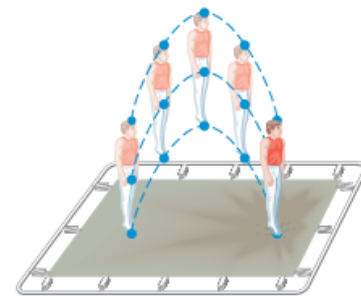


## 9. DINAMIKA ROTACIJSKOG GIBANJA

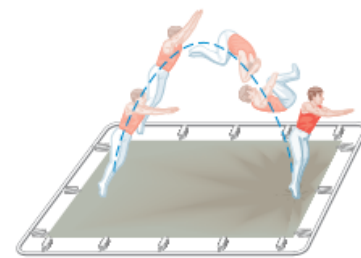
(pripremljeno prema poglavlju 9, Cutnell & Johnson: Physics, 9th edition, John Wiley and Sons, (2012), poveznica na knjigu: [www.pdf-archive.com/2018/04/25/cutnell](http://www.pdf-archive.com/2018/04/25/cutnell) )

### Djelovanje sila i momenata sila na kruta tijela.

Masa najtvrdih predmeta, poput propelera ili kotača, prostorno je raspodijeljena, odnosno nije koncentrirana u jednoj točki. Ovi se predmeti mogu gibati na više načina. Slika desno ilustrira dvije mogućnosti: (i) translacijsko gibanje prilikom kojeg sve točke na tijelu putuju paralelnim stazama, te (ii) rotacijsko gibanje, koje se može pojaviti u kombinaciji s translacijskim gibanjem, kao što je primjer gimnastičarke na slici desno (b).

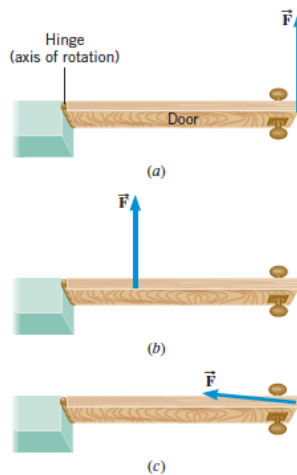


(a) Translation



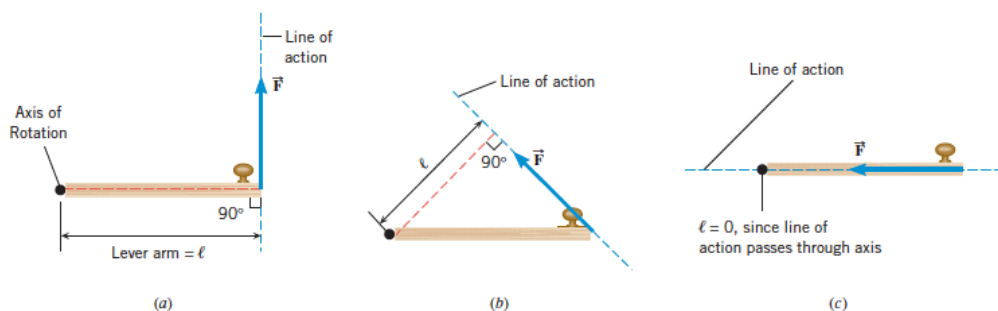
(b) Combined translation and rotation

Vidjeli smo mnogo primjera kako sila utječe na linearno gibanje uzrokujući ubrzanje tijela. Sada moramo uzeti u obzir mogućnost da kruto tijelo može imati i kutno ubrzanje. Vanjska sila uzrokuje promjenu linearnog gibanja, ali što uzrokuje promjenu rotacije? Na primjer, nešto uzrokuje da se brzina rotacije propelera glisera promijeni kada čamac ubrzava. Je li to jednostavno sila ili nešto drugo? Vidjet ćemo da promjenu rotacijske brzine ne uzrokuje sila, već zakretni moment.



