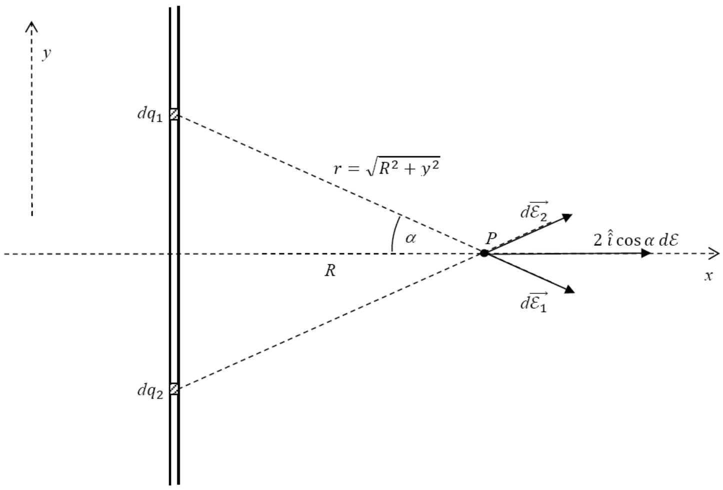
12.5.1 Homogena raspodjela naboja na pravcu

Zamislimo da imamo beskonačnu ravnu šipku linijske gustoće naboja λ.

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad .$$

Izračunajmo polje u točki P koja je udaljena za R od šipke. Neka je šipka paralelna s osi y, a os x prolazi kroz točku P.



Za računanje polja primijenit ćemo princip superpozicije. Šipku možemo zamisliti da se sastoji od niza segmenata duljine dy. Izračunajmo najprije polje od jednog takvog segmenta koji ima naboj dq_1. Taj segment udaljen je od točke P za $r = \sqrt{R^2 + y^2}$ i stvara u točki P polje $d\vec{\mathcal{E}_1}$, koje je po iznosu:

$$d\mathcal{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_1}{R^2 + r^2} \quad ,$$

a usmjereno je pod kutem α u odnosu na x-os. Iznos x-komponente tog polja je $d\mathcal{E}_1 \cos\alpha$, a y komponenta je $d\mathcal{E}_1 \sin\alpha$. Za svaki naboj dq_1 postoji naboj s druge strane šipke koji daje isti iznos polja, ali ima suprotnu y komponentu. Tako se zbog simetrije y komponente poništavaju, a polje mora biti usmjereno u x- smjeru. Zbrajamo samo x-komponente polja. Ukupno polje od ova dva segmenta bit će

$$d\vec{\mathcal{E}} = d\vec{\mathcal{E}_1} + d\vec{\mathcal{E}_2} = \hat{\imath} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \cdot dq}{R^2 + r^2} \cos\alpha \quad ,$$

pri čemu je $dq = \lambda dy$. Integrirat ćemo samo po pozitivnim vrijednostima y, jer smo negativne uključili množeći s faktorom 2.

$$\vec{\mathcal{E}} = \int_0^\infty d\vec{\mathcal{E}} = \hat{\imath} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\lambda \int_0^\infty \frac{\cos\alpha}{R^2 + r^2} dy \quad .$$

Ovaj integral riješit ćemo prelaskom na novu varijablu α metodom supstitucije $y = R\text{tg}\alpha$. Deriviranjem dobivamo:

$$dy = \frac{R}{\cos^2\alpha} d\alpha \quad .$$

Osim toga, definicija funkcije kosinus nam daje:

$$\cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + y^2}} \quad ,$$

iz čega dobivamo

$$\frac{1}{R^2 + y^2} = \frac{\cos^2\alpha}{R^2} \quad .$$

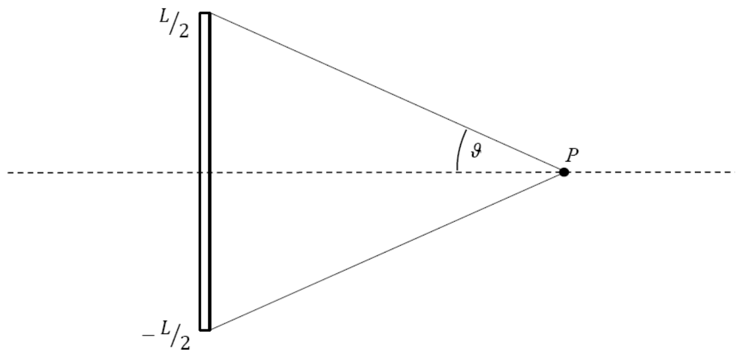
Ako ove dvije relacije uvrstimo u gornji integral, pazeći na nove granice integracije, dobivamo:

$$\vec{\mathcal{E}} = \hat{i}\frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\alpha}{R^2}\cdot\cos\alpha\frac{R}{\cos^2\alpha}d\alpha = \hat{i}\frac{2\lambda}{4R\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi/2}\cos\alpha d\alpha \quad .$$

Vrijednost određenog integrala je 1 pa je konačni rezultat za električno polje na udaljenosti R od beskonačnog ravnog homogeno nabijenog štapa:

$$\vec{\mathcal{E}} = \hat{i}\frac{\lambda}{2R\pi\epsilon_0} \quad .$$

Ako je *štap konačne duljine* L, možemo odrediti polje u točki P koja se nalazi na simetrali dužine štapa (vidi sliku). U ovom slučaju integral po α ne ide do $\pi/2$, nego do kuta ϑ:



$$\vec{\mathcal{E}} = \hat{i}\frac{2\lambda}{4R\pi\epsilon_0}\int_0^{\vartheta}\cos\alpha d\alpha = \hat{i}\frac{\lambda}{2R\pi\epsilon_0}\sin\vartheta \quad .$$

Vrijedi

$$\sin\vartheta = \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{L}{2}\right)}}$$

pa je konačni rezultat za električno polje na simetrali dužine

$$\vec{\mathcal{E}} = \hat{i}\frac{\lambda}{2R\pi\epsilon_0}\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{L}{2}\right)}} \quad .$$

Razmotrimo ovaj rezultat u dva posebna slučaja. Kada je točka P jako blizu šipke ($R \ll L$), kut ϑ je skoro $\pi/2$ pa je rezultat isti kao za beskonačan štap. Naime, kada smo jako blizu štapa, on nam uistinu izgleda kao da se proteže u beskonačnost.

U suprotnom graničnom slučaju kad je $R \gg L$, za polje vrijedi

$$\vec{\mathcal{E}} = \hat{i}\frac{\lambda L}{4R^2\pi\epsilon_0} = \hat{i}\frac{Q}{4R^2\pi\epsilon_0} \quad ,$$

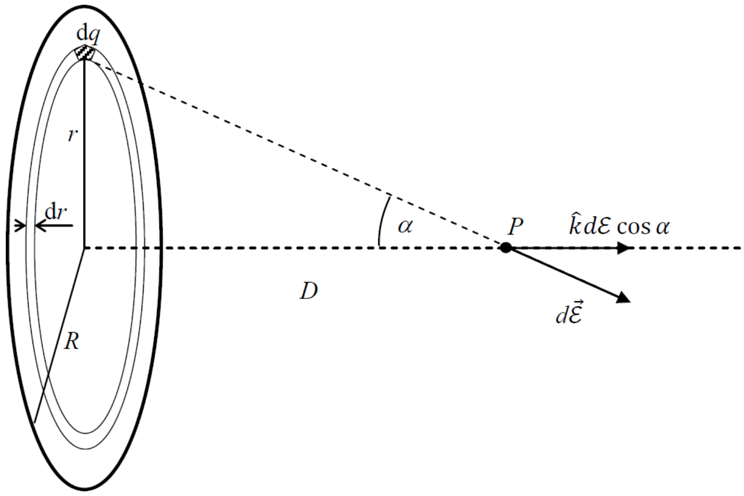
gdje smo iskoristili činjenicu da je ukupni naboj na štapu $Q = \lambda L$. Ovaj rezultat nam kaže da nam štap iz velike daljine izgleda kao točka pa je polje jednako polju točkastog naboja na udaljenosti R.

