

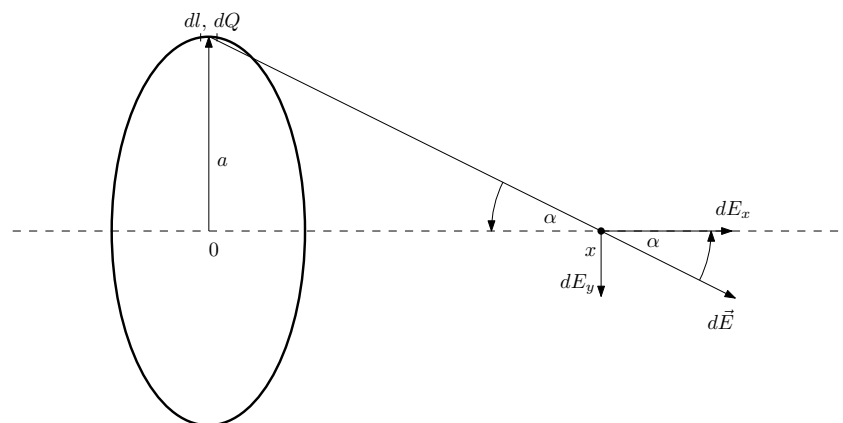
FIZIKA 2
 ZA STUDENTE KEMIJE
 VJEŽBE
 1. SAT
 Rješenje 4. zadatka

25. veljače 2012.

1. Vodljivi prstan polumjera a nabijen je nabojem Q . Izračunajte električno polje na osi prstena koja je okomita na ravninu prstena u točki udaljenoj x od središta prstena.

Prsten je vodljiv, dakle naboj se po njemu jednoliko raspoređuje.

Skica:



Promotrimo mali dio prstena i električno polje koje on stvara na udaljenosti x od osi prstena. Vidimo da se električno polje $d\vec{E}$ koje on uzrokuje može rastaviti na komponente u x i y -smjeru. Dok se komponente električnog polja u x -smjeru koje stvaraju pojedini dijelovi prstena međusobno zbrajaju, komponente u y -smjeru se ponište. Taj se rezultat može dobiti računski, no i pažljivim promatranjem simetrije zadatka. Naime, dio prstena duljine dl koji se nalazi sa suprotne strane prstena stvorit će električno polje čija će y -komponenta biti usmjerena u suprotnom smjeru od one naznačene na skici te će se stoga poništiti. Dakle, rezultatno električno polje pružat će se u \hat{x} smjeru. Inifinitezimalni doprinos električnom polju je:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2}$$

pri čemu nas zanima samo x -komponenta:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \cos\alpha$$

gdje je r udaljenost od djelića prstena do točke x :

$$r = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Uvrstimo $dQ = \lambda dl$, gdje je λ linearna gustoća naboja:

$$\lambda = Q/(2a\pi).$$

Dobivamo:

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{a^2 + x^2} \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{a^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x dl}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

Doprinos opisan gornjom jednačbom odnosi se samo na jedan dio prstena. Sada ćemo integrirati električno polje po cijeloj duljini prstena:

$$E_{x_x} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x dl}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \int dl$$

U prethodnom smo koraku uočili da cijela podintegralna funkcija uopće ne ovisi o dl , stoga ju prilikom integracije tretiramo kao konstantu. Integraciju vršimo po kružnici (prstenu), stoga vrijedi $\int dl = 2a\pi$. Tako dobivamo:

$$E_{x_x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} 2a\pi$$

Kada uzmemo u obzir definiciju linearne gustoće naboja, dobivamo:

$$E_{x_x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

Sada je zanimljivo pogledati granične slučajeve, npr.:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad E_x = 0$$

$$x \gg a \quad \Rightarrow \quad E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2}$$

Vidimo da je za udaljenosti mnogo veće od radijusa prstena električno polje približno jednako onom točkastog naboja.