NUMERIČKE METODE I MATEMATIČKO MODELIRANJE

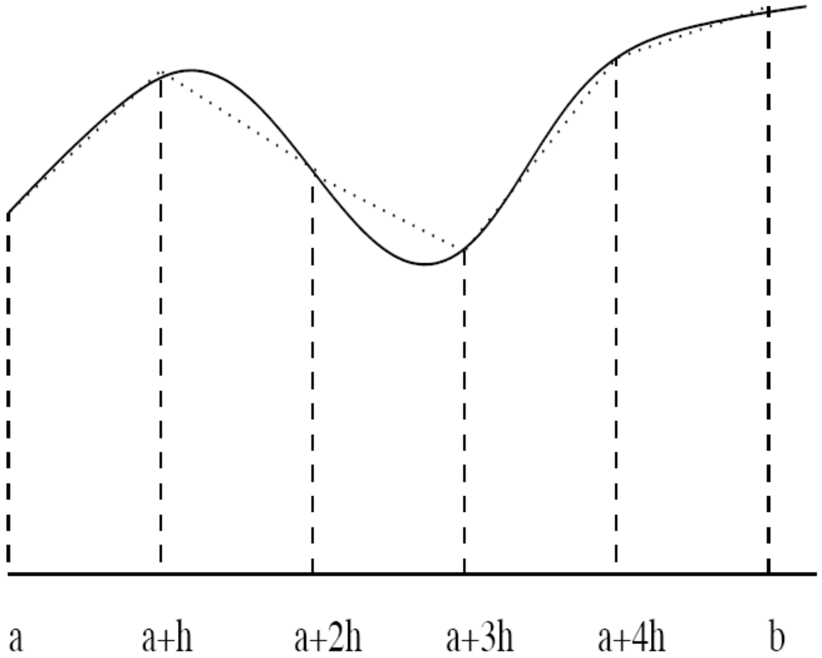
9. PREDAVANJE

METODE NUMERIČKE INTEGRACIJE

NUMERIČKA INTEGRACIJA

- pregled osnovnih metoda numeričke integracije
- treba izračunati integral neke funkcije na zadanom intervalu (funkcija često nije zadana u analitičkom obliku ili se ne može analitički integrirati !)

$$I = \int_a^b f(x)dx$$



Integral I odgovara površini ispod zadane funkcije f(x) u intervalu koji počinje na x=a i završava na x=b

NUMERIČKA INTEGRACIJA

- metode numeričke integracije dijele se na

1) metode zasnovane na konstantnom koraku integracije
2) metode sa prilagodljivim korakom integracije, tzv. metoda Gaussove kvadrature

Newton – Cotes metoda integracije

- Konstantni korak, metoda zasnovana na Taylorovom razvoju funkcije f(x) oko niza okolnih točaka oko x

- Prvo treba zadati korak integracije,

$$h = \frac{b-a}{N}$$

- gdje je N broj koraka, b i a su granice integracije

NEWTON-COTES INTEGRACIJA

- zatim treba izabrati koliko se članova Taylorovog razvoja želi uzeti u obzir (tj. do koje derivacije funkcije f(x) se želi ići)

- treba odrediti koliko točaka oko x se želi uzeti u proračunu derivacije

- traženi integral se razbije po intervalima:

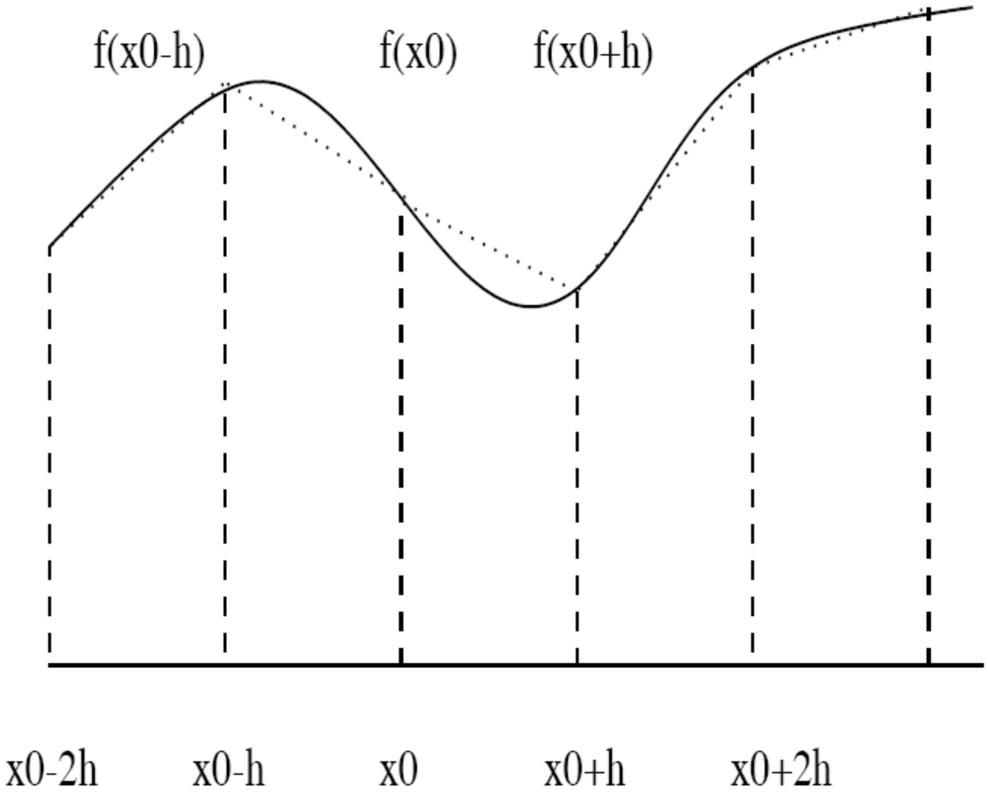
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+2h} f(x)dx + \int_{a+2h}^{a+4h} f(x)dx + \ldots \int_{b-2h}^{b} f(x)dx$$

- treba naći pouzdani Taylorov razvoj u svakom podintervalu,

- općenito podintegral možemo zapisati kao $\int_{-h}^{+h} f(x)dx$

NEWTON-COTES INTEGRACIJA

- Treba napraviti Taylorov razvoj funkcije f(x) oko točke x_0



$$f(x = x_0 \pm h) = f(x_0) \pm hf' + \frac{h^2 f''}{2} \pm \frac{h^3 f'''}{6} + O(h^4)$$

NEWTON-COTES INTEGRACIJA

- pretp. dalje da integral $\int_{-h}^{+h} f(x)dx$ razbijemo na dva dijela,

  jedan od -h do x_0, a drugi od x_0 do h
- pretp. da možemo koristiti formulu dvije točke za derivaciju (tj. aproksimiramo f(x) ravnim linijama na podintervalima)
- Dakle, svaki mali element ispod f(x) odgovara trapezu, funkcija f(x) je aproksimirana polinomom prvog reda

$$f(x) = a + bx$$

- gdje je b (nagib pravca) određen prvom derivacijom

$$f'(x_0 \pm h) = \frac{\mp f(x_0 \pm h) \pm f(x_0)}{h} + O(h)$$

NEWTON-COTES INTEGRACIJA

- ako prekinemo Taylorov razvoj iza derivacije prvog reda,

$$f(x) = f_0 + \frac{f_h - f_0}{h} x + O(x^2)$$ za $x = x_0$ do $x = x_0 + h$

$$f(x) = f_0 + \frac{f_0 - f_{-h}}{h} x + O(x^2)$$ za $x = x_0 - h$ do $x = x_0$

- uvrstimo u izraz za integral, dobije se trapezno pravilo:

$$\int_{-h}^{+h} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_h + 2f_0 + f_{-h}) + O(h^3)$$

- greška $O(h^3)$ je lokalna, ukupna greška se dobiva sumiranjem po svim intervalima i ide kao $O(h^2)$

ALGORITAM TRAPEZNE METODE INTEGRACIJE

- izabrati broj točaka i odrediti korak za integraciju
- izračunati $f(a)$ i $f(b)$, zatim pomnožiti sa $h/2$
- napraviti petlju od $n=1$ do $n-1$ i sumirati članove

$$f(a+h)+f(a+2h)+f(a+3h)+\cdots+f(b-h)$$

- Pomnožiti ukupni rezultat sa h i dodati $hf(a)/2$ i $hf(b)/2$

ALGORITAM TRAPEZNE METODE INTEGRACIJE

```
double trapezoidal_rule(double a, double b, int n, double (*func)(double))
{
      double trapez_sum;
      double fa, fb, x, step;
      int    j;
      step=(b-a)/((double) n);
      fa=(*func)(a)/2. ;
      fb=(*func)(b)/2. ;
      trapez_sum=0.;
      for (j=1; j <= n-1; j++){
         x=j*step+a;
         trapez_sum+=(*func)(x);
      }
      trapez_sum=(trapez_sum+fb+fa)*step;
      return trapez_sum;
}  // end trapezoidal_rule
```

```
integral = trapezoidal_rule(a, b, n, &myfunction )
```

