

## Ispit Vol. 2

"So it goes."

– K. Vonnegut

1. *Magnusov efekt.* Vješti golferi, bejzboleri, ping-pongeri, nogometaši i tome slično znaju loptu pri udarcu tako zarotirati da u letu mijenja smjer, naizgled prkoseći prvom Newtonovom zakonu. To im omogućava takozvani Magnusov efekt, čijom ćemo se pojednostavljenom verzijom baviti u ovom zadatku.

(a) zamisli loptu polumjera  $R$  u struji zraka koji ima brzinu  $v$  daleko od lopte. Lopta rotira oko osi okomite na smjer strujanja zraka, kutnom brzinom  $\omega$ . Skiciraj strujnice, ako je poznato da zrak uz samu loptu ima brzinu površine lopte. (2 boda)

(b) naznači na skici područja povećanog i smanjenog tlaka, i odredi smjer u kojem djeluje sila zbog tih razlika tlakova. (3 boda)

(c) izračunaj tlak u točkama  $A$  i  $B$  (Slika 1) koristeći Bernoullijevu jednadžbu. nađi razliku tlakova i odredi konstantu  $\Gamma$  u izrazu  $\Delta p = \Gamma \omega v$ . (5 bodova)

*Ukupno: 10 bodova*

2. *Adsorpcija.* Tema ovog zadatka je termodinamika vrlo važnog procesa adsorpcije nekog plina na dvodimenzionalnoj površini. Da budemo konkretni, zamislite savršeno glatku ravninu ugljikovih atoma (poznatu kao grafen) koja se nalazi u čistom heliju.

(a) Neka na grafenu postoji  $N$  mogućih mjesta na koja se može 'zakvačiti' atom helija, i neka je na  $n$  njih zaista atom. Ako svaki od atoma helija ima energiju vezanja  $-U$ , napiši ukupnu unutrašnju energiju svih adsorbiranih atoma. (2 boda)

(b) Da bismo našli broj adsorbiranih atoma  $n$ , moramo odrediti njihovu slobodnu energiju. Ako je entropija adsorbiranih atoma jednaka  $S(n)$ , napiši slobodnu energiju  $F(n)$ . (1 bod)

(c) Entropija  $S(n)$  se lako može odrediti ako atomi helija (približno) miruju na svojim mjestima. Nađi broj mogućnosti da na  $N$  mjesta stavimo  $n$  (neraspoznatljivih) atoma, iskoristi Stirlingovu formulu  $x! \approx e^{-x} x^x$  i pokaži da je entropija

$$S(n) = nk \ln \left( \frac{N}{n} - 1 \right) - Nk \ln \left( 1 - \frac{n}{N} \right)$$

(6 bodova)

(d) uzmi da je  $n \ll N$ , zanemari što se zanemariti daje i napiši pojednostavljen izraz za  $S(n)$ . (2 boda)

(e) koristeći pojednostavljen  $S(n)$  i slobodnu energiju iz (b), nađi broj adsorbiranih atoma  $n$ , ako za njih vrijedi  $F = 0$ . (4 boda)

NB Upravo ste izveli takozvano 'aktivacijsko ponašanje' koje se vrlo često pojavljuje kod problema u kojima se natječu entropija i energija vezanja.

*Ukupno: 15 bodova*

3. *Ultrazvuk.* Svaki pravi malopomorac na brodu ima ultrazvučni aparat za mjerenje raznih korisnih i beskorisnih veličina. Počinjemo s najjednostavnijom.

(a) na dnu barke montirani su ultrazvučni predajnik i prijemnik. Predajnik ispušta ultrazvučni puls trajanja  $t = 0.7$  ms okomito na površinu mora, i nakon  $\tau = 13.7$  ms prijemnik registrira jeku. Nađi dubinu mora ispod prijemnika, ako je brzina zvuka u vodi  $c = 1460$  m/s. Skiciraj. (2 boda)

(b) ultrazvučni predajnik na dnu barke odašilje sinusoidalni val frekvencije  $\nu_0 = 75$  kHz pod kutem od  $\phi = 60^\circ$  u odnosu na površinu mora (slika 2), a prijemnik prima refleksiju od sloja planktona, frekvencije  $\nu = 76.2$  kHz. Nađi brzinu barke u čvorovima ( $1 \text{ čv} = 1852$  m/s) (4 boda)

(c) da bi stabilnost mjerenja brzine bila što veća, za detekciju Dopplerovog pomaka iz (b) koristi se takozvani superheterodini detektor. On množi primljeni signal (frekvencije  $\nu$ ) s odaslanim signalom (frekvencije  $\nu_0$ ). Pretpostavivši da su amplitude primljenog i odaslanog jednake, nađi njihov umnožak i opiši izgled signala ako ga se pusti kroz low-pass filter koji reže sve iznad 20 kHz. (3 boda)

*Ukupno: 9 bodova*

4. *Nuklearna magnetska rezonancija.* NMR je nezaobilazan za (skoro) sve vrste kemičara, pa ćemo se ovdje malo detaljnije pozabaviti kvantnom teorijom jednostavne atomske jezgre – protona – u magnetskom polju.

(a) proton ima spin  $1/2$ , pa živi u 2D prostoru stanja s vlastitim vektorima

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i } |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Napiši Hamiltonijan vanjskog magnetskog polja  $B_0$ ,  $\mathcal{H}_0$ , u matričnom obliku, ako Schrödingerova jednadžba glasi

$$\mathcal{H}_0 |\uparrow\rangle = -\frac{1}{2}\gamma\hbar B_0 |\uparrow\rangle \text{ i } \mathcal{H}_0 |\downarrow\rangle = \frac{1}{2}\gamma\hbar B_0 |\downarrow\rangle$$

uz  $\gamma$  žiromagnetski omjer protona,  $\gamma = 42.6$  MHz/T. (3 boda)

(b) nađi razliku energija  $\Delta E$  stanja  $|\uparrow\rangle$  i  $|\downarrow\rangle$  i skiciraj ju u ovisnosti o vanjskom polju  $B_0$ . Kolika je frekvencija prijelaza  $\Delta E/h$  u polju od 11 T? (4 boda)

Osim vanjskog polja, na proton u atomu (ili molekuli) djeluje lokalno polje elektrona koji kruži oko njega. Od svih interakcija elektron-proton, najčešće (u kemiji) dominira takozvana kontaktna interakcija.

(c) Relativistički, elektron se može shvatiti kao mala strujna petlja brzine  $c$  i polumjera  $\lambda \approx \hbar/mc$ . Kad se proton nađe 'unutar' elektrona, osjeća magnetsko polje te petlje. Ako je valna funkcija osnovnog stanja atoma vodika dana s

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} e^{-r/a_0}, \text{ uz Bohrov radius } a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2},$$

nađi vjerojatnost  $P$  da se elektron nalazi u sferi polumjera  $\lambda$  oko protona. (4 boda)

(d) srednje magnetsko polje koje proton osjeća dok je 'u elektronu' je  $B_{HF} = Pe/\lambda^2$ , pa je prema tome ukupno polje  $B_0 + B_{HF}$ . Zamijeni u Schrödingerovoj jednadžbi  $B_0$  ukupnim poljem i nađi razliku energija  $\Delta E'$  u prisutnosti kontaktne interakcije. Kolika je pomaknuta frekvencija prijelaza u odnosu na (b), u istom polju? (5 bodova)

*Ukupno: 16 bodova*