidi se mogu kretati ili strujati na više načina. Voda može mirno i polako teći u tihom toku ili vrlo nepravilno preko vodopada. Zrak može stvoriti blagi povjetarac ili burni tornado. Da bi smo razumijeli takvu raznolikost, trebamo identificirati neke osnovne vrste toka tekućine.

Tok tekućine može biti stalan (stacionaran) ili nestalan (nestacionaran). U stacionarnom toku brzina čestica tekućine u bilo kojoj točki je konstantna u vremenu.

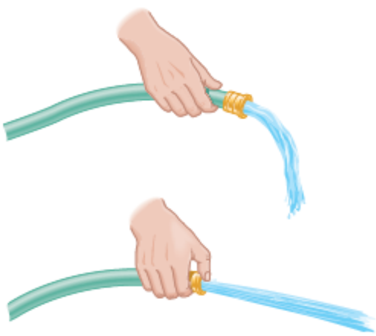
Dakle, u stacionarnom toku svaka čestica koja prođe kroz istu točku ima istu brzinu. Na drugom mjestu brzina može biti različita, kao u rijeci, koja obično teče najbrže u središnjem dijelu, a najsporija sa strane u blizini obale. Nestacionarni tok postoji kad god se brzina u točki fluida mijenja kako vrijeme prolazi. Ekstremna vrsta nestabilnog toka je turbulentni tok koji se javlja kada postoje oštre prepreke ili zavoji na putu brze tekućine, kao u brzaka na slici desno. Svojstvo turbulentnog toka je da se brzina tekućina u određenoj točki mijenja u vremenu, uključujući iznos i smjer.

Primjer nestacionarnog proticanja vode

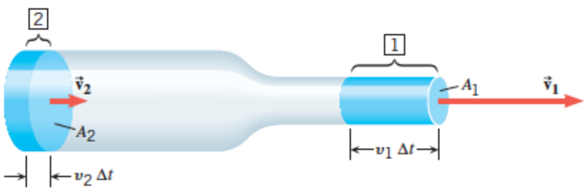
Fluid može biti stlačiv ili nestlačiv. Većina tekućina je gotovo nestlačiva; to jest, gustoća tekućine ostaje gotovo konstantna premda im se tlak mijenja. Suprotno tome, plinovi su visoko stlačivi. Međutim, postoje situacije u kojima gustoća protočnog plina ostaje dovoljno konstantna da se plin može smatrati nestlačivim.

Protok tekućine može biti viskozan ili neviskozan. Viskozna tekućina, poput meda, ne teče lako i za nju se kaže da ima veliku viskoznost. Suprotno tome, voda je manje viskozna i teče lakše; kažemo da voda ima manju viskoznost od meda. Protok viskozne tekućine je proces u kojem se raspršuje energija. Viskoznost sprečava da susjedni slojevi tekućine slobodno kližu jedan pokraj drugog. Tekućina bez viskoznosti teče nesmetano i bez rasipanja energije. Iako nijedna stvarna tekućina nema nultu viskoznost pri normalnim temperaturama, neke tekućine imaju zanemarivo male viskoznosti. Nekompresivna i neviskozna tekućina naziva se idealnom tekućinom.

Jednadžba kontinuiteta. Jeste li ikada koristili palac za kontrolu vode koja teče s kraja crijeva, kao na slici desno? Ako je to slučaj, vidjeli ste da se brzina vode povećava kada vaš palac smanjuje površinu presjeka otvora crijeva. Ovakvo ponašanje fluida opisano je jednadžbom kontinuiteta. Ova jednadžba izražava sljedeću jednostavnu ideju: Ako tekućina jednom kraju ulazi u cijev s određenom protokom (npr., 5 kilograma u sekundi), tekućina također mora izlaziti na drugom kraju cijevi istom protokom. Ovo je zadovoljeno jer unutrar cijevi voda ne može nestati niti nastati. Masa tekućine u sekundi (npr. 5 kg/s) koja teče kroz cijev naziva se masenim protokom.



