Antonije Dulčić

ELEKTROMAGNETIZAM

(dio predavanja održanih 2012. godine)

Napomena:

Ovo je izvod iz predavanja koja prof. dr. sc. A. Dulčić predaje na istraživačkom studiju fizike u kolegiju Opća fizika 2. Budući da je ovaj dokument predviđen za uporabu studentima kemije koji za isto gradivo imaju dvostruko manju satnicu, dijelovi predavanja nisu uključeni (poglavlje 7 i poglavlja nakon 11), a gradivo koje je uključeno predaje se u manjem opsegu. Ipak, studentima kemije se preporuča da pročitaju ovaj materijal kao dopuna i razjašnjenje gradiva koje je njima ispredavano.

Radi lakšeg snalaženja, napisao sam pregled sadržaja. Brojevi stranica odnose se na pdf dokument u kojem su dvije skenirane stranice rukopisa stavljene na jednu stranicu pdf-a.

U Zagrebu, 25. Studenog 2012,

Miroslav Požek

SADRŽAJ

1. Električni naboj 3
1.1. Električni naboj kao svojstvo tvari 3
1.2. Coulombov zakon 4
1.3. Zakon o očuvanju električnog naboja 5
1.4. Kvantizacija električnog naboja 6
2. Električno polje 9
2.1. Električno polje u okolini jednog naboja 9
2.2. Princip superpozicije 11
2.3. Primjer električnog dipola 12
2.4. Električne silnice 14
2.5. Pravčasta raspodjela naboja 15
2.6. Ravninska raspodjela naboja 19
3. Gaussov zakon 22
3.1. Pojam toka električnog polja 22
3.2. Električni tok koji nastaje od jednog naboja 23
3.3. Gaussov zakon 28
3.4. Neke primjene Gaussova zakona 28
4. Električna potencijalna energija i potencijal 36
4.1. Električna potencijalna energija 36
4.2. Električni potencijal 43
4.3. Odnos električnog polja i potencijala 44
4.4. Ekvipotencijalne plohe 47
4.5. Konzervativnost elektrostatskog polja 50
5. Elektrostatika vodiča i dielektrika 51
5.1. Električno polje nabijenog vodiča 51
5.2. Influencija u vodičima 53
5.3. Potencijal vodiča 54
5.4. Kondenzatori 58
5.5. Dielektrici 66
6. Električne struje 71
6.1. Nastanak električne struje 71
6.2. Gibanje naboja u vodiču 73
6.3. Ohmov zakon u makroskopskom obliku 77
6.4. Električna vodljivost u raznim materijalima 79
6.5. Trošenje električne energije 83
6.6. Elektromotorna sila 87
6.7. Galvanske ćelije (članci) 93
6.8. Pravila u električnim krugovima 96
6.9. Uzemljenje 101
8 Magnetostatika 104
8.1 Permanentni magneti 104
8.2 Magnetsko polje struje 106
8.3 Priroda magnetskog djelovanja struja 108
8.4 Integrali magnetskog polja struje 112
8.5 Magnetski dipolni moment 119
8.6 Elektromagnetski mjerni instrumenti 121
8.7 Magnetizam u tvarima 123
9 Elektromagnetska indukcija 128
9.1 Faradayevo otkriće 128
9.2 Faradayev zakon indukcije 129
9.3 Priroda inducirane elektromotorne sile 132
9.4 Trošenje snage 148
9.5 Samoinduktivnost 149
9.6 Generator izmjeničnog napona 151
10 Krugovi izmjenične struje 156
10.1 Slobodno titranje u RLC krugu 156
10.2 Prisilne oscilacije 158
10.3 Metoda rotirajućih vektora 162
10.4 Metoda kompleksnih brojeva 165
11 Maxwellove jednadžbe 169

ELEKTROMAGNETIZAM

1. ELEKTRIČNI NABOJ

1. Električni naboj kao svojstvo tvari

Električna svojstva je prvi uočio i opisao Tales iz Mileta (oko 600. god. pr. Kr.):

komad jantara protrljan vunom ili suknom privlači sitne čestice druge tvari

To je nazvano svojstvom jantara (grč. elektron = jantar)

W. Gilbert (16. st., Engleska) je uočio da i neke druge tvari imaju svojstvo poput jantara. Uveo je naziv za tu pojavu električno svojstvo (tj. kao jantarsko svojstvo).

U 17. st. je utvrđeno da električna svojstva uključuju privlačenje i odbijanje.

Pokus

elektriziranje štapova trenjem
privlačenje i odbijanje

U čemu je uzrok sile ?

Usporedba s gravitacijskom silom

Newton je ustvrdio da tijela imaju svojstvo koje je nazvao "gravitacijska (ili teška) masa" i ono dovodi do privlačenja. To je postulat (tvrdnja koja se ne dokazuje nego se uzima kao polazište za izgradnju sustava razmišljanja)

Gravitacijska sila je temeljna prirodna sila (tj. ne izvodi se iz drugih sila).

Dakle, za objašnjenje gravitacijskog privlačenja među tijelima bilo je potrebno postulirati jedno svojstvo (masu) i uz nju vezanu temeljnu silu.

Problem električne sile u 18. st.

Tijela u pravilu nemaju električnog svojstva, pa im se ne može trajno pripisati takva veličina.

Ako tijela pokazuju električno svojstvo, može među njima biti privlačna ili odbojna sila.

Za objašnjenje ovih pojava postulirano je da postoji svojstvo koje je nazvano naboj.

Postulirani su sljedeći elementi tog svojstva:

a) Svojstvo se može pojaviti u dva oblika koji su dogovorno nazvani: pozitivan i negativan naboj.

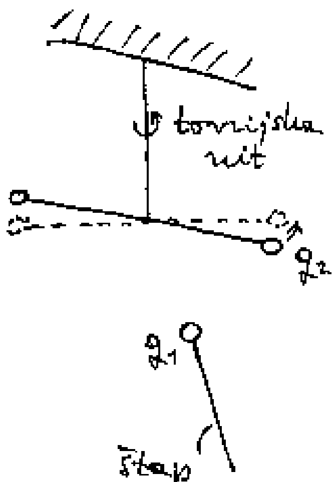
b) Tijela koja imaju jednaku količinu obaju naboja neutralna su i ne pokazuju električno svojstvo.

c) Tijelo koje ima jednog naboja više nego drugog pokazuje električno svojstvo. Kažemo da je tijelo tada električki nabijeno.

d) Tijela nabijena istoimenim nabojima odbijaju se a kada su nabijena raznoimenim nabojima privlače se.

2. Coulombov zakon

C. A. Coulomb je oko 1785. god. izvodio pokus s torzionom vagom i nabojima

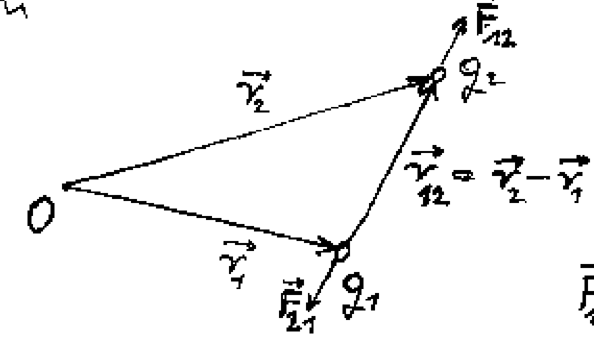


Ako su naboji q_1 i q_2 istoimeni dolazi do sile odbijanja. Torzijska nit se zakreće sve dok se ne uspostavi ravnoteža. Mjerenjem kuta zakreta može se odrediti sila na naboj q_2.

$$\boxed{F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}}$$

Coulombov eksperimentalni rezultat

Općenita vektorska jednadžba za Coulombov zakon



$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

III. Newtonov zakon

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

sila na naboj 2

Sila među nabojima proporcionalna je produktu naboja a obrnuto proporcionalna kvadratu njihove međusobne udaljenosti. Coulombova sila je centralna sila (leži na spojnici naboja) a smjer ovisi o predznacima naboja (uviđamo veliku prednost u odabiru naziva "pozitivni" i "negativni" za naboje).

Napomena:

Coulombova sila se uvodi za dva naboja u međusobnom mirovanju u inercijalnom sustavu.

Izbor jedinice za naboj

Jedinica za neku fizikalnu veličinu uvodi se u nekim putem jednadžbe u kojoj se dobivena veličina pojavljuje.

Kod jedinice za naboj imamo dvije mogućnosti:

a) Definirati jedinicu za naboj putem Coulombova zakona

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Tada možemo staviti $k=1$ (bezdimenzionalan broj) pa naboj postaje veličina sa zadanom dimenzijom

$$[q] = \sqrt{[F]L^2} = M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}$$

uz odgovarajuću izvedenu jedinicu.

Ovakav se način uvođenja jedinice za naboj upotrebljavao nekoć. To je bila elektrostatička jedinica za naboj (engl. electrostatic unit, 1 esu).

b) Danas prevladava uporaba jedinica iz SI (Système International d'Unités) iz 1960. god.

Temeljna jedinica za električne veličine je amper (1A) kojom se mjeri jakost struje.

Jedinica za naboj je izvedena

$$\underset{\text{kulon}}{1C} = 1\underset{\text{amper}}{A}\,\overset{\text{sekunda}}{s}$$

Uz takav izbor jedinice za naboj eksperimentalno se dobiva konstanta k u Coulombovom zakonu

$$k = 8{,}9875\cdot 10^{9}\,\mathrm{Nm^2C^{-2}} \approx 9\cdot 10^{9}\,\mathrm{Nm^2C^{-2}}$$

Kasnije će se pokazati da je konstantu k pogodno izraziti pomoću jedne druge konstante

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Longrightarrow \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\mathrm{N^{-1}m^{-2}C^2}$$

permitivnost vakuuma

3. Zakon o očuvanju električnog naboja

Ukupni električni naboj izoliranog sustava je konstantan.

Ako se npr. sustav sastoji od dva podsustava, možemo prenositi naboje s jednog na drugi podsustav no ukupni naboj se ne mijenja.

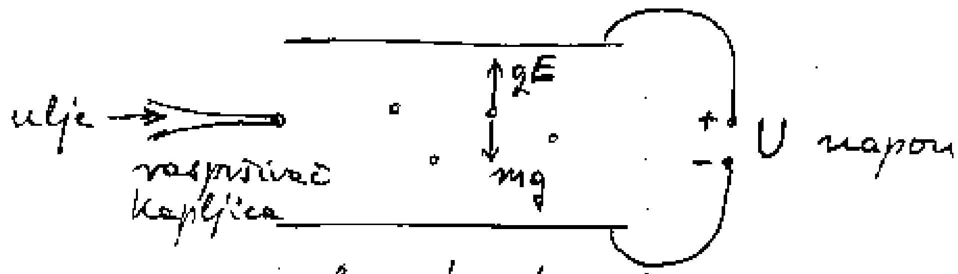
Pokus:

prenošenje naboja s jedne metalne kugle na drugu

(provjera s kuglicom na njihalu)

4. Kvantizacija električnog naboja

Kvantizacija električnog naboja pokazana je glasovitim Millikanovim pokusom



Kod raspršivanja kapljice ulja se uslijed trenja mogu elektrizirati. Iskustvo je pokazalo da je njihov naboj negativan. Ako se kondenzator priključi na izvor napon (gornja ploča pozitivna), može se postići da kapljica ulja lebdi

$$\underbrace{qE}_{\text{električna sila}} = mg = \underbrace{\tfrac{4}{3}\pi R^3}_{\text{volumen kapljice}}\underbrace{\rho}_{\text{gustoća ulja}} g$$

Električno polje E može se odrediti poznavanjem napona U kojim su nabijene ploče kondenzatora.