Slika lijevo pomaže predočiti ideju zakretnog momenta. Kada silom pritisnete vrata, kao u slučaju (a), vrata se otvaraju brže kada je sila veća. Međutim, vrata se ne otvaraju tako brzo ako silom djelujete u točki koja je bliža šarki, kao u slučaju (b), jer se ovdje stvara manji zakretni moment. Nadalje, ako je vaša sila usmjerena prema šarki, kao u dijelu (c), teško ćete uopće otvoriti vrata, jer je okretni moment gotovo nula. Ukratko, zakretni moment ovisi o veličini sile, o mjestu na kojem se sila primjenjuje u odnosu na os rotacije te o smjeru sile.

Radi jednostavnosti, razmotrimo slučaj u kojem sila leži u ravnini koja je okomita na os rotacije (slika dolje). Crtež prikazuje smjer djelovanja sile te krak sile, dva pojma koja su važna u definiciji zakretnog momenta. Crtkana linija prikazuje produžetak smjera sile. Krak sile je udaljenost između linije djelovanja i osi rotacije, mjereno na liniji koja je okomita na



smjer sile i os rotacije. Moment definira se kao:

### Definicija momenta sile

$$\text{Moment sile} = \text{sila} \times \text{krak sile} = F\ell \quad (9.1)$$

Moment sile je pozitivan kad djeluje tako da generira rotaciju tijela koja je suprotna od smjera kazaljke na satu.

SI jedinica momenta sile: Newton · metar (Nm)

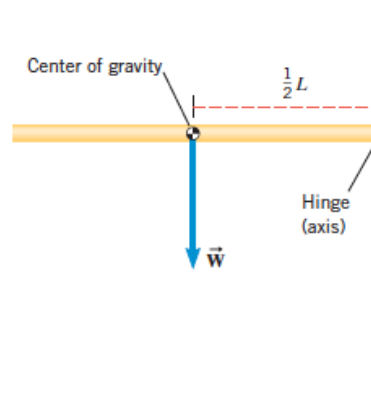
**Kruto tijelo u ravnoteži.** Ukoliko je kruto tijelo u ravnoteži, tad mu se ne mijenja ni linearno, niti rotacijsko gibanje. Na primjer, objekt čije se linearno gibanje ne mijenja nema ubrzanja,  $\vec{a} = 0$ . Prema tome, ukupna sila na tijelo mora biti jednaka nuli, jer vrijedi  $\vec{F} = m\vec{a} = 0$ . Za gibanje u dvije dimenzije, komponente x i y odvojeno su jednake nuli,  $F_x = 0$  i  $F_y = 0$ . Kad proučavamo tijela u ravnoteži, pored linearnog gibanja, moramo razmotriti i rotacijsko gibanje. To znači da je moment sile koji djeluje na tijelo jednak nuli, jer je moment sile ono što uzrokuje promjenu rotacije. Moment sile se uobičajeno označava  $\tau$ . Stoga, ravnotežu krutog tijela definiramo na sljedeći način.

**Ravnoteža krutog tijela.** Kruto tijelo nalazi se u ravnoteži ukoliko mu je translacijsko i kutno ubrzanje jednako nuli. U ravnoteži, zbroj vanjskih sila mora biti jednak nuli te zbroj momenata sile mora biti jednak nuli:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 \quad \text{i} \quad \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma \tau = 0 \end{aligned} \quad (9.2)$$

Uočimo da je izbor osi u odnosu na koju se računaju momenti sile potpuno proizvoljan, jer ako je neki objekt u ravnoteži, on mora imati uravnotežene momente sile s obzirom na bilo koju os. Dakle, zbroj vanjskih zakretnih momenata je nula, bez obzira na to gdje se nalazi os.

**Težište.** Često je važno znati moment sile koji nastaje djelovanjem nekog tijela koje ima određeni oblik. Na primjer, na slici desno želimo odrediti moment sile kojeg proizvodi letvica svojom težinom. U tom nam pomaže definiranje točke koju zovemo težište.