Na slici desno prikazan je dio tekućine (tamnoplava boja) koji se kreće duž cijevi. Uzvodno na položaju 2, gdje cijev ima površinu presjeka A_2, fluid ima brzinu v_2 i gustoću ρ_2. Nizvodno na lokaciji 1, odgovarajuće veličine su A_1, v_1 i ρ_1. Tijekom malog vremenskog intervala Δt



tekućina u se iz točke 2 pomakne za $v_2 \Delta t$, kao što pokazuje crtež. Volumen tekućine koja je protekla kroz poprečni presjek 2 iznosi $A_2 v_2 \Delta t$. Masa tekućine ovog elementa tekućine je umnožak gustoće i volumena $\Delta m_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$. Podijelimo li masu s vremenom dobivamo maseni protok

$$\text{Maseni protok u točki } 2 = \frac{\Delta m_2}{\Delta t} = \rho_2 A_2 v_2 \qquad (11.5a)$$

Slično možemo napisati i za maseni protok na drugom kraju

$$\text{Maseni protok u točki } 1 = \frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \rho_1 A_1 v_1 \qquad (11.5b)$$

S obzirom na to da tekućina ne može nastati ni nestati, maseni protoci u položajima 1 i 2 moraju biti jednaki: $\Delta m_1/\Delta t = \Delta m_2/\Delta t$. Ovaj važan rezultat poznat je kao jednadžba kontinuiteta. Jednadžba kontinuiteta je izraz činjenice da je masa očuvana (tj. niti se stvara niti uništava) dok tekućina teče

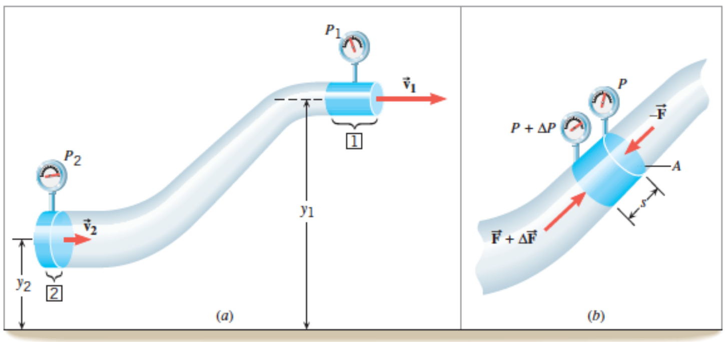
Jednadžba kontinuiteta. Maseni protok ($\rho A v$) ima istu vrijednost na svakom položaju duž cijevi koja ima jednu ulaznu i jednu izlaznu točku. Za dva položaja duž takve cijevi vrijedi

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \qquad (11.6)$$

ρ = gustoća tekućine (kg/m^3)
A = površina presjeka cijevi (m^2)
v = brzina fluida (m/s)
SI Jedinica masenog protoka: kg/s

Gustoća nestlačivih tekućina se ne mijenja tijekom protoka, tako da je $\rho_1 = \rho_2$, a jednadžba kontinuiteta svodi se na

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad (11.7)$$



Bernoullijeva jednadžba. Za stacionarni tok idealne tekućine, brzina, tlak i nadmorska visina povezani su jednadžbom koju je otkrio Daniel Bernoulli (1700–1782). Za dobivanje Bernoullijeve jednadžbe upotrijebit ćemo teorem rad-energija. Ovaj teorem povezuje rad vanjske sile s promjenom ukupne mehaničke energije objekta.

Za dobivanje Bernoullijeve jednadžbe razmotrite sliku gore. Ovaj crtež prikazuje element tekućine mase m, uzvodno u području 2. Uočimo da je površina presjeka i nadmorska visina različita na različitim mjestima duž cijevi. Brzina, tlak i visina u ovom području 2 označeni su v_2, P_2 i y_2. Nizvodno u području 1 ove varijable imaju vrijednosti v_1, P_1 i y_1. Kao u 6. poglavlju, objekt koji se kreće pod utjecajem gravitacije ima ukupnu mehaničku energiju E koja je zbroj kinetičke energije KE i gravitacijske potencijalne energije PE: $E = \mathrm{KE} + \mathrm{PE}$. Kada se rad W_{nc} na fluidnom elementu vrši od vanjskih nekonzervativnih sila, dolazi do promjene ukupne mehaničke energije. Prema teoremu rad-energija, rad je jednak promjeni ukupne mehaničke energije:

$$W_{\mathrm{nc}} = E_1 - E_2 = \left(\tfrac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1\right) - \left(\tfrac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2\right)$$

Slika gore nam pomaže shvatiti kako nastaje rad W_{nc}. Na površini tekućine djeluje tlak P koji na površnu djeluje silom iznosa $F = PA$, gdje je A površina poprečnog presjeka. Kada se element tekućine kreće na putu s on će izvršiti rad $W = Fs = PAs$. Veličina As odgovara volumenu elementa, V. Uočimo da je za nestlačive tekućine ovaj volumen jednak za područje 1 i za područje 2. Da bismo izračunali ukupni rad nekonzervativnih sila, moramo izračunati razliku rada na ulazu u cijev i na izlazu iz cijevi, $W_{\mathrm{nc}} = P_2A_2s_2 - P_1A_1s_1 = (P_2 - P_1)V$. Ukoliko ovo uvrstimo u teorem o radu i energiji dobivamo

$$W_{\mathrm{nc}} = (P_2 - P_1)V = \left(\tfrac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1\right) - \left(\tfrac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2\right)$$