Prostor između ploča kondenzatora obasjan je jakom svjetlošću, a kapljice ulja se promatraju teleskopom. Može se izmjeriti radius R dobivene kapljice putem skale ugrađene u optički sustav teleskopa.

Gustoća ulja ρ može se neovisno izmjeriti.

Dakle, za pojedinu promatranu kapljicu mijenjamo U dok ne postignemo da ona lebdi. Određujemo naboj kapljice

$$q = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g}{E}$$

Millikan je od 1909.–1913. god. izmjerio naboje za nekoliko tisuća kapljica.

Rezultat: Naboj kapljice je uvijek bio višekratnik jednog elementarnog naboja

$$e = 1.6 \times 10^{-19}\,C$$

tj. uvijek je dobivao $q = e, 2e, 3e, \ldots$

To je naboj elektrona koji dogovorno uzimamo negativnim.

Pozitivni naboji su također kvantizirani s istim iznosom elementarnog naboja.

Proton nosi elementaran pozitivni naboj.

Jednakost apsolutnih vrijednosti naboja elektrona i protona može se vrlo točno ispitati. Provjerava se da li je atom vodika (proton + elektron) neutralan.

Stlači se velika količina vodika u jednu posudu koja se pažljivo električki izolira.
Pušta se polako plin iz posude i prati električni naboj (potencijal) posude.

Kada bi se naboji elektrona i protona malo razlikovali, svaka molekula vodika imala bi malen naboj. Izlaskom velikog broja molekula, primijetio bi se porast suprotnog naboja na posudi.

Eksperiment je pokazao da nema porasta naboja na posudi. Točnost mjerenja je bila jako velika

$$\Delta e \leq 10^{-20} e$$

eventualna razlika između apsolutnih vrijednosti naboja protona i elektrona

Sve elementarne čestice koje nisu električki neutralne, nose naboj točno iste apsolutne vrijednosti.

Očito je da je kvantizacija električnog naboja vrlo dubok i općenit prirodni zakon.

Suvremena teorija elementarnih čestica razmatra građu protona, neutrona i drugih hadrona. Pretpostavlja se da se oni sastoje od kvarkova koji nose električne naboje $\frac{1}{3}e$ i $\frac{2}{3}e$. Međutim, kvarkovi ne mogu postojati kao slobodne (zasebne) čestice. Oni su zarobljeni u hadronu.

Coulombov zakon vrijedi i za naboje elementarnih čestica na nekoj udaljenosti.

Izuzima se slučaj $r \to 0$!
(Tada bi Coulombova sila postala beskonačno velika $\propto \frac{1}{r^2}$)

Minimalna udaljenost:
iz raspršenja elektrona na protonu $- 10^{-15}$ m
iz raspršenja elektrona na elektronu $- 10^{-18}$ m

Na manjim udaljenostima nemamo sigurnosti da Coulombov zakon vrijedi.

Koliki su realno ostvarivi naboji tijela?

Uzmimo kao primjer dvije aluminijske kuglice volumena $1 cm^3$ (oko 10^{22} atoma) na udaljenosti od 10 cm. Kada bismo svakome atomu u jednoj kuglici oduzeli po jedan elektron (atom ^{13}Al ima 13 elektrona u raznim orbitalama oko jezgre) i prenijeli te elektrone na drugu kuglicu, dobili bismo naboje

$$q_1 = 10^{22} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C = 1{,}6 \cdot 10^{3}\,C$$

$$q_2 = -q_1$$

Između kuglica bi nastala privlačna sila

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{(1{,}6 \cdot 10^3)^2}{0{,}1^2} \approx 2{,}3 \cdot 10^{18}\,N$$

To je ogromna sila (kao težina mase od 230000 milijardi tona!!) koju ne bi bilo moguće kompenzirati. Očito je da u praksi nije izvedivo svakome atomu oduzeti jedan elektron.

Ako oduzmemo 1 elektron na svakih milijardu (10^9) atoma u kuglici, dobiva se naboj od

$$q_1 = \frac{10^{22}}{10^9} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C = 1{,}6 \cdot 10^{-6}\,C$$

Drugoj kuglici dodamo te elektrone $q_2 = -q_1$.

Između kuglica nastaje sila

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-6})^2}{0{,}1^2} \approx 2{,}3\,N$$

To je sila koja je dovoljno velika da se može eksperimentalno mjeriti (odgovara težini utega od 0,23 kg)

U pokusima s nabijenom kuglicom na njihalu vidljivi učinak odbijanja postiže se i sa 1000 puta manjom silom od gornje.

Zaključak:

Tijela imaju ogromne količine pozitivnog naboja u jezgrama atoma i negativnog naboja u elektronima oko jezgara. Električna neutralnost tijela postiže se samo zahvaljujući savršenoj izjednačenosti dviju vrsta naboja.
Rezultirajući naboji tijela koji se pojavljuju u praksi nastaju tek neznatnom neravnotežom naboja.

2. ELEKTRIČNO POLJE

1. Električno polje u okolini jednog naboja

Zamislimo postojanje nekog naboja q koji je nepomičan u danom inercijalnom sustavu. Ako u neku točku u okolini tog naboja dovedemo probni naboj q_0 možemo ustanoviti da na njega djeluje Coulombova sila.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q q_0}{r^2}\hat{r}$$

Na naboj q također djeluje sila u skladu s III. Newtonovim zakonom no ta nas sila ovdje ne zanima. Smatramo da se naboj q nalazi na nekom tijelu (npr. kuglici) koja je mehanički učvršćena u danom inercijalnom sustavu.

Sila $\vec{F}$ ovisi o iznosu (i predznaku) probnog naboja no ako napravimo omjer

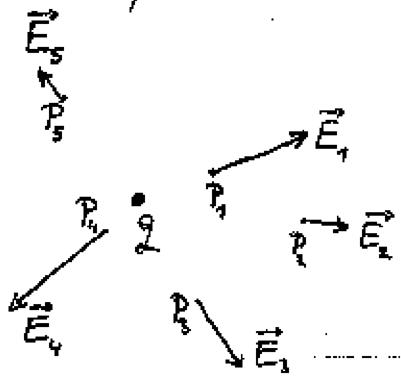
$$\frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

dobivamo veličinu koja ovisi samo o naboju q i točke promatranja na udaljenosti $\vec{r}$ od njega.

Korisno je uvesti sljedeće razmišljanje. Ako u nekom prostoru postoji naboj q, onda svaka točka prostora poprima jedno svojstvo koje izražavamo putem vektora električnog polja

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

Vektor $\vec{E}$ ima različite iznose i smjerove u različitim točkama prostora oko naboja q.



Što je točka P_i udaljenija od naboja q to je iznos vektora $\vec{E}_i$ manji (kraća strelica) u skladu s gornjom jednadžbom.

Kažemo da naboj q stvara električno polje u svim točkama prostora oko sebe.

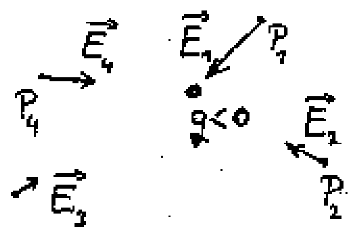
Električno polje u nekoj točki možemo eksperimentalno odrediti tako da u nju dovedemo neki probni naboj q_0 i izmjerimo silu $\vec{F}$ koja djeluje na njega. Tada imamo

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Napomena:

Smatramo da električno polje u danoj točki postoji i onda kada uklonimo probni naboj. Električno polje je svojstvo točke koje je nastalo uslijed naboja q.

Ako je naboj koji stvara električno polje negativan ($q<0$), onda vektor $\vec{E}$ ima suprotan smjer od $\hat{\vec{r}}$.

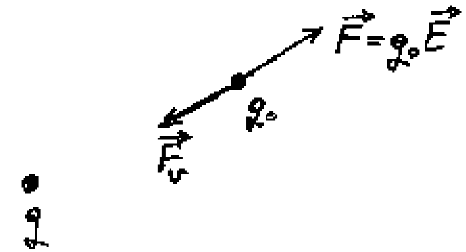


Osvrnimo se još jednom na probni naboj. Ako ga dovedemo u točku prostora u kojoj postoji električno polje $\vec{E}$, na njega će djelovati električna sila

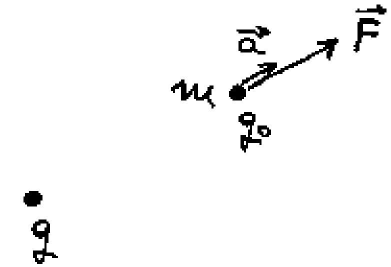
$$\vec{F} = q_0 \vec{E}$$

Ako želimo da tijelo koje nosi probni naboj miruje, moramo na njega djelovati još nekom vanjskom silom $\vec{F}_v$ koja ostvaruje ravnotežu

$$\vec{F} + \vec{F}_v = 0$$



Uklonimo li vanjsku silu $\vec{F}_v$, ostaje električna sila $\vec{F}$ koja daje akceleraciju tijelu s probnim nabojem



Akceleracija ovisi o masi m tijela koje nosi probni naboj u skladu s II. Newtonovim zakonom

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Napomena:

Pogrešno bi bilo reći da je m masa probnog naboja. Probni naboj čini višak ili manjak elektrona na danome tijelu. Masa tih elektrona je puno manja od ukupne mase danog tijela.

2. Princip superpozicije

Umjesto jednog naboja q neka su u danome inercijalnom sustavu postavljena dva nepomična naboja q_1 i q_2.

Promatrajmo sile na probni naboj q_0 smješten u proizvoljnu točku u prostoru oko naboja q_1 i q_2.

Sila $\vec{F}_1$ kojom q_1 djeluje na q_0 ne ovisi o tome postoji li, ili ne, naboj q_2 negdje u okolini, te kolikom silom on djeluje na q_0. Također, sila $\vec{F}_2$ kojom q_2 djeluje na q_0 ne ovisi o q_1.

Ovo temeljno svojstvo neovisnosti vodi nas na princip superpozicije (načelo pridodavanja) po kojemu ukupnu silu na naboj q_0 dobijemo zbrajanjem sila koje uzrokuju pojedini naboji zasebno

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Ako imamo N naboja $q_1, q_2, \dots, q_N$ raspoređenih u prostoru, ukupna sila na q_0 iznosi

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Ako silu na q_0 podijelimo s q_0 dobivamo

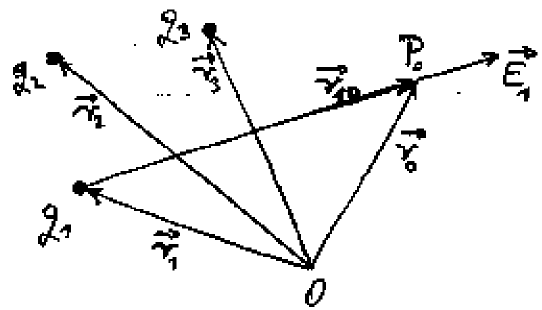
$$\frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{\vec{F}_1}{q_0} + \frac{\vec{F}_2}{q_0} + \dots + \frac{\vec{F}_N}{q_0} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{F}_i}{q_0}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$$

Električno polje u promatranoj točki prostora jednako je zbroju električnih polja koja stvaraju pojedini naboji zasebno. To je princip superpozicije za električno polje.

Opća vektorska jednadžba

Moramo uzeti proizvoljnu točku u prostoru kao ishodište O. Položaji pojedinih naboja određeni su vektorima $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ a točka promatranja je na nekakvom položaju $\vec{r}_0$.