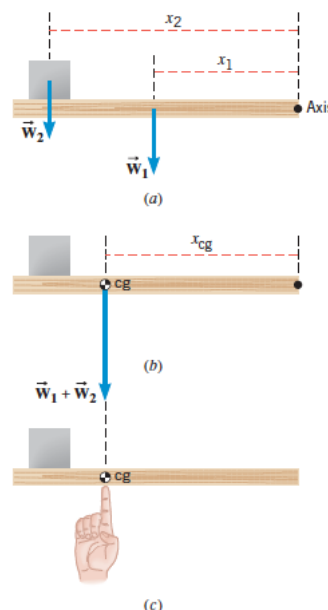


**Definicija težišta tijela.** Težište čvrstog tijela je ona točka (na tijelu ili izvan njega) za koju se može reći da u njoj djeluje sila teža, a koristimo ju kad računamo moment sile.

Za ona tijela koja imaju simetričan oblik i imaju ravnomjernu gustoću (sastoje se od homogenog materijala), težište leži u njihovom geometrijskom središtu. Na primjer, slika gore prikazuje tanku, vodoravnu letvicu duljine  $L$  pričvršćenu šarkom na okomiti zid. Težište letvice se nalazi u geometrijskom središtu. Tijelo ima težinu  $\vec{W}$ , a krak sile je na položaju  $L/2$ , pa je iznos momenta sile  $W(L/2)$ . Također, težište bilo

kojeg simetričnog i homogenog tijela, poput sfere, diska, kocke ili cilindra, nalazi se u njegovom geometrijskom središtu. Međutim, to ne znači da težište mora ležati unutar samog objekta. Npr. težište na DVD disku leži u sredini rupe tj. nalazi se izvan tijela.

Gdje se nalazi težište tijela? Pretpostavimo da imamo dva tijela s poznatim težištima te iz tih podataka želimo odrediti položaj težišta za grupu kao cjelinu. Kao primjer, na slici desno prikazana je skupina sastavljena od dva dijela: vodoravna homogena ploča (težine  $\vec{W}_1$ ) i kutija (težine  $\vec{W}_2$ ) blizu lijevog kraja ploče. Težište ćemo odrediti izračunavanjem momenta sile, a kao referentu os odabrati ćemo onu koja prolazi desnim krajem ploče. Dio a na slici prikazuje silu težu  $\vec{W}_1$  i  $\vec{W}_2$  i njima pripadajuće krakove sile u odnosu na os,  $x_1$  i  $x_2$ . Ukupni moment sile iznosi  $\Sigma\tau = W_1x_1 + W_2x_2$ . Također je moguće izračunati moment sile koju nam daje ukupna sila skupine sastavljena od ova dva tijela  $\vec{W}_1 + \vec{W}_2$ . Za nju možemo definirati krak sile  $x_t$ :  $\Sigma\tau = (W_1 + W_2)x_t$ . S obzirom da ove dvije vrijednosti za ukupni moment sile moraju biti jednake vrijedi



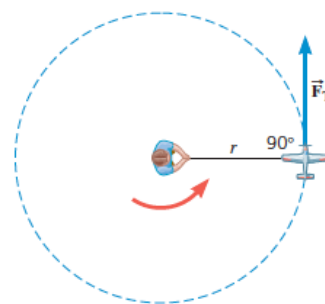
$$W_1x_1 + W_2x_2 = (W_1 + W_2)x_t$$

Iz ovog se izraza može odrediti položaj težita za grupu koja se sastoji od dva tijela, a izraz za proizvoljno mnogo tijela tada se može poopćiti na:

$$x_t = \frac{W_1x_1 + W_2x_2 + \dots}{W_1 + W_2 + \dots} \quad (9.3)$$

### Drugi Newtonov zakon primijenjen na rotaciju oko fiksne osi.

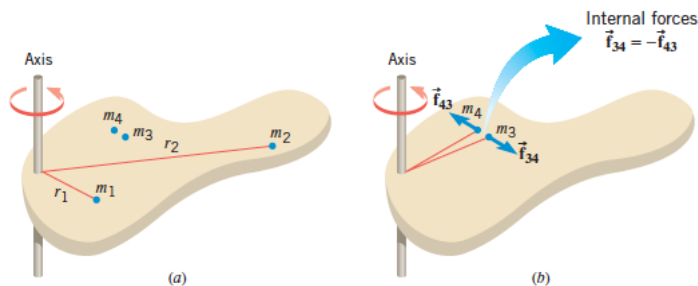
Cilj ovog odjeljka je primijeniti drugi Newtonov zakon u oblik pogodan za opisi rotacijskog gibanja krutog objekta oko fiksne osi. Započinjemo razmatranjem čestice koja se kreće kružnom stazom. Npr. na slici desno prikazano je kružno gibanje zrakoplova vezanog s niti. Motor zrakoplova proizvodi neto vanjsku tangencijalnu silu  $F_T$  koja zrakoplovu daje tangencijalno ubrzanje  $a_T$ . U skladu s drugim Newtonovim zakonom, možemo zapisati da vrijedi  $F_T = ma_T$ . Također, u ovom slučaju možemo izračunati moment sile, koji u odnosu na čovjeka iznosi  $\tau = rF_T$ . Kao rezultat, dobivamo da moment sile iznosi  $\tau = rma_T$ . Ukoliko isoristimo vezu između tangencijalnog i kutnog ubrzanja  $a_T = r\alpha$ , dobivamo



$$\tau = \underbrace{(mr^2)}_{\text{Moment tromosti } I} \alpha \quad (9.4)$$

Jednadžba (9.4) dovodi u vezu moment sile i kutno ubrzanje. Konstanta proporcionalnosti je  $I = mr^2$ , a naziva se *moment tromosti*.

Kad bi svi predmeti bili pojedinačne čestice, drugi bi zakon bio prikladniji za upotrebu u obliku  $F_T = ma_T$ , prije nego li u obliku  $\tau = I\alpha$ . Međutim, prednost ovog drugog zapisa dolazi do izražaja ukoliko želimo opisati dinamiku krutog tijela. Da bismo to ilustrirali, na slici gore prikazan je ravan list materijala koji se okreće oko osi okomite na taj list. List se sastoji od niza točaka mase,  $m_1, m_2, \dots, m_N$  gdje je  $N$  vrlo velik broj. Svaka se točka ponaša na isti način kao zrakoplov s prethodne slike, odnosno za svaku točku vrijedi  $\tau = (mr^2)\alpha$ , odnosno imamo:



$$\begin{aligned} \tau_1 &= (m_1 r_1^2) \alpha \\ &\vdots \\ \tau_N &= (m_N r_N^2) \alpha \end{aligned}$$

Uočimo da je u ovim jednadžbama kutno ubrzanje  $\alpha$  jednako za sve točke. To je posljedica činjanice da su te točke dio krutog tijela. Zbrojimo li sve ove jednadžbe dobivamo kompaktni zapis

$$\underbrace{\sum \tau}_{\text{Ukupni moment sile}} = \underbrace{(\sum mr^2)}_{\text{Moment tromosti}} \alpha \quad (9.5)$$

gdje je  $\Sigma\tau = \tau_1 + \dots + \tau_N$  ukupni moment sile koji djeluje na kruto tijelo, a  $\Sigma mr^2 = m_1 r_1^2 + \dots + m_N r_N^2$  ukupni moment tromosti kojem doprinose momenati tromosti pojedinih točaka. Sad možemo definirati moment tromosti tijela:

$$I = m_1 r_1^2 + \dots + m_N r_N^2 = \Sigma mr^2 \quad (9.6)$$

Kombiniranjem jednadžbe (9.5) i (9.6) dobiva se jednadžba analogna drugom Newtonovom zakonu, a vrijedi za rotaciju krutog tijela:

$$\tau = I\alpha \quad (9.7)$$

Napomenimo da kutno ubrzanje  $\alpha$  mora biti iskazano u jedinicama  $\text{rad/s}^2$ .

**Rad i energija kružnog gibanja.** Analogno definiciji rada koji sila obavi na određenom putu može se definirati rad koji obavlja moment sile.