Podijelimo li obje strane ove jednadžbe s volumenom V možemo prepoznat ćemo da je omjer m/V jednak gustoći tekućine ρ. Preuredimo li malo ovu jednadžbu dobivamo Bernoullijevu jednadžbu:

Bernoullijeva jednadžba. U stacionarnom toku neviskoznog, nekompresibilnog fluida gustoće ρ, tlaka P, brzina v i nadmorske visine y u bilo koje dvije točke fluida vrijedi

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \qquad (11.8)$$

Fizika za biologe – vježbe

Zadaci sa (*) preuzeti su iz udžbenika Young & Freedman (2011) University physics with modern physics (rješenja u prilogu).
Zadatke pokušajte riješiti samostalno. Detaljna riješenja će biti poslana naknadno. Sva pitanja šaljite na email: abosilj@phy.hr

Titranje

1. (*Primjer 14.2) Lijevi kraj horizontalno položene opruge je fiksiran. Na desni kraj opruge je pričvršćen dinamometar koji pokazuje da je sila istezanja proporcionalna pomaku te da sila od 6 N uzrokuje pomak od 0.03 m. U idućem koraku zamijenimo dinamometar s blokom koji može klizati po površini, mase 0.5 kg, pomaknemo blok za 0.2 m na desno na podlozi bez trenja te pustimo u gibanje iz mirovanja. Pronađite konstantu opruge, k. Pronađite frekvenciju, f, kružnu frekvenciju, ω i period oscilacija, T.
2. (*Primjer 14.4) Za oscilirajući blok iz 1. zadatka pronađite maksimalnu i minimalnu brzinu koju postiže te maksimalnu i minimalnu akceleraciju. Pronađite brzinu, v_x i akceleraciju, a_x kada je blok na pola puta između početnog položaja i ravnotežnog položaja $x = 0$. Pronađite ukupnu energiju, potencijalnu i kinetičku energiju za taj položaj.

Mehanika fluida

- Gustoća $\rho = m/V$ i tlak $p = dF_{\perp}/dA$
- Tlak u mirujućem fluidu $p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1) \rightarrow p = p_0 + \rho g h$
- Uzgon $F_u = \rho g V$
- Jednadžba kontinuiteta $A_1 v_1 = A_2 v_2$
- Bernoullijeva jednadžba $p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

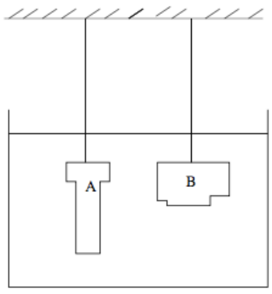
3. Kocka pluta u posudi s vodom. Rukom potisnemo kocku na sredinu posude i zatim pustimo. Opišite gibanje kocke nakon puštanja!

4. Dva tijela različitih oblika vise na nitima i uronjena su u vodu, slika 1. U kojem je slučaju sila napetosti niti veća (mase i volumen tijela su jednaki za oba tijela)?

5. (*Primjer 12.7) Voda ulazi u kuću kroz cijev promjera 2 cm na apsolutnom tlaku od $4 \cdot 10^5$ Pa. Cijev promjera 1 cm vodi na drugi kat kuće na visini od 5 m. Ako je brzina toka na ulazu u kuću 1.5 m/s pronađite brzinu toka, tlak i brzinu volumnog toka na drugom katu!

6. (*Primjer 12.8) Rezervoar poprečnog presjeka A_1 ispunjen je do visine h. Prostor iznad tekućine u rezervoaru ispunjen je zrakom na tlaku p_0 te tekućina istječe iz dna rezervoara kroz kratku cijev poprečnog presjeka A_2. Izvedite izraz za brzinu toka u cijevi na dnu i brzinu volumnog toka.

7. (*12.83) Kocka gustoće ρ_k i duljine stranice L pluta u tekućini veće gustoće ρ_t. Koji dio volumena kocke je iznad površine tekućine? Tekućina je gušća od vode ρ_v i ne miješa se s njom. Ako ulijemo vodu na površinu tekućine, koliko debeo mora biti sloj vode da površina vode točno deseže najvišu stranicu kocke?



Slika 1