$\vec{r}_{10} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1$

→ oznaka "od 1 do 0"

Naboj q_1 stvara u točki promatranja P_0 električno polje

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_{10}^2} \vec{r}_{10}$$

Naboj q_2 stvara električno polje $\vec{E}_2$ koje ima smjer vektora $\vec{r}_{20} = \vec{r}_0 - \vec{r}_2$, itd.
Ukupno električno polje u točki P_0 iznosi

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_{i0}^2}\hat{r}_{i0}$$

Točku promatranja možemo pomicati u prostoru. Time zapravo mijenjamo iznos i smjer vektora $\vec{r}_0$ pa se mijenjaju i vektori $\vec{r}_{i0}$. Električno polje mijenja svoj iznos i smjer od točke do točke pa kažemo da je ono funkcija od $\vec{r}_0$, tj. $\vec{E}(\vec{r}_0)$ ili $\vec{E}(x_0, y_0, z_0)$ gdje su (x_0, y_0, z_0) koordinate točke P_0 u sustavu $Oxyz$.

Napomena:

Pri tome smatramo da su vektori $\vec{r}_i$ konstantni. Oni određuju položaje naboja q_i koji su fiksni.

Jedinica za električno polje

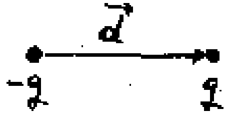
Električno polje smo uveli putem jednadžbe

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Stoga je jedinica za električno polje $1\,NC^{-1}$. Kasnije ćemo vidjeti da se ta jedinica može izraziti na još jedan ekvivalentan način.

3. Primjer električnog dipola

Električni dipol se sastoji od dva naboja jednakih iznosa no suprotnih predznaka na razmaku d jedan od drugoga.



Po dogovoru vektor $\vec{d}$ postavljamo tako da ima smjer od negativnog prema pozitivnome naboju.

Za opis dipola bitna je veličina

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

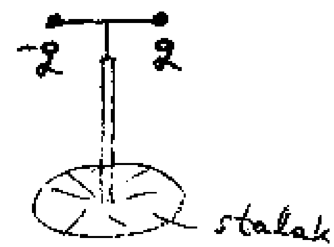
koja se naziva električni dipolni moment.

Versorij

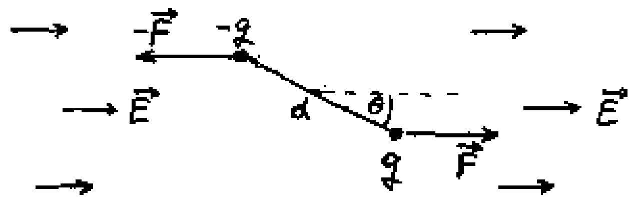
Versorij je maleni električni dipol postavljen na šiljak tako da se može okretati. Služi za ispitivanje električnog polja u nekoj horizontalnoj ravnini.

Pokus:

prikaz versorija

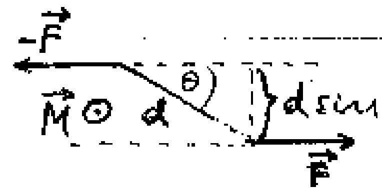


Razmotrimo detaljnije ponašanje električnog dipola u električnom polju.



$$\vec F = q\vec E$$

Električno polje stvaraju neki drugi naboji koji nisu na ovoj slici prikazani. Naboji dipola igraju ovdje ulogu probnih naboja.
Sile $\vec F$ i $-\vec F$ čine par sila koji nastoji zakrenuti dipol oko osi okomite na ravninu crteža. Taj par sila stvara moment sile $\vec M$.



$d\sin\theta$ → razmak između pravaca nositelja para sila

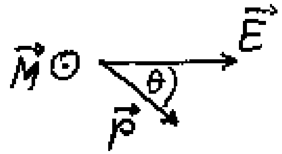
Iznos momenta sile je dan umnoškom

$$M = Fd\sin\theta = qEd\sin\theta$$

Možemo iskoristiti izraz za dipolni moment $\vec p = q\vec d$ i napisati vektorsku relaciju

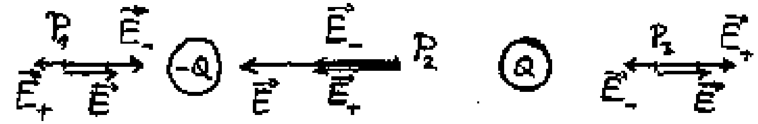
$$\vec M = \vec p \times \vec E$$

Ako se dipolni moment $\vec p$ nalazi u nekom električnom polju $\vec E$ i čini s njime kut θ javlja se moment sile koji ga nastoji zakrenuti duž smjera polja.



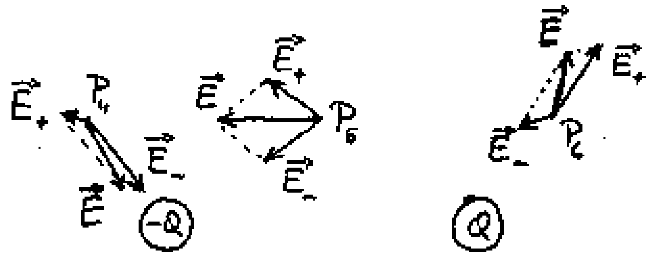
Tek kada se dipolni moment $\vec p$ postavi duž smjera električnog polja $\vec E$, tj. za $\theta = 0$, nestaje moment sila i dipol se više ne zakreće.

Pomoću versorija kao malenog dipola možemo ispitivati električno polje koje stvaraju neki drugi naboji. Uzmimo kao primjer dva veća naboja Q i $-Q$ na većoj udaljenosti (nabijene kugle).
Naboj $-Q$ stvara polje $\vec E_-$ a naboj Q stvara $\vec E_+$.



Primjenom principa superpozicije dobivamo ukupno električno polje $\vec E$ u raznim točkama P_i.
U točkama P_1 i P_3 (točke izvan spojnice naboja) $\vec E$ ima jedan smjer (kao smjer od $-Q$ prema Q) a u točki P_2 (unutar spojnice) smjer $\vec E$ je suprotan.

Razmotrimo neke točke na pravcu koji je paralelan sa spojnicom.



Točka P_5 nalazi se na simetrali spojnice naboja -Q i Q. Polja $\vec{E}_-$ i $\vec{E}_+$ imaju u toj točki jednake iznose. Zbog simetrije problema, rezultantno polje $\vec{E}$ u toj točki paralelno je spojnici naboja.

Pokus:

ispitivanje električnog polja koje stvaraju naboji -Q i Q pomoću versorija

4. Električne silnice

Električno polje $\vec{E}$ mijenja smjer od točke do točke u prostoru. Umjesto crtanja mnoštva vektora zgodno je prikazati promjenu smjera električnog polja pomoću silnica.

Uzmimo opet primjer s nabojima -Q i Q koji stvaraju električno polje $\vec{E}$ oko sebe.

Konstrukciju jedne električne silnice dobivamo na sljedeći način.

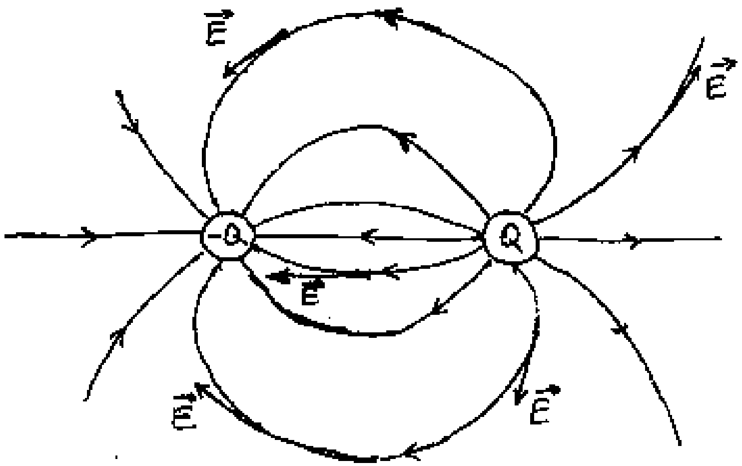
Uzmimo proizvoljno odabranu točku P_0 kao početnu točku. Električno polje u toj točki je $\vec{E}_0$. Krenimo u smjeru $\vec{E}_0$ do neke bliske točke P_1. U toj točki električno polje $\vec{E}_1$ ima neki drugi smjer. Krenimo dalje duž smjera $\vec{E}_1$ do bliske točke P_2. U njoj je polje $\vec{E}_2$, itd.

Povezivanjem točaka P_0, P_1, P_2, itd. dobivamo električnu silnicu. Ako zamislimo da su te točke dovoljno gusto raspoređene, silnica postaje kontinuirana glatka krivulja.

Pokus:

praćenje smjera silnica pomoću versorija

U svakoj točki silnice električno polje je tangencijalno na silnicu. Crtanjem silnice označavamo na posredan način smjerove električnog polja u točkama kroz koje prolazi silnica.



Silnica ima beskonačno puno no obično crtamo samo nekoliko njih da dobijemo zorni prikaz smjerova električnog polja u prostoru.

Za dani broj nacrtanih silnica možemo uočiti njihovo međusobno zbližavanje i udaljavanje. To nam ukazuje na relativnu promjenu jakosti električnog polja.

Na mjestima gdje su dane silnice bliže jedna drugoj (npr. u blizini pojedinog naboja), električno polje $\vec{E}$ ima veći iznos.

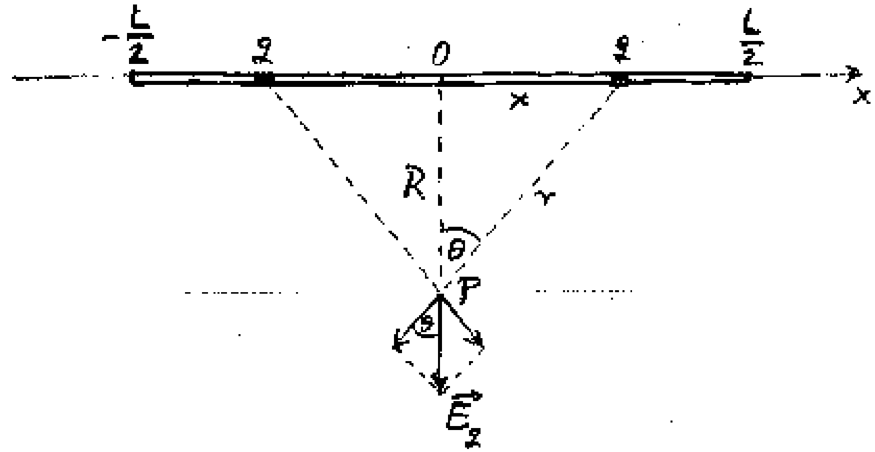
Tamo gdje su te iste silnice udaljenije jedna od druge, iznos polja $\vec{E}$ je manji.

Na taj način odabrani broj silnica daje nam informaciju o relativnoj promjeni iznosa i smjera vektora $\vec{E}$ u prostoru.

5. Pravčasta raspodjela naboja

Neka je ukupni naboj Q jednoliko raspodijeljen na tankome štapu duljine L. Nađimo električno polje u točkama prostora oko štapa.

Riješimo problem na što jednostavniji način uz upotrebu elemenata simetrije. Postavimo os x duž štapa s time da ishodište O bude na sredini štapa.



Najjednostavnije je naći električno polje u točki P koja se nalazi simetrično u odnosu na krajeve štapa.

Naboj Q je jednoliko raspodijeljen duž štapa. Uočimo dio tog naboja q koji se nalazi na udaljenosti x od ishodišta O i isto toliki naboj s druge strane. Ti naboji stvaraju električna polja u točki P.

Zbog simetrije tih polja, vijkove se komponente duž osi x poništavaju a zbrajaju se komponente okomite na štap

$$E_q = 2\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\cos\theta$$

↑ zbog dvaju polja; $\cos\theta$ ← zbog projekcije

Iz crteža nalazimo

$$r^2 = R^2 + x^2 \qquad \cos\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$E_q = 2\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{qR}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

Polje E_q u točki P ovisi o udaljenosti x naboja q od ishodišta O.