**Rad kružnog gibanja.** Analogno definiciji rada za silu na određenom putu može se definirati rad koji obavlja moment sile. Ukoliko moment sile  $\tau$  zakrene tijelo za kut  $\theta$  tada će taj moment sile obaviti rad  $W_R$  koji iznosi

$$W_R = \tau\theta \quad (9.8)$$

Također, tijelu koje se vrti oko osi može se pridružiti kinetička energija. Kao što smo

tijelu koje se giba nekom brzinom definirali kinetičku energiju, analogno se može definirati kinetička energija za tijelo koje se giba nekom kutnom brzinom:

$$\text{Rotacijska KE} = \Sigma\left(\frac{1}{2}mr^2\omega^2\right) = \frac{1}{2} \underbrace{(\Sigma mr^2)}_{\substack{\text{Moment} \\ \text{tromosti, } I}} \omega^2$$

**Kinetička energija kružnog gibanja.** Ukoliko se tijelo momenta tromosti  $I$  rotira kutnom brzinom  $\omega$  ono ima kinetičku energiju  $\text{KE}_R$  koja iznosi

$$\text{KE}_R = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (9.8)$$

## Fizika za biologe – vježbe

Zadaci sa (\*) preuzeti su iz udžbenika Young & Freedman (2011) University physics with modern physics (rješenja u prilogu).

Zadatke pokušajte riješiti samostalno. Detaljna rješenja će biti poslana naknadno. Sva pitanja šalžite na email: abosilj@phy.hr

### Moment sile

- Moment sile  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ ,  $\sum \tau_z = I\alpha_z$

- Kombinirano translacijsko i rotacijsko gibanje

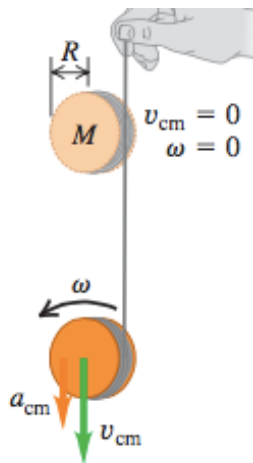
$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 \quad \sum \vec{F}_{vanjske} = M \vec{a}_{cm}$$

$$v_{cm} = R\omega \quad \sum \tau_z = I_{cm} \alpha_z$$

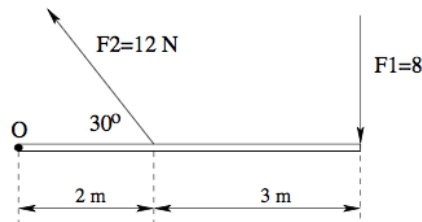
- Angularni moment čestice  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$ ; angularni moment čvrstog tijela koje rotira oko osi simetrije  $\vec{L} = I\vec{\omega}$

- Ukupan vanjski moment na sustav je jednak brzini promjene angularnog momenta sustava  $\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

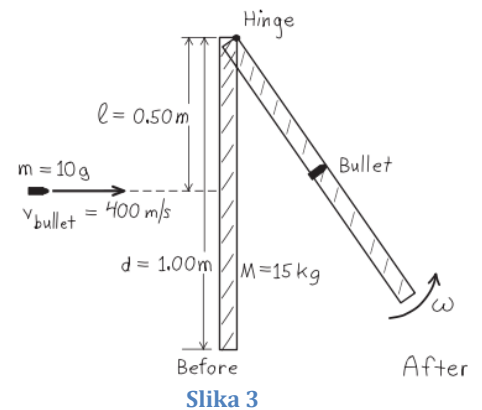
1. (\*Primjer 10.6) Pronađite akceleraciju centra mase cilindra koji se odmotava s niti i napetost niti, slika 1!
2. Na štap djeluju dvije sile, obje u ravnini štapa. Koliki je zakretni moment sile oko točke O, slika 2!
3. (\*Primjer 10.12) Vrata širine 1.0 m, mase 15 kg mogu slobodno rotirati oko vertikalne osi, slika 3. Metak mase 10 g i brzine 400 m/s udara u središte vrata, u smjeru okomitom na ravninu vrata te ostaje zaglavljnjen u njima. Pronađite kutnu brzinu vrata. Da li je kinetička energija sačuvana?



Slika 1



Slika 2



Slika 3