1a. Matematičko njihalo

1. Ključni pojmovi

Matematičko njihalo, period titranja, harmonijske oscilacije, amplituda

2. Teorijski uvod

Matematičko njihalo sastoji se od točkaste mase *m* obješene na donjem kraju niti duljine *l*. Nit je učvršćena na gornjem kraju i zanemarive je mase. U realnom eksperimentu masa nije koncentrirana u jednoj točki, već je raspodijeljena po cijelom volumenu kugle. No, uz uvjet da je polumjer kugle mnogo manji od duljine niti, možemo problem svesti na razmatranje matematičkog njihala.
Otkloni li se kuglica iz položaja ravnoteže, započinje titranje. Period tog titranja može se odrediti na tri načina (vidi "Udžbenik fizike Sveučilišta u Berkeleyu" - Svezak I, str. 118-122). Mi ćemo odabrati rješenje pomoću zakona očuvanja energije. Ukupna energija titranja zbroj je kinetičke i potencijalne energije:

$$E_{uk} = E_k + E_p = konst.. \tag{1}$$

Kinetička energija je oblika

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \tag{2}$$

a potencijalna energija u položaju određenom kutom otklona φ iznosi

$$E_p = mgl(1-\cos\varphi). \tag{3}$$

Ukupnu energiju sistema nalazimo iz uvjeta da u položaju maksimalnog otklona $\varphi = \alpha$, obodna brzina iščezava pa je

$$E_{uk} = E_{p\max} = mgl(1-\cos\alpha). \tag{4}$$

Uvrštavanjem jednadžbi (2) - (4) u (1) dobivamo:

$$d\varphi = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha)}\, dt. \tag{5}$$

Ako postavimo početni uvjet da u trenutku $t = 0$ njihalo miruje u položaju $\varphi = -\alpha$, možemo odrediti poluperiod titranja:

$$\frac{T}{2} = \int_0^{T/2} dt = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}}. \tag{6}$$

Ovaj integral nije analitički rješiv ali u slučaju malih amplituda α možemo koristiti razvoje u red

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \ldots \qquad \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \ldots$$

pa je period titranja:

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\varphi^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ . \tag{7}$$

Želimo li ipak odrediti period titranja za velike amplitude, potrebno je integral (6) izraziti pomoću specijalnih integrala koji su također nerješivi analitički ali se daju prikazati razvojem u red. Ta integracija daje izraz

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot K(k)\,, \tag{8}$$

gdje je $k = \sin(\alpha/2)$, a $K(k)$ potpuni eliptični integral prve vrste definiran s

$$K(k) = -\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi/2}\left(1-k^2\sin^2\psi\right)^{-1/2} d\psi\ . \tag{9}$$

Razvoj tog integrala u red je

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{k^2}{4}+\cdots\right)$$

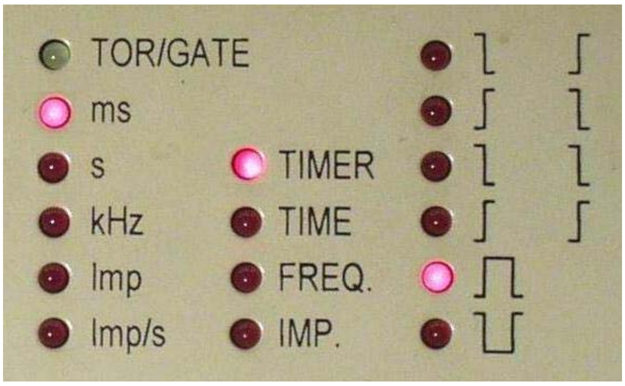
pa je period titranja za velike kutove otklona dan razvojem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cdots\right). \tag{10}$$

3. Mjerni uređaj i mjerenje

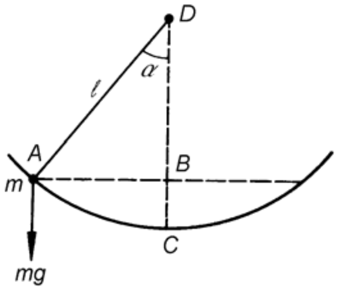
Uređaj za proučavanje matematičkog njihala prikazan je na slici 1. Na dugačkoj niti zavezana je čelična kugla promjera $2r = 24,4$ mm ili $2r = 32$ mm. U ravnotežnom položaju njihala postavljen je detektor s fotoćelijom. Fotoćeliju je, nakon priključivanja na elektroničku zapornu uru (štopericu), potrebno inicijalizirati pritiskom na tipku SET na pozadini fotoćelije. Fotoćelija je spremna za uporabu tek kad crvena lampica trepće pri svakom prekidanju snopa što možete provjeriti i prstom (zaporna ura mora biti uključena no ne mora mjeriti vrijeme). Kada nit presiječe svjetlosni snop, detektor šalje signal na elektroničku zapornu uru. Okidač (TRIGGER) zaporne ure namjesti se tako da s primitkom prvog signala počne mjeriti vrijeme, a s primitkom drugog signala se zaustavi (slika 2). Na taj način očita se poluperiod titranja. Kako bi se izbjegla sistematska pogreška u mjerenju, poluperiod se mjeri s obiju strana detektora. Duljinu niti treba mjeriti prije i poslije mjerenja perioda, a kao relevantnu duljinu uzeti srednju vrijednost. Izmjerenoj duljini valja pribrojiti polumjer kugle. Treba paziti da aproksimacija matematičkog njihala bude ispunjena.

Slika 1. Mjerni uređaj



Slika 2. Postavke zaporne ure

Prvi dio mjerenja izvodimo tako da nit s kuglom učvrstimo u objesište i izmjerimo udaljenost od objesišta do kugle. Otklonimo kuglu za neki mali kut (nekoliko stupnjeva) i očitavamo poluperiod jednak broj puta s obiju strana detektora ne prekidajući uspostavljeno njihanje. Isti postupak ponovimo za deset raznih duljina niti.
U drugom dijelu mjerenja proučavamo ovisnost perioda titranja o kutu otklona. Nit s kuglom učvrstimo u objesište, a duljinu niti više ne mijenjamo tijekom mjerenja. Kutovi otklona mjere se pomoću priloženog metra učvršćenog na stalku i to na sljedeći način: Dužina DC na slici 3 prolazi kroz objesište i snop svjetlosti u krugu fotoćelije. Točka A je mjesto na kojem je kugla pričvršćena o nit u trenutku maksimalne elongacije. Mjereći duljinu AB i poznavajući duljinu AD, možemo naći kut otklona α.



Slika 3. Određivanje kuta otklona

4. Zadaci

Napomena: Podatke obradite s pomoću programskog paketa *Mathematica*.

1. Izmjerite period titranja za male kutove otklona za desetak raznih duljina niti. Poluperiod mjerite po 2 puta sa svake strane fotoćelije. Mjerenja prikažite u $\ln T - \ln l$ dijagramu. Pretpostavite da je $T(l) = 2\pi(l/g)^{\gamma}$ i odredite eksponent γ metodom najmanjih kvadrata. Usporedite dobiveni eksponent s teorijskom vrijednosti (relacija (7)).
2. Mjerenja iz zadatka 1 prikažite u $T^2 - l$ dijagramu. Metodom najmanjih kvadrata odredite konstantu gravitacije g.
3. Izmjerite period titranja za 5 različitih kutova otklona. Prikažite grafički ovisnost T o $\sin^2 \dfrac{\alpha}{2}$. Slijede li izmjereni rezultati relaciju (10)?