Ako želimo naći ukupno polje E u točki P moramo zbrojiti sve doprinose što ih daju naboji raspoređeni duž štapa.

Uvedimo pojam linearne gustoće naboja

$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

To je jednako naboju po jedinici duljine štapa.

Na infinitezimalnom djeliću dx štapa nalazi se infinitezimalni naboj

$$dq = \lambda\,dx$$

Svaki naboj dq i njegov par s druge strane ishodišta stvaraju u točki P infinitezimalno polje

$$dE = 2\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{R\lambda\,dx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

Ukupno polje u točki P dobivamo integriranjem (zbrajanjem) svih infinitezimalnih polja dE

$$E = \int dE = \int_0^{\frac{L}{2}} 2\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{R\lambda}{(R^2+x^2)^{3/2}}\,dx$$

Napomena:

Integriramo samo od 0 do $\frac{L}{2}$ jer smo drugu stranu štapa već uključili putem faktora 2.

Iz tablica integrala je poznato

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{(R^2+x^2)^{3/2}} = \left.\frac{x}{R^2\sqrt{R^2+x^2}}\right|_0^{\frac{L}{2}} = \frac{\frac{L}{2}}{R^2\sqrt{R^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}}$$

Ukupno polje u točki P iznosi

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda}{R}\,\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}}$$

Ovaj izraz vrijedi analizirati u posebnim slučajevima.

Zamislimo da je duljina štapa L sve veća no istodobno neka i ukupni naboj Q bude veći tako da linijska gustoća naboja $\lambda = \frac{Q}{L}$ ostane neizmijenjena.

Račun granične vrijednosti daje

$$\lim_{L\to\infty} \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}} = 1$$

Stoga za električno polje u točki P dobivamo

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}}$$

To je izraz za električno polje koje stvara pravčasta raspodjela naboja (idealizacija).

Električno polje je manje u točkama koje su udaljenije od pravčaste raspodjele naboja (ovisnost $\frac{1}{R}$).

U svim točkama prostora električno polje ima smjer <u>okomit</u> na pravčastu raspodjelu naboja.

<u>Pokus</u>:

ispitivanje električnog polja u okolini pravčaste raspodjele naboja pomoću versorija

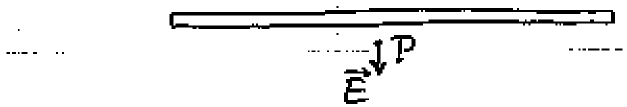
Beskonačno dugačak štap je idealizacija. Vratimo se rješenju za štap konačne duljine L.

Ako se točka promatranja P odabere blizu štapa toliko da je $R \ll \frac{L}{2}$ imamo

$$\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}} \xrightarrow[\text{za } R \ll \frac{L}{2}]{} 1$$

Taj rezultat opet daje za električno polje

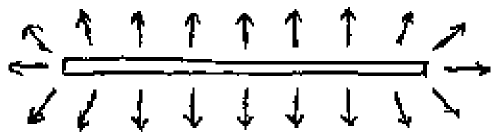
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$



Fizikalni razlog leži u tome da u stvaranju polja $\vec{E}$ u točki P blizu štapa najveći doprinos daju oni naboji koji su najbliži točki P.

Udaljeni naboji raspoređeni na krajevima štapa daju zanemariv doprinos u točki P. Štap bi mogao biti i dulji a da to ne utječe na iznos polja $\vec{E}$ u točki P, tj. štap se doimlje kao da je beskonačan.

U dosadašnjem razmatranju točka P je bila na udaljenosti R okomito od središta štapa.
Isto fizikalno zaključivanje vrijedi za bilo koju drugu točku sa strane s time da je njena udaljenost od štapa mnogo manja od njene udaljenosti od kraja štapa.



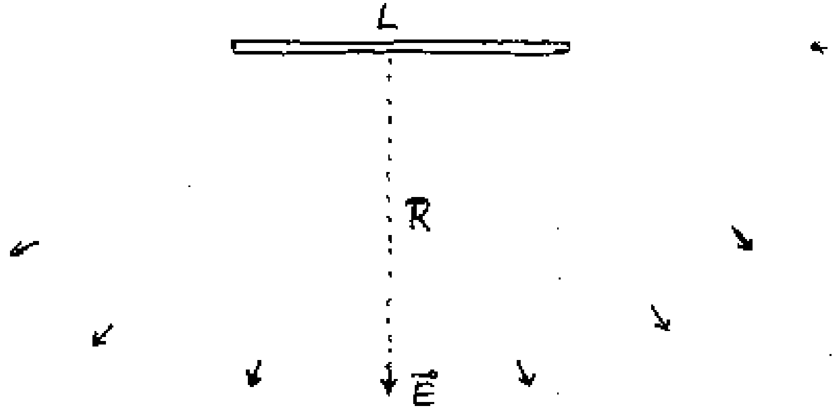
Na stvaranje električnog polja u nekoj točki najveći utjecaj imaju oni naboji koji su najbliži. Daleko od kraja štapa, imamo polje kao da je štap beskonačan. Tek blizu krajeva štapa dobivamo drukčije ponašanje.

Pokus:

ispitivanje električnog polja u okolini nabijenog štapa konačne duljine

također promatranje na velikoj udaljenosti od štapa

Ako točke promatranja udaljimo od štapa više nego je njegova duljina $R>L$, onda svi naboji na štapu daju približno jednake doprinose električnom polju.



U točkama sa strane električno polje mijenja smjer.
Za velike udaljenosti R nalazimo

$$\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}} \xrightarrow[\text{za } R\gg \frac{L}{2}]{} \frac{L}{2R}$$

$$E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\frac{L}{2R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$$

Gledano iz velike daljine doimlje se kao da je cjelokupan naboj štapa Q skupljen u jednu točku na udaljenosti R.

6. Ravninska raspodjela naboja

Neka je ukupni naboj Q jednoliko raspodijeljen na površini kružne ploče površine A. Uvodimo pojam površinske gustoće naboja

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

Ova veličina nam kazuje koliko se naboja nalazi na jedinici površine.

Pokus:

ispitivanje električnog polja oko ravninske raspodjele naboja

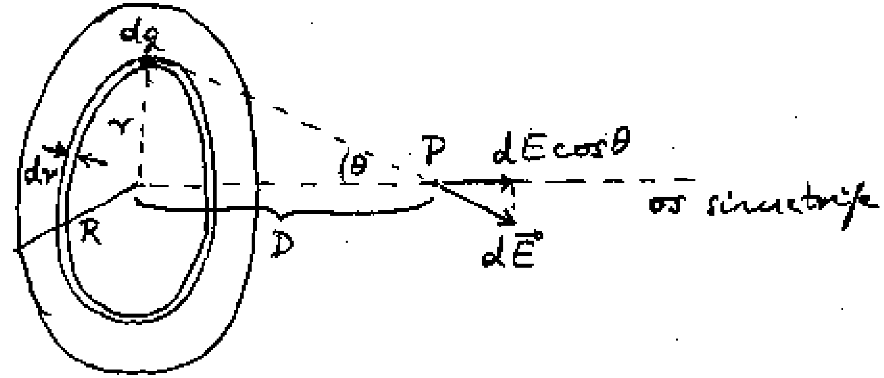
Poučeni iskustvom s pravčastom raspodjelom naboja možemo izvući sljedeće zaključivanje:

a) Ako je točka promatranja blizu ploče a daleko od njenog ruba, ploča će se doimati kao da je beskonačna ravnina. Električno polje u takvoj točki je okomito na nabijenu ploču.

b) Blizu ruba ploče električno polje se otklanja od okomice.

c) Na velikoj udaljenosti od ploče električno polje se ponaša kao da je cjelokupan naboj ploče Q približno u jednoj jako udaljenoj točki.

Matematički izračun električnog polja možemo izvršiti za točku na osi simetrije kruga.



Točka promatranja P nalazi se na udaljenosti D od središta kruga.

Zamislimo na ploči jedan kružni vijenac radijusa r i širine dr. Na jednome njegovom segmentu nalazi se infinitezimalni naboj dq koji u točki P stvara infinitezimalno polje

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{D^2+r^2}$$

Za svaki naboj dq postoji isto takav naboj na suprotnoj strani kružnog vijenca koji daje u točki P polje $d\vec{E}$ otklonjeno za kut θ na drugu stranu od osi simetrije. Stoga se komponente okomite na os simetrije poništavaju.

Zbrajamo samo komponente duž osi simetrije, tj.

$$dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{D^2+r^2}\frac{D}{\sqrt{D^2+r^2}}$$

Zbog rotacijske simetrije, svi segmenti kružnog vijenca jednako su udaljeni od ~~točke~~ P. Stoga možemo zbrojiti cjelokupni naboj na kružnome vijencu koji iznosi

$$\sigma\cdot\underbrace{2r\pi\,dr}_{\text{površina kružnog vijenca}}$$

Konačno moramo zbrojiti (integrirati) doprinose svih kružnih vijenaca od središta kruga do radijusa R pa je ukupno polje u ~~točki~~ P

$$E = \int_0^R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma 2r\pi\,dr}{D^2+r^2}\frac{D}{\sqrt{D^2+r^2}}$$

Iz integralnog računa dobivamo

$$\int_0^R \frac{r\,dr}{(D^2+r^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{D^2}} - \frac{1}{\sqrt{D^2+R^2}}$$

Konačni rezultat za polje glasi

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{D}{\sqrt{D^2+R^2}}\right)$$

Ako zamislimo da ploča ima sve veći i veći radijus R, dobivamo

$$\lim_{R\to\infty}\frac{D}{\sqrt{D^2+R^2}} = 0$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Ovo je rezultat za beskonačnu ravninsku raspodjelu naboja. Električno polje ne ovisi o udaljenosti D točke promatranja od ravnine u kojoj je raspodijeljen naboj.

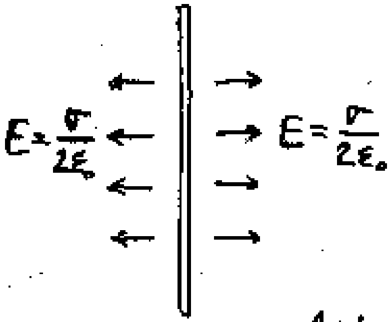
No isti rezultat za polje dobivamo i ako je radijus R konačan ali točku promatranja uzmemo blizu kruga $(D \ll R)$

$$\frac{D}{\sqrt{D^2+R^2}} \xrightarrow[\text{za } D\ll R]{} \frac{D}{R} \ll 1$$

U potpunome izrazu za polje E možemo tada zanemariti drugi član u zagradi prema prvome pa je opet $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

Prema tome, ako se točka promatranja nalazi blizu ploče a daleko od njena ruba električno polje je kao da je ploča beskonačno velika.

Električno polje postoji s obje strane nabijene ploče. Gledajući bočno imamo sljedeći prikaz.



nabijena ploča
(okomita na ravninu crteža)

Električno polje ima isti iznos s obje strane ploče ali suprotan smjer.

Ako je naboj ploče pozitivan ($\sigma > 0$) električno polje ide od ploče a u slučaju negativnog naboja ($\sigma < 0$) prema ploči.