NEWTON-COTES INTEGRACIJA - TRI TOČKE

- umjesto f(x) u aproksimaciji sa dvije točke, može se primjeniti aproksimacija tri točke u izračunu derivacije f(x)
- funkcija se aproksimira polinomom drugog stupnja

$$f(x) = a + bx + cx^2$$

- prva i druga derivacija funkcije su dane sa

$$\frac{f_h - f_{-h}}{2h} = f_0' + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_0^{(2j+1)}}{(2j+1)!} h^{2j}$$

$$\frac{f_h - 2f_0 + f_{-h}}{h^2} = f_0'' + 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_0^{(2j+2)}}{(2j+2)!} h^{2j}$$

- funkcija je aproksimirana kao

$$f(x) = f_0 + \frac{f_h - f_{-h}}{2h} x + \frac{f_h - 2f_0 + f_{-h}}{2h^2} x^2 + O(x^3)$$

NEWTON-COTES INTEGRACIJA - TRI TOČKE

- uvrštavanjem aproksimiranog izraza za f(x) u integral,

$$\int_{-h}^{+h} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_h + 4f_0 + f_{-h}) + O(h^5)$$

- ovo je Simpsonova metoda integracije, greška je manja nego kod trapezne formule
- primjenom na cijeli interval $[a,b]$ slijedi:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 4f(b-h) + f_b)$$

- globalna greška Simpsonove integracije:

$$\int_a^b f(x)dx - S_h(f) = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\xi) \qquad \xi \in [a,b]$$

ALGORITAM SIMPSONOVE METODE INTEGRACIJE

- izabrati broj točaka i veličinu intervala za integraciju
- izračunati $f(a)$ i $f(b)$
- napraviti petlju od $n = 1$ do $n - 1$ u kojoj se zbrajaju članovi

$$4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + \cdots + 4f(b-h)$$

- (za neparne vrijednosti n članovi dolaze sa faktorom 4, za parne vrijednosti sa faktorom 2)
- konačni rezultat treba pomnožiti sa faktorom $\frac{h}{3}$

NEWTON-COTES INTEGRACIJA

- općenito se dana funkcija f(x) aproksimira polinomom nekog stupnja

- za $n+1$ različitih točaka $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ i $n+1$ vrijednosti $y_0, \ldots, y_n$ postoji jedinstveni polinom $P_n(x)$ koji ispunjava uvjet (interpolacijski polinom)

$$p_n(x_j) = y_j \quad j = 0, \ldots, n$$

- u Lagrangeovoj reprezentaciji interpolacijski polinom se može zapisati kao

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} l_k y_k$$

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \qquad k = 0, \ldots, n$$

NEWTON COTES INTEGRACIJA

- npr. u slučaju $n = 1$ dobiva se linearna funkcija

$$P_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x - \frac{y_1 x_0 + y_0 x_1}{x_1 - x_0}$$

- Općenito se integracija zasnovana na intepolacijskom polinomu stupnja zadanom na ekvidistantnim točkama $x_k = a + kh$ sa korakom $h = (b - a)/n$ naziva Newton-Cotes formulom za integraciju (kvadratura)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

$$w_k = h \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (z - j)dz \qquad k = 0, \dots, n$$

ZADATAK 9

- Napišite program koji računa ukupnu potrošenu električnu energiju u 1000 dana, ako je ovisnost snage električne struje u vremenu modelirana funkcijom

$$P(t) = \left(4 + \frac{t}{365} + \frac{1}{2} sin \frac{\pi t}{91}\right) \left(2 + e^{-sin(2\pi t)}\right)$$

gdje je snaga dana u GW, a vrijeme t u danima.

Primijeniti trapeznu i Simpsonovu metodu integracije i prikazati na grafu ovisnost izračunate ukupne potrošene električne energije o koraku integracije. Program treba ispisati konačno rješenje zadatka za obje metode integracije.

EXERCISE 9

- Write a program that calculates total electric power consumed in 1000 days, if dependence of the power in time is given by the following function:

$$P(t) = \left(4 + \frac{t}{365} + \frac{1}{2} sin \frac{\pi t}{91}\right)\left(2 + e^{-sin(2\pi t)}\right)$$

where the power is given in GW units, time t in days.

Apply trapezoidal and Simpson method of integration, and plot dependence of calculated consumed power on the step of integration. The program should write out the final solution obtained for both methods of integration.