12.5.2 Homogena raspodjela naboja u ravnini

Zamislimo da imamo ravnu okruglu ploču površine $A = R^2\pi$. Neka je na njoj uniformno raspodijeljen naboj Q. Tada možemo definirati *površinsku gustoću naboja*

$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad .$$

Izračunajmo polje u točki P koja je na osi simetrije kružne ploče udaljena za D od njezinog središta. Neka je os simetrije ujedno z-os našeg koorinatnog sustava, a ishodište sustava u središtu ploče.



Za računanje polja primijenit ćemo princip superpozicije. Ploču možemo zamisliti da se sastoji od niza kružnih vijenaca radijusa r i širine dr. Izračunajmo najprije polje od jednog takvog kružnog vijenca. Jedan segment tog vijenca ima naboj dq. Taj segment udaljen je od točke P za $\sqrt{D^2 + r^2}$ i stvara u točki P polje $d\vec{\mathcal{E}}$, koje je po iznosu:

$$d\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{D^2 + r^2} \quad ,$$

a usmjereno je pod kutem α u odnosu na z-os. Iznos z-komponente tog polja je $d\mathcal{E}\cos\alpha$, a radijalna komponenta je $d\mathcal{E}\sin\alpha$. Za svaki naboj dq postoji naboj s druge strane vijenca koji daje isti iznos polja, ali ima suprotnu radijalnu komponentu. Tako se zbog simetrije problema radijalne komponente poništavaju, a polje mora biti usmjereno u z- smjeru. Zbrajamo samo z-komponente polja. Ukupno polje od jednog kružnog vijenca bit će

$$d\vec{\mathcal{E}_v} = \hat{k}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{D^2 + r^2}\cos\alpha = \hat{k}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{D^2 + r^2}\frac{D}{\sqrt{D^2 + r^2}} \quad ,$$

pri čemu je dQ ukupni naboj vijenca $dQ = \sigma \cdot 2\pi r dr$. Za ukupno polje trebamo zbrojiti (integrirati) doprinose svih kružnih vijenaca u ploči:

$$\vec{\mathcal{E}} = \int_0^R d\vec{\mathcal{E}_v} = \hat{k}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}2\pi\sigma\int_0^R \frac{D}{(D^2 + r^2)^{3/2}} r dr \quad .$$

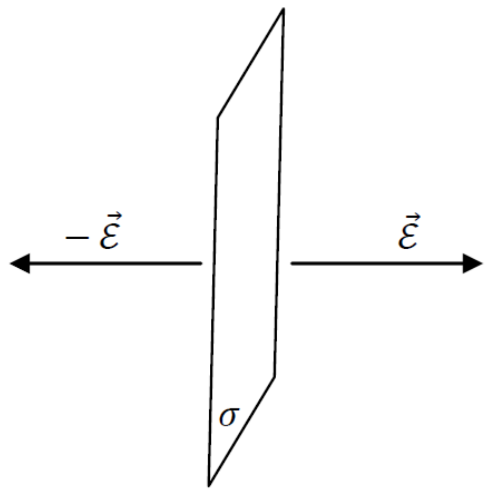
Konačni rezultat za polje na mjestu P je:

$$\vec{\mathcal{E}} = \hat{k}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{D}{\sqrt{D^2 + R^2}}\right) \quad .$$

Poseban slučaj ovog primjera je *beskonačna ravna ploča*, tj. $R \gg D$. Bilo koja točka izvan ploče ima simetriju kakvu je u izvodu imala točka P. Polje je

$$\vec{\mathcal{E}} = \hat{k}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

i ne ovisi o udaljenosti D. Dakle, polje je homogeno.



S druge strane ploče polje je

$$\vec{\mathcal{E}} = -\hat{k}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

pa možemo uočiti da površinska gustoća naboja uzrokuje skok električnog polja:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad .$$