Važno zapažanje:

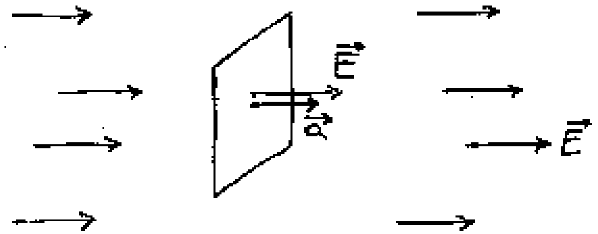
Postojanje ravninske raspodjele naboja gustoće σ dovodi do toga da se stvori vektorski različito (po smjeru) električno polje s jedne i druge strane ploče a razlika iznosi

$$\boxed{\Delta E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

3. GAUSSOV ZAKON

1. Pojam toka električnog polja

Uvedimo pojam toka električnog polja na najelementarnijem primjeru.



Neka u nekome prostoru postoji homogeno električno polje. Njega su stvorili neki naboji u blizini (npr. neka ravninska raspodjela naboja) koji nisu prikazani na slici.

Razmotrimo jednu zamišljenu ravnu plohu u tome prostoru. Pridružimo toj plohi vektor $\vec{a}$ koji je okomit na plohu a iznos mu odgovara površini plohe.

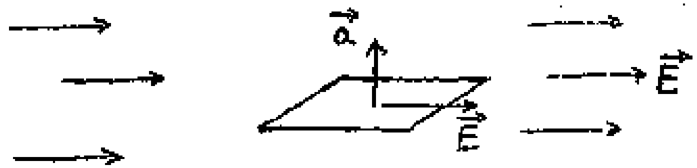
Tok električnog polja $\vec{E}$ kroz površinu predstavljenu vektorom $\vec{a}$ definira se kao skalarni produkt

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{a}$$

Ako je ploha postavljena okomito na $\vec{E}$ kao na prethodnoj slici, onda je

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{a} = E a \underbrace{\cos 0^\circ}_{=1} = E a$$

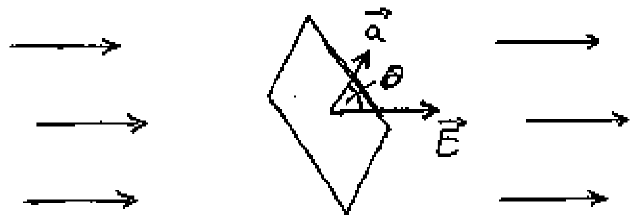
Možemo zamisliti i slučaj u kojemu je ploha paralelna s $\vec{E}$



$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{a} = E a \underbrace{\cos 90^\circ}_{=0} = 0$$

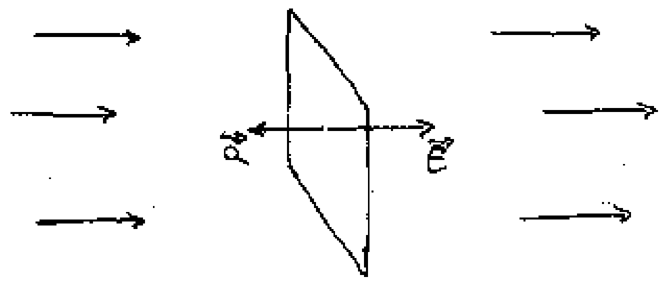
Tok električnog polja kroz ovu površinu je nula.

U općenitom slučaju imamo



$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{a} = E a \cos\theta$$

Tok električnog polja je pozitivan ako su $\vec{E}$ i $\vec{a}$ u istom smjeru. Međutim, ako su u suprotnom smjeru, tok je negativan.



$$\Phi = \vec{E}\cdot\vec{a} = Ea\underbrace{\cos 180^\circ}_{=-1} = -Ea$$

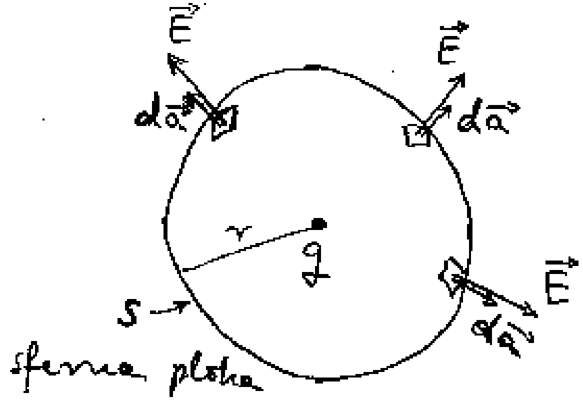
Vektor $\vec{a}$ je okomit na površinu no smjer se može odabrati bilo na jednu ili drugu stranu. Najprije se napravi izbor jedne od tih dviju mogućnosti a zatim se ustanovi je li tok uz tako izvršeni izbor za vektor $\vec{a}$ pozitivan ili negativan. (Primjeri će biti dani u sljedećima odjeljcima.)

Napomena:

Riječ "tok" podsjeća na tok neke tekućine gdje se gibaju dotične molekule tvari. Kod električnog toka se ništa ne giba. Polje $\vec{E}$ ima stalnu vrijednost u točkama prostora.

2. Električni tok koji nastaje od jednog naboja

Neka se u prostoru nalazi točkasti naboj q. Razmotrimo tok električnog polja koje stvara taj naboj kroz jednu zamišljenu sfernu plohu sa središtem na mjestu naboja.



Cijelu sfernu plohu možemo podijeliti u mnoštvo malenih površina. Svaku od njih možemo smatrati da je praktički ravna i stoga postaviti vektor $d\vec{a}$ okomit na nju.

Tok električnog polja kroz jednu malenu površinu iznosi

$$d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{a} = E\,da\underbrace{\cos 0^\circ}_{=1} = E\,da$$

Uvijek uzimamo električno polje na mjestu neke površine i množimo ga s vektorom koji predstavlja tu istu površinu.

Idući od jedne malene površine na sfernoj plohi do druge, vektor $\vec{E}$ mijenja smjer no isto tako i $d\vec{a}$ tako da su uvijek međusobno paralelni.

Ukupan električni tok kroz sfernu plohu dobivamo zbrajanjem (integriranjem) tokova kroz sve malene površine

$$\Phi = \oint_S d\Phi = \oint_S E\,da$$

Simbol $\oint$ označava da se integriranje (zbrajanje) obavlja po zatvorenoj plohi, tj. po plohi koja u cijelosti obavija neki zamišljeni volumen.

U slučaju sferne plohe električno polje ima isti iznos na svim dijelovima površine tako da E možemo izlučiti kao konstantu ispred znaka integrala

$$\Phi = E\oint da = E\cdot 4\pi r^2$$

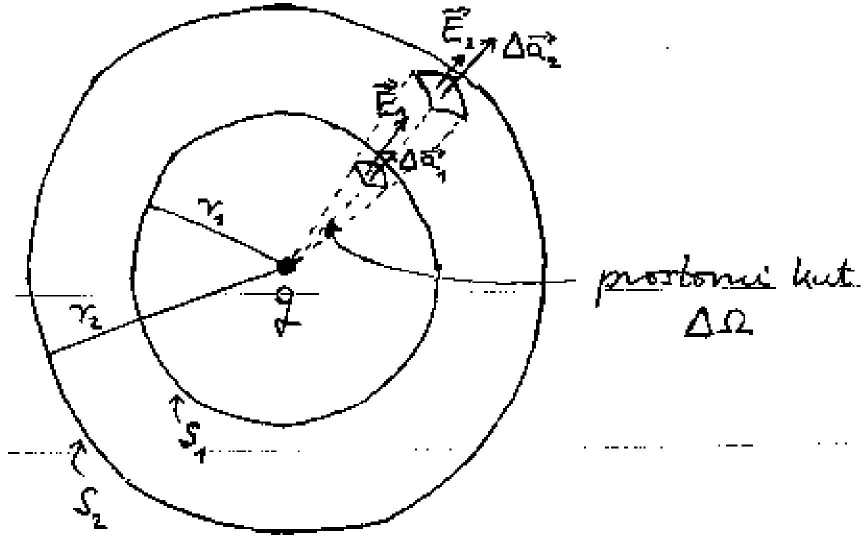
Zbrajanjem (integriranjem) svih površina da dobivamo ukupnu površinu sfere $4\pi r^2$.

Uzimajući u obzir iznos električnog polja koje stvara naboj q na udaljenosti r

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Vidimo da ukupni električni tok kroz zamišljenu sfernu plohu ne ovisi o radijusu. To je izravna posljedica toga što polje E opada s kvadratom udaljenosti $\left(\frac{1}{r^2}\right)$ od točkastog naboja.

Razmotrimo dvije koncentrične sferne plohe oko naboja q.



Ukupni električni tok kroz sfernu plohu S_1 jednak je onome kroz plohu S_2.

Ako površine Δa_1 i Δa_2 razapinju isti prostorni kut $\Delta\Omega$, onda vrijedi omjer

$$\frac{\Delta a_1}{4\pi r_1^2} = \frac{\Delta a_2}{4\pi r_2^2}$$

← dio sferne površine

← ukupna površina

Očito je da odgovarajuće površine rastu s kvadratom radijusa

$$\frac{\Delta a_1}{\Delta a_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

S druge strane, električno polje opada s kvadratom radijusa

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

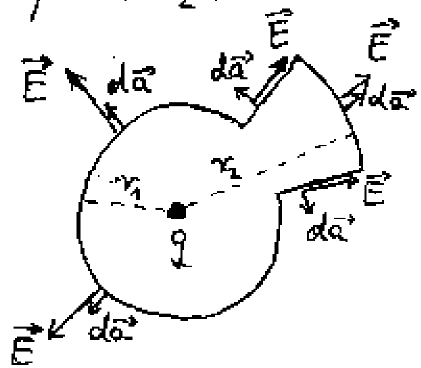
(Porast površine Δa_2 i smanjenje polja E_2 prikazani su na prethodnoj slici.)

Kao rezultat ovih odnosa, električni tok kroz Δa_1 jednak je onome kroz Δa_2

$$\Delta\Phi = \vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{a}_1 = \vec{E}_2 \cdot \Delta\vec{a}_2$$

Stoga možemo zamisliti zatvorenu ploku oko naboja q koja leži jednim dijelom na sferi radijusa r_1 a drugim dijelom na sferi radijusa r_2.

prikaz u presjeku



Kod ovako zatvorene plohe pojavljuje se i plašt koji spaja dijelove sfernih ploha. Ploha plašta je radijalna tako da je na svakome mjestu plašta $\vec{E}$ paralelno s plohom plašta. Stoga je $\vec{E} \cdot d\vec{a} = 0$ na svakome dijelu površine plašta, tj. nema električnog toka kroz plašt.

Električni tok kroz dio sferne plohe radijusa r_2 jednak je toku koji bismo imali da smo zatvorenu plohu ostvarili odgovarajućim dijelom sferne plohe radijusa r_1.

Prema tome, ukupni električni tok kroz ovako odabranu zatvorenu plohu oko naboja q jednak je onome kroz jednu jedinu sfernu plohu.

Napomena:

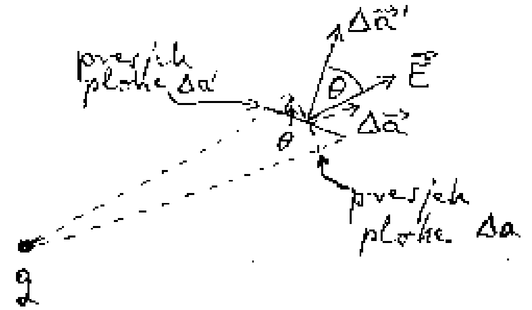
Smjer vektora $d\vec{a}$ uzimamo dogovorno tako da uvijek izlazi iz volumena koji je obuhvaćen danom zatvorenom plohom.

Ako je $\vec{E}$ u smjeru $d\vec{a}$, tok je pozitivan, tj. $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{a} > 0$. Tada kažemo da električni tok izlazi iz volumena.

Da je u prethodnom primjeru odabran negativan naboj, električno polje bi imalo suprotan smjer pa bi električni tok bio negativan $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{a} < 0$. Rekli bismo da električni tok ulazi u volumen.

