

Kolokvij Vol. 1

"Lasciate ogne speranza, voi ch'entrate"

– D. Alighieri

(I) Numerički zadaci:

1. *Vreli zeka.* Zeka je hiperaktivan i skače po vrtu. Maksimalna visina do koje skoči je $H = 400$ mm, a masa zeke $m = 1.5$ kg.

(a) ako zanemarimo sve gubitke, nađi maksimalnu potencijalnu energiju zeke i vrijeme potrebno za jedan skok (period skakanja). Zeka skače vertikalno uvis, a $g = 10$ m/s². (3 boda)

(b) ako zeka zbog gubitaka mora u svakom periodu uložiti po $\eta = 20\%$ maksimalne potencijalne energije (iz (a)), nađi srednju snagu zeke. (3 boda)

(c) koliko mrkve kalorijske vrijednosti 120 kJ na 100 g mora zeka pojesti da bi mogao skakati 3 sata? (3 boda)

Ukupno: 9 bodova

2. *Magnetski top.* Ovaj zadatak se bavi sitnim ali dinamičnim uređajem koji uz pomoć permanentnog magneta i zakona očuvanja lansira čelične kuglice prilično ozbiljnom brzinom (vidi pokus! i sliku). Uređaj se sastoji od cilindričnog magneta duljine $L = 2$ cm koji stoji na stolu, s N čeličnih kuglica 'zalijepljenih' s jedne strane magneta. Na velikoj udaljenosti od magneta stoji još jedna čelična kuglica, na istom pravcu kao magnet i ostale kuglice. Sve kuglice su iste, masa 10 g i radiusa $R = 5$ mm. Potencijalna energija jedne kuglice u polju magneta ima oblik

$$V(x) = -\frac{\Xi}{x^3} \quad (1)$$

gdje je $\Xi = 2 \cdot 10^{-6}$ Jm³ konstanta a x udaljenost između centara kuglice i magneta.

(a) otprilike nacrtaj potencijalnu energiju (1) u ovisnosti o x . Je li sila privlačna ili odbojna? (2 boda)

(b) Ako slobodnu kuglicu pustimo iz beskonačnosti (gdje miruje), nađi njenu kinetičku energiju i impuls u trenutku kad udara u magnet (odnosno, kad je $x = L/2 + R$). Upotrijebi očuvanje energije (trenje je zanemarivo). (4 boda)

Kada slobodna kuglica lupi u magnet, odmah se 'zalijepi' za njega pa sav svoj impuls prenese na posljednju kuglicu (kaskadno, preko magneta i ostalih kuglica). Ako je N velik, posljednja kuglica je dovoljno daleko od magneta da možemo uzeti da je na njenom položaju $V \approx 0$, odnosno magneta kao da ni nema:

(c) izračunaj brzinu posljednje kuglice u trenutku odvajanja od pretposljednje ako je $N \gg 1$, koristeći količinu gibanja iz (b). (2 boda)

(d) Ako je N mali, hoće li brzina biti veća ili manja nego u slučaju (c)? Nađi brzinu zadnje kuglice kada dospije daleko od magneta za slučaj $N = 2$, opet koristeći prenešenu količinu gibanja i očuvanje energije. (3 boda)

Ukupno: 11 bodova

3. *Molekula vodika.* U ovom zadatku zabavljat ćete se s jednostavnim modelom molekule H₂, u kojem su sve elektronske komplikacije 'spakirane' u efektivni potencijal između dvije jezgre (protona). Zamislite dakle dva protona okružena elektronskim oblakom, s potencijalnom energijom

$$V(r) = -\frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^3} \quad (2)$$

gdje su A i B konstante, a r udaljenost između protona.

- (a) Je li potencijal privlačan ili odbojan kad su protoni daleko jedan od drugog? a kad su jako blizu? (2 boda)
- (b) Skiciraj oblik $V(r)$ u ovisnosti o udaljenosti protona r . (2 boda)
- (c) Nađi položaj minimuma $V(r)$, odnosno ravnotežnu udaljenost protona, $r = R$. (3 boda)
- (d) Ako je stvarna udaljenost protona 0.74 \AA , nađi omjer konstanti A i B (u jedinicama \AA^{-1}) (1 bod)

Udaljenost R dakle odgovara razmaku protona u molekuli vodika, ali uključuje konstante A i B . Međutim, A i B možemo odrediti eksperimentalno, koristeći vlastitu frekvenciju vibracije molekule. Do nje dolazimo promatrajući mala odstupanja protona od ravnotežnog položaja.

- (e) Izračunaj silu između protona, $F = -\frac{dV}{dr}$, u ovisnosti o r . Kolika je sila u ravnotežnom položaju, $r = R$? (2 boda)
- (f) Recimo da se protoni u nekom času malo (i simetrično) udalje od ravnotežnog položaja, odnosno $r = R + \xi$, uz $\xi \ll R$. Tada će sila biti proporcionalna pomaku: $F = -k\xi$. Nađi 'konstantu opruge' k u ovisnosti o A i R . Iskoristi izraz za silu iz (e), izrazi B preko A i R pomoću (c), svedi sve na zajednički nazivnik i zanemari ξ u nazivniku. (3 boda)

Došli smo do poznatog rezultata da za male ξ možemo molekulu vodika zamišljati kao dvije kuglice jednakih masa, povezane oprugom konstante k . Ostaje naći vlastitu frekvenciju vibracije.

- (g) skiciraj molekulu H_2 kao dvije kuglice masa m povezane oprugom konstante k , i označi sile koje djeluju na kuglice ako se opruga malo rastegne. Centar mase miruje. (2 boda)
- (h) Ako je opruga rastegnuta za duljinu ξ , a centar mase miruje, koja je veza između ξ i x , pomaka jednog od atoma (zbog simetrije svejedno kojeg)? Napiši jednadžbu gibanja tog atoma u obliku $\frac{d^2x}{dt^2} = -\Gamma x$. Usporedbom s jednadžbom harmoničkog oscilatora nađi vezu između Γ i ω_0 , vlastite frekvencije vibracija molekule. Izračunaj ω_0 u ovisnosti o m i k . (3 boda)
- (i) Uvrsti A i R u izraz za k , upotrijebi (h) i (d) i nađi konstante A i B u $\text{eV} \cdot \text{\AA}^2$ odnosno $\text{eV} \cdot \text{\AA}^3$, ako je $\omega_0 = 4.6 \cdot 10^{13} \text{ rad/s}$, a $m = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. (2 boda)

Ukupno: 20 bodova

(II) Konceptualni zadaci:

1. Skiciraj putanju Felixa Baumgartnera bačenog iz aviona bez početne brzine (u odnosu na avion). (2 boda)
2. Zašto na Zemlji postoji 'mala' i 'velika' plima? Skiciraj položaje relevantnih nebeskih tijela! (2 boda)
3. Zašto helikopteri moraju imati repni rotor (koji je u ravnini okomitoj na glavni)? Kako veliki teretni helikopteri s dva glavna rotora rješavaju isti problem? (2 boda)
4. Zašto barun Münchhausen sigurno nije mogao izvući samog sebe iz blata za kosu? Bi li mogao da je imao koloturu (i dovoljno dugu/izdržljivu kosu)? (2 boda)
5. Zašto loše napuhane gume povećavaju potrošnju auta? (2 boda)