Razmotrimo električni tok kroz plohu $\Delta\vec{a}'$ koja je nagnuta za kut θ u odnosu na dio sferne plohe $\Delta\vec{a}$.

prikaz u presjeku



Ako površinu $\Delta a'$ projiciramo na sfernu plohu dobivamo upravo plohu Δa

$$\Delta a' \cos\theta = \Delta a$$

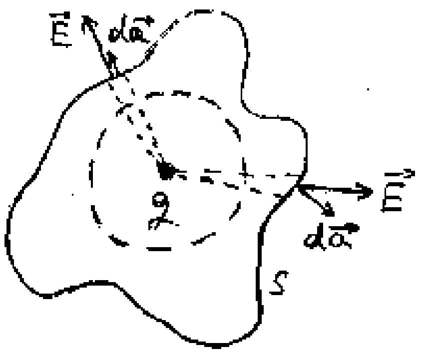
Stoga je električni tok kroz obje površine jednak

$$\vec{E}\cdot\Delta\vec{a}' = E\,\Delta a' \cos\theta = E\,\Delta a = \vec{E}\cdot\Delta\vec{a}$$

Važno je da obje površine $\Delta a'$ i Δa zatvaraju isti prostorni kut gledano iz položaja naboja q.

Bilo koju zatvorenu plohu možemo podijeliti na mnoštvo sitnih ploha i zbrojiti odgovarajuće tokove električnog polja. Cjelokupna zatvorena ploha zatvara puni prostorni kut 4π kao i sferna ploha.

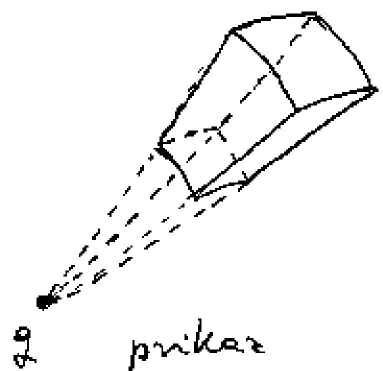
Dolazimo do zanimljivog zaključka. Tok električnog polja kroz zatvorenu plohu unutar koje se nalazi naboj q ne ovisi o obliku plohe, tj. isti je kao da je ploha sferna.



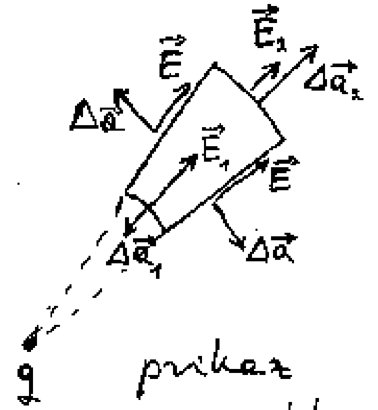
$$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Što dobivamo ako se naboj q nalazi izvan zatvorene plohe?

Razmotrimo najprije jednostavnu zatvorenu plohu između dvaju sfernih segmenata



prikaz u perspektivi



prikaz u presjeku

Vektor površine $\Delta\vec{a}$ na zatvorenoj plohi uvijek ima smjer prema van iz volumena koji je zahvaćen.

Budući da $\Delta\vec{a}_1$ ima suprotan smjer od $\vec{E}_1$, tok električnog polja kroz tu plohu je negativan

$$\Delta\Phi_1 = \vec{E}_1\cdot\Delta\vec{a}_1 = -E_1\Delta a_1$$

To je tok koji ulazi u zatvoreni volumen. S druge strane, $\Delta\vec{a}_2$ ima isti smjer kao $\vec{E}_2$ pa je tok kroz tu plohu pozitivan

$$\Delta\Phi_2 = \vec{E}_2\cdot\Delta\vec{a}_2 = E_2\Delta a_2$$

Taj tok izlazi iz zatvorenog volumena.

Kroz bočne plohe tok je nula ($\Delta\vec{a}$ okomito na $\vec{E}$, tj. $\vec{E}\cdot\Delta\vec{a} = 0$) što znači da kroz bočne plohe električni tok niti ulazi niti izlazi iz zatvorenog volumena.

Možemo preuzeti prijašnji rezultat po kojemu su iznosi tokova jednaki, tj. $E_1\Delta a_1 = E_2\Delta a_2$, pa je ukupni tok kroz zatvorenu plohu

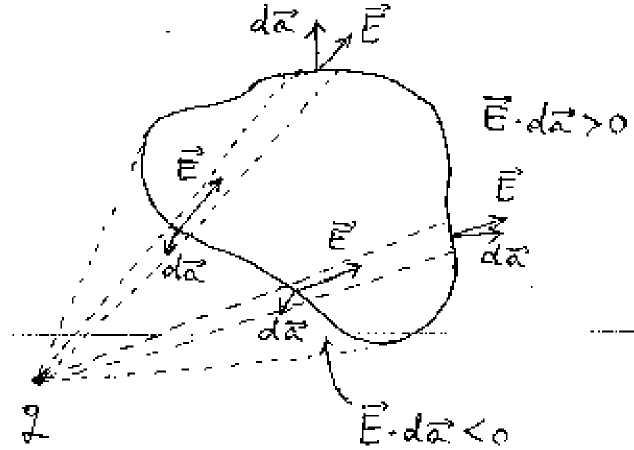
$$\Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 = 0$$

U ovome primjeru tok koji ulazi u zatvoreni volumen jednak je onome koji iz njega izlazi tako da je algebarski zbroj tokova jednak nuli.

Isti rezultat dobivamo i ako uzmemo plohu $\Delta\vec{a}'$ koja je nagnuta za neki kut θ u odnosu na dio sferne plohe $\Delta\vec{a}$. Dokaz je isti kao što smo ranije pokazali.

Razmotrimo sada bilo koju zatvorenu plohu i naboj q izvan nje.

prikaz u presjeku



Tok koji ulazi u zatvorenu plohu (negativan tok) jednak je po iznosu toku koji izlazi iz nje (pozitivan tok). Ukupan tok kroz zatvorenu plohu od naboja izvan nje jednak je nuli

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = 0$$

3. Gaussov zakon

Ako imamo više naboja možemo primijeniti princip superpozicije.

Naboji q_1 i q_2 koji se nalaze unutar zatvorene plohe stvaraju na toj plohi ukupni tok

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0}$$

Naboj q_3 izvan plohe ne daje rezultantni tok kroz tu plohu.

Općenito uzevši, tok električnog polja kroz bilo koju zatvorenu plohu jednak je ukupnom naboju koji se nalazi unutar te plohe podijeljenom s ε_0.

$$\boxed{\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

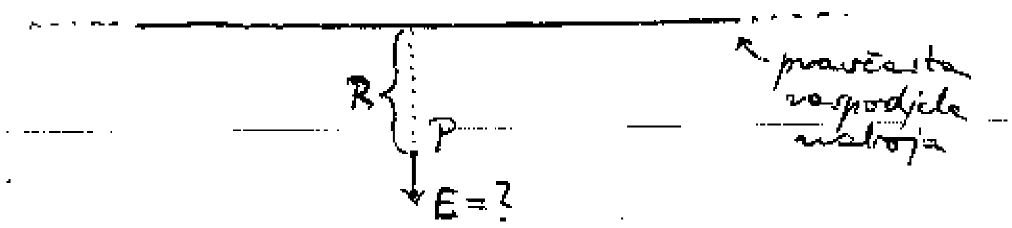
To je <u>Gaussov zakon</u>. Kod zbrajanja se uzima u obzir predznak naboja (algebarsko zbrajanje).

4. Neke primjene Gaussova zakona

Gaussov zakon je vrlo koristan kada se želi odrediti električno polje koje nastaje uslijed neke simetrične raspodjele naboja. Razmotrimo neke takve slučajeve.

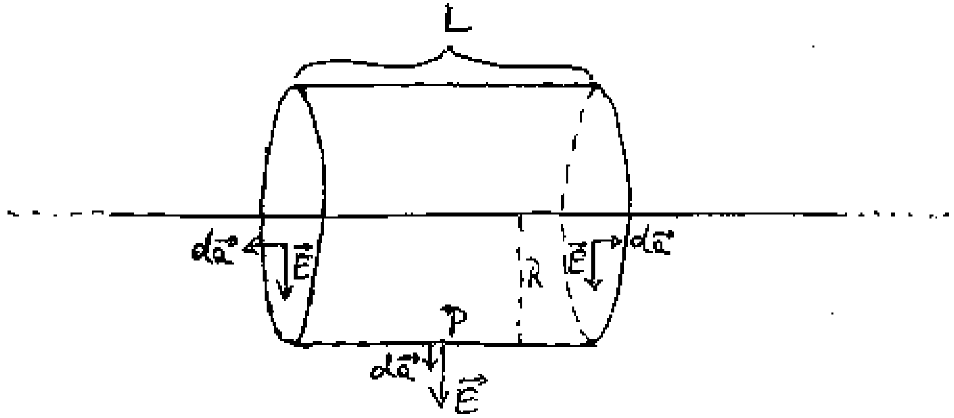
a) Pravčasta raspodjela naboja

Već smo u prethodnom poglavlju riješili ovaj problem putem integriranja. Riješimo ga sada primjenom Gaussova zakona.



Koliko je električno polje u točki P?

Za primjenu Gaussova zakona potrebno je zamisliti neku po volji odabranu zatvorenu plohu. No, ako želimo lagano doći do rješenja za polje u točki P, moramo izabrati upravo takvu zatvorenu plohu koja maksimalno slijedi simetriju problema.



Zamislimo valjak radijusa R tako da točka P leži na plaštu valjka. Zbog rotacijske simetrije električno polje ima isti iznos u svim točkama na plaštu. Budući da su na plaštu $\vec{E}$ i $d\vec{a}$ paralelni, imamo tok kroz plašt

$$\Phi = \int_{plašt} E\,da = E \cdot \underbrace{2R\pi L}_{\text{površina plašta}}$$

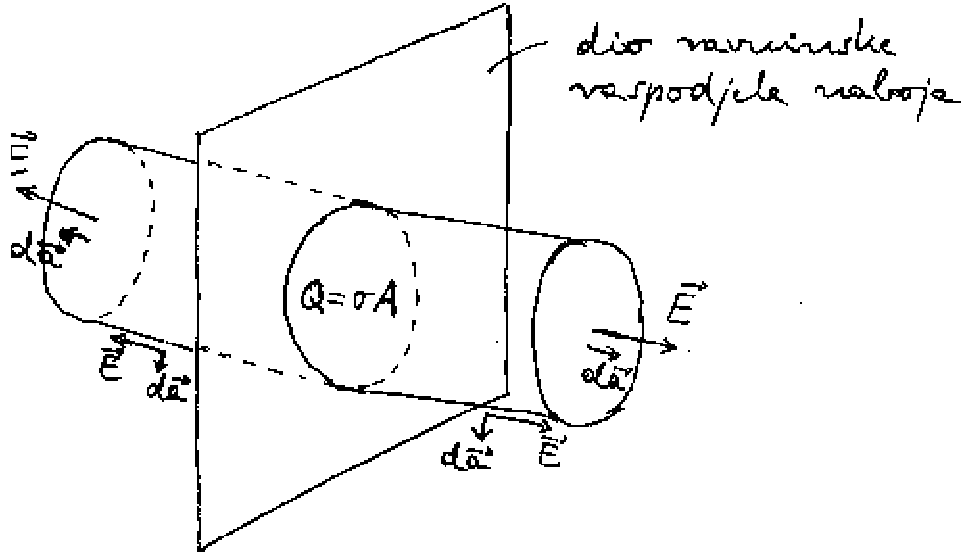
Na bazama valjka su $\vec{E}$ i $d\vec{a}$ okomiti pa je tok kroz baze nula. Stoga je prema Gaussovu zakonu

$$\Phi = E \cdot 2R\pi L = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}}$$

Dobili smo isti rezultat kao ranije.

b) Ravninska raspodjela naboja



Za primjenu Gaussova zakona odaberimo površinu valjka kojemu su baze paralelne s ravninom u kojoj su naboji i jednako udaljene od nje na suprotne strane. Tok kroz plašt valjka je nula zbog $\vec{E}\cdot d\vec{a} = 0$. Na bazama valjka polje ima isti iznos pa je ukupni tok

$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \underset{\text{dvije baze}}{2}\,E\,\underset{\text{površina baze}}{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

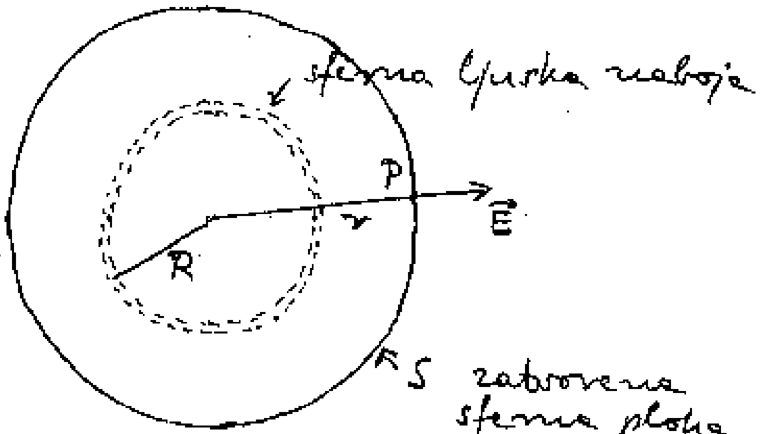
$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Ovaj izvod je mnogo jednostavniji od prijašnjega.

c) Sferna ljuska naboja

Neka su naboji jednoliko raspoređeni u obliku neke sferne ljuske radijusa R.

prikaz u presjeku



Koliko je električno polje u točki P?

Svi naboji u sfernoj ljusci doprinose ukupnome polju u točki P. No račun putem integriranja (zbrajanja) tih doprinosa bio bi jako kompliciran.

Odaberimo zatvorenu sfernu plohu koja prolazi kroz točku P i primijenimo Gaussov zakon. Zbog simetrije problema električno polje ima isti iznos na svim mjestima sferne plohe pa je ukupni tok

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = E\cdot \underbrace{4\pi r^2}_{\text{površina sferne plohe}} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \leftarrow \text{ukupni naboj sferne ljuske}$$

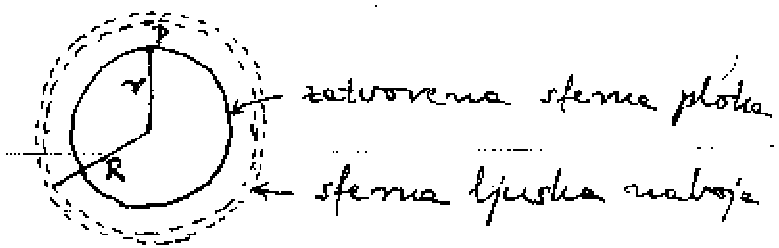
U Gaussovom zakonu smo uzeli sve naboje koji se nalaze unutar zatvorene plohe bez obzira na njihov prostorni raspored.

Iz dobivenog rezultata slijedi

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad \text{za } r > R$$

U točki prostora izvan sferne ljuske naboja ($r > R$) električno polje je jednako kao da je cjelokupan naboj ljuske Q smješten u njeno središte.

Kakvo je električno polje u nekoj točki unutar sferne ljuske naboja?



Svi dijelovi naboja sferne ljuske stvaraju doprinose električnom polju u točki P. Iz simetrije se vidi da električno polje u točki P može imati samo radijalan smjer. (Sa svake strane se nalazi jednaka količina naboja, tj. polovica sferne ljuske.)

Pretpostavimo da u točki P postoji neko električno polje E. Zbog simetrije moralo bi postojati polje istog iznosa u svim točkama na zatvorenoj sfernoj plohi koja prolazi kroz točku P.

Međutim, Gaussov zakon daje

$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = E\cdot 4\pi r^2 = 0$$

Električni tok kroz tu zatvorenu sfernu plohu mora biti nula jer unutar nje nema nikakvih naboja.

Iz ovog rezultata slijedi nužno

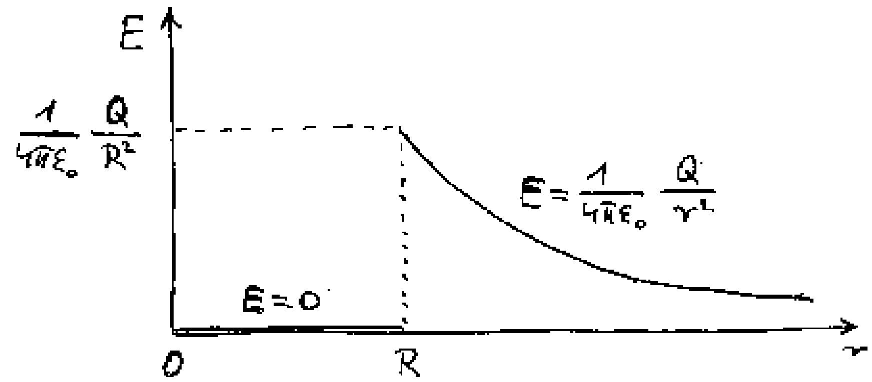
$$E = 0 \quad \text{za} \quad r < R$$

U bilo kojoj točki unutar sferne ljuske naboja ($r<R$) električno polje iščezava.

Napomena:

Pojedini naboji u sfernoj ljusci stvaraju zasebno električno polje u proizvoljnoj točki P. Međutim vektorski zbroj svih tih polja je nula.

Prikažimo ovisnost električnog polja o udaljenosti točke promatranja od središta.



Na prijelazu iz unutrašnjosti sferne ljuske prema vani električno polje doživi skok

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$$

Ovaj rezultat možemo izraziti putem površinske gustoće naboja ljuske

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

← ukupni naboj ljuske

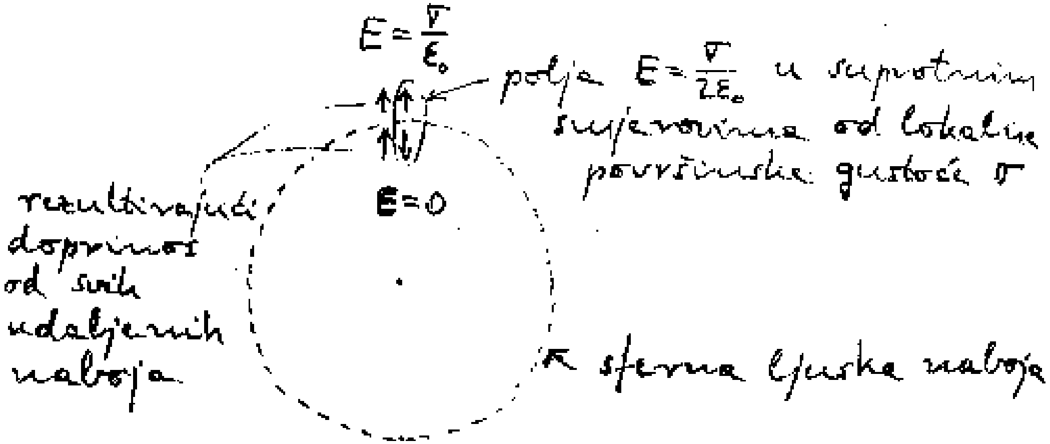
← ukupna površina ljuske

Uvrštavanjem dobivamo

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi R^2\sigma}{R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

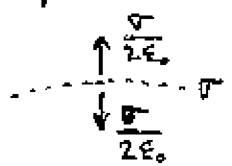
Ovo je rezultat koji smo imali i za skok polja prolaskom kroz ravninsku raspodjelu naboja.

Razmotrimo još jednom doprinose električnom polju tik ispod ljuske i tik iznad ljuske naboja.



U točkama koje su dovoljno blizu sfernoj ljusci naboja lokalna površina izgleda gotovo kao da je ravna. Stoga ti naboji daju polje $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ na suprotne strane.

Kada bi ljuska bila ograničena na manji segment, to polje bi bilo jedino koje postoji.



Međutim, kod potpune sferne ljuske naboja postoji i doprinos svih udaljenih naboja. On je praktički isti po iznosu i smjeru u točkama tik ispod i tik iznad ljuske.

Može li sferna ljuska naboja biti stabilna?

Istoimeni naboji se odbijaju pa bi se ljuska razišla u prostoru kada bi se ti naboji mogli slobodno kretati.

Sfernu ljusku naboja možemo ostvariti npr. jednolikim trljanjem površine neke plastične kugle. Naboji su tada vezani uz površinu i ne mogu se razići u okolni prostor.

Na temelju prethodnog razmatranja možemo zaključiti kolika sila djeluje na pojedini naboj q na površini kugle. Svi udaljeni naboji stvaraju na mjestu promatranog naboja polje $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ tako da je sila

$$F = qE = q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Bliski naboji stvaraju električno polje koje ima suprotne smjerove tik ispod i tik iznad ljuske. Očito na samoj ljusci to polje mora biti jednako nuli.

Drugim riječima, okolni naboji djeluju na promatrani naboj silama koje leže u tangencijalnoj ravnini a zbog jednolikog rasporeda tih naboja u krugu oko promatranog naboja vektorski zbroj sila na promatrani naboj je nula.

Promatrani naboj q može predstavljati npr. jedan atom kojemu nedostaje jedan elektron pa ima pozitivan elementarni naboj.

Svi ostali naboji na površini nabijene kugle djeluju na promatrani naboj silom $F = q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ od površine prema vani.

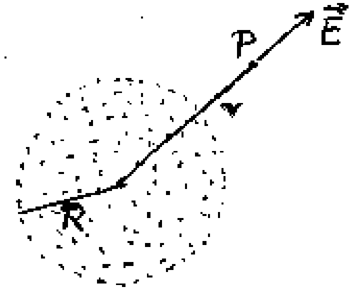
Međutim, susjedni atomi imaju kemijske veze s promatranim atomom pa mogu kompenzirati silu drugih naboja. Stoga promatrani naboj ostaje vezan uz površinu kugle.

Ako se radi o višku elektrona na atomu (negativni naboj) možemo reći da sila drugih naboja djeluje na taj elektron no on se ne može odvojiti od površine jer ga jače privlači jezgra atoma.

d) Jednolika raspodjela naboja u sferi

Neka je unutar sfere radijusa R jednoliko raspodijeljen ukupni naboj Q. Tada je volumna gustoća naboja

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$



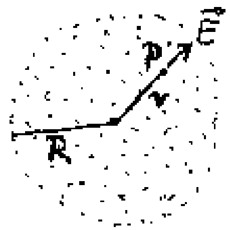
Čitavu sferu možemo zamišljeno podijeliti na niz sfernih ljuski kao slojeva počevši od središta do radijusa R.

Svaka sferna ljuska naboja stvara u točki P izvan ljuske električno polje kao da je cijeli naboj ljuske smješten u njeno središte.

Ako je točka P izvan sfere ($r>R$), tj. izvan svih zamišljenih ljuski, ukupno električno polje dobivamo kao da je cjelokupni naboj Q sfere smješten u njeno središte

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad \text{za } r>R$$

Razmotrimo i točku promatranja negdje unutar sfere ($r<R$).



Točka P se nalazi unutar svih zamišljenih ljuski kojima je radijus veći od r. Stoga je doprinos tih ljuski električnome polju u točki P jednak nuli.
Zamišljene ljuske kojima je radijus manji od r daju električno polje u točki P kao da im je naboj smješten u središte. Ukupni naboj unutar radijusa r iznosi

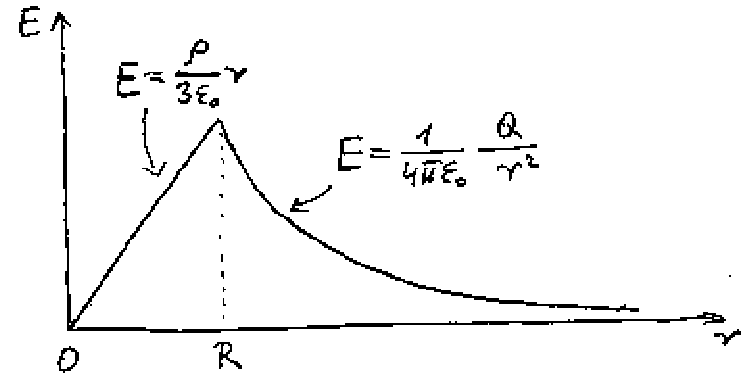
$$q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

Stoga je električno polje u točki P

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

Ako točku P udaljavamo od središta električno polje linearno raste. To je posljedica povećanja relevantnog naboja s r^3 koje nadvlada opadanje polja s $\frac{1}{r^2}$.

Prikažimo ovisnost električnog polja o udaljenosti točke promatranja P od središta.



Možemo li eksperimentalno ostvariti jednoliku raspodjelu naboja u sferi?

Ako trljanjem naelektriziramo plastičnu kuglu, naboji ostaju na površini. (Na izolatoru naboji se ne mogu pomicati.)

Dovedemo li naboje na metalnu kuglu oni bi se u vodiču mogli pomicati i eventualno se jednoliko rasporediti u volumenu kugle.
Međutim to se ne događa. Naime, kada bi se ostvarila jednolika raspodjela naboja unutar kugle, postojalo bi električno polje $E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$ u nekoj točki na udaljenosti r od središta. To znači da bi na naboj q u toj točki djelovala sila $F = qE$ i tjerala ga prema površini kugle.

Drugim riječima, na svaki naboj q koji je dio jednolike raspodjele naboja u sferi djeluju drugi naboji ukupnom silom koja ga tjera prema površini kugle.

Vidimo da je zamišljena jednolika raspodjela naboja u metalnoj sferi nestabilna.
U kasnijem poglavlju odgovorit ćemo na pitanje kakva je raspodjela stabilna.

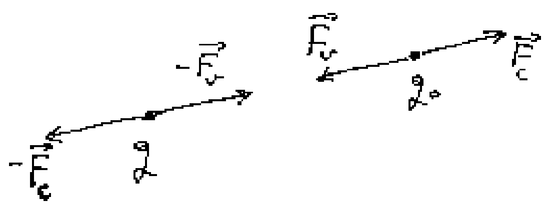
Jednolika raspodjela naboja nije realistična.
Ipak smo je proučavali da bismo utvrdili kakve bi posljedica ona imala. Jedino tako možemo ustanoviti zašto je zapravo nerealistična.

4. ELEKTRIČNA POTENCIJALNA ENERGIJA I POTENCIJAL

1. Električna potencijalna energija

Pojam potencijalne energije smo uveli u mehanici. Potencijalna energija se javlja u sustavima gdje postoje unutarnje konzervativne sile. Primjeri su se odnosili na elastičnu potencijalnu energiju rastegnute opruge i gravitacijsku potencijalnu energiju.

U sustavu električnih naboja unutarnje sile su električne prirode (Coulombova sila). Razmotrimo sustav dvaju naboja q i q_0 (neka su oba pozitivna) u mirovanju



Naboj q djeluje na q_0 Coulombovom silom $\vec{F}_c$, a q_0 djeluje na q silom reakcije $-\vec{F}_c$ u skladu s III. Newtonovim zakonom. To su unutarnje sile sustava dvaju naboja.

Ako želimo da naboji miruju u prostoru, moramo pomoću vanjskih sila $\vec{F}_v$ i $-\vec{F}_v$ uspostaviti uvjet ravnoteže za svaki naboj

$$\vec{F}_c + \vec{F}_v = 0 \quad \text{za naboj } q_0$$

$$(-\vec{F}_c) + (-\vec{F}_v) = 0 \quad \text{za naboj } q$$

Napomena:
Ovdje nas ne interesira uzrok vanjskih sila. Sile $\vec{F}_v$ i $-\vec{F}_v$ nisu sile akcije i reakcije iz III. Newtonova zakona. One dolaze od različitih tijela i mogu imati različitu prirodu. Npr. naboj q možemo učvrstiti na stalak dok q_0 zadržavamo putem napete niti ili rastegnute opruge.

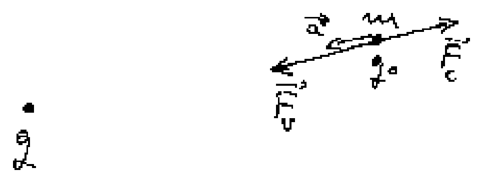
U daljnjem razmatranju smatrat ćemo da je naboj q trajno učvršćen u nekom inercijalnom referentnom sustavu. Radi jednostavnosti ne ćemo više crtati sile koje djeluju na taj učvršćeni naboj ($-\vec{F}_c$ i $-\vec{F}_v$), no njihovo postojanje se podrazumijeva.

Pažnju usmjeravamo na naboj q_0.

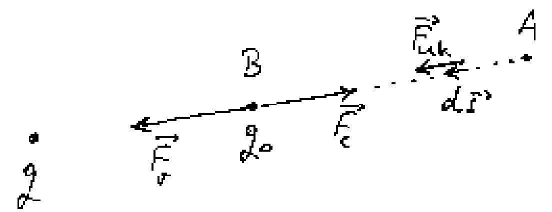
Ako u nekom trenutku povećamo iznos vanjske sile $\vec{F}_v$, nastat će neravnoteža sila i čestica (tijelo) koja nosi naboj q_0 dobit će akceleraciju

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{uk}}{m} = \frac{\vec{F}_v + \vec{F}_c}{m}$$ II. Newtonov zakon

m - masa čestice



Čestica (tijelo) koja nosi naboj q_0 se pokrene iz mirovanja i približava se naboju q. Razmotrimo pomak te čestice s nabojem q_0 od početne točke A do neke točke B bliže naboju q



Na tom putu sila $\vec{F}_c$ se povećavala zbog blizine naboja q, pa smo morali povećavati i silu $\vec{F}_v$ da bi se gibanje nastavilo. Rad ukupne sile $\vec{F}_{uk}$ na putu od A do B pretvara se u kinetičku energiju čestice koja nosi naboj q_0

$$\int_A^B \vec{F}_{uk} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{(u točki B)}$$

Zbog $\vec{F}_{uk} = \vec{F}_v + \vec{F}_c$ možemo također pisati

$$\int_A^B \vec{F}_v \cdot d\vec{s} + \int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} m v^2$$

Rad vanjske sile je pozitivan ($\vec{F}_v \cdot d\vec{s} > 0$) i zato povećava kinetičku energiju čestice. Rad Coulombove sile je negativan ($\vec{F}_c \cdot d\vec{s} < 0$) pa se njime umanjuje kinetička energija čestice. Možemo reći da se ta oduzeta energija ne gubi, nego se pojavljuje kao povećanje električne potencijalne energije

$$\Delta E_p = -\int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{s} > 0$$

Stoga prethodnu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$\int_A^B \vec{F}_v \cdot d\vec{s} = \Delta E_p + \Delta E_k \qquad \left(\Delta E_k = \frac{1}{2} m v^2\right)$$

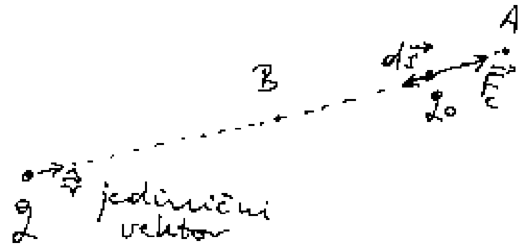
Rad vanjske sile se utroši dijelom na povećanje električne potencijalne energije, a dijelom na povećanje kinetičke (mehaničke) energije čestice koja nosi naboj q_0.

Napomena:

Na povećanje električne potencijalne energije se utroši samo rad koji odgovara Coulombovoj sili. Cjelokupan "višak" vanjske sile odgovoran je za stvaranje kinetičke energije čestice.

Promjena električne potencijalne energije povezana je s promjenom udaljenosti između naboja q_0 i q. Coulombova sila djeluje obostrano, pa je svejedno koji naboj pomičemo dok onaj drugi miruje. Električnu potencijalnu energiju pripisujemo sustavu naboja, a ne pojedinom naboju.

Možemo izračunati promjenu električne potencijalne energije za prikazani slučaj pomicanja naboja od točke A do B



Za izračunavanje promjene potencijalne energije potrebna je sila $\vec{F}_c$ koju crtamo na slici. Postojanje sile $\vec{F}_v$ (koja je nužna za gibanje čestice od A do B) se podrazumijeva ali je zbog jednostavnosti crteža ne prikazujemo.

Promjena električne potencijalne energije iznosi

$$E_{pB} - E_{pA} = -\int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{s}$$

Ako postavimo ishodište u točku gdje se nalazi naboj q, možemo Coulombovu silu na naboj q_0 izraziti u obliku

$$\vec{F}_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q q_0}{r^2}\hat{r}$$

Za radijalno gibanje možemo pisati $d\vec{s} = d\vec{r}$, pa dobivamo

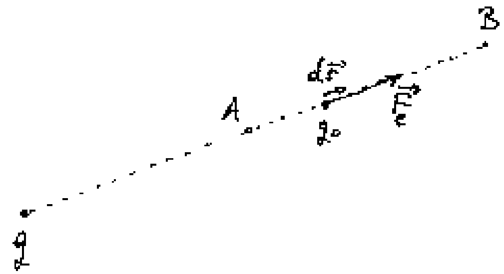
$$E_{pB} - E_{pA} = -\int_A^B \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q q_0}{r^2}\,dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q q_0 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

Ako postavimo točku A u beskonačnost ($r_A \to \infty$) i dogovorno uzmemo da je tada potencijalna energija nula ($E_{pA} \to 0$), onda za proizvoljnu konačnu udaljenost r između naboja q i q_0 imamo potencijalnu energiju

$$\boxed{E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q q_0}{r}}$$

Ako su naboji istoimeni (oba pozitivna, ili oba negativna) potencijalna energija je pozitivna. Ako su naboji raznoimeni (jedan pozitivan, a drugi negativan) potencijalna energija je negativna. Drugim riječima, naboje u gornjoj formuli moramo uzimati kao algebarske veličine.

Kada za neku energiju kažemo da je "potencijalna" onda smatramo da je ona pohranjena tako da se na njen račun može dobiti koristan rad, odnosno drugi oblik energije. Da bismo to pokazali za električnu potencijalnu energiju, pretpostavimo da naboj q_0 miruje u točki A na udaljenosti r_A od učvršćenog naboja q, a zatim uklonimo vanjsku silu na naboj q_0 i pustimo ga da se giba prema točki B



Promjena električne potencijalne energije iznosi

$$\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = -\int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q q_0 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) < 0$$

Napomena:

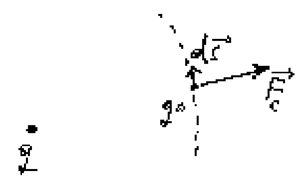
Ovaj izraz ima istu formu kao onaj ranije kod približavanja naboja. Međutim, sada je $r_A < r_B$, pa je promjena potencijalne energije negativna ($\Delta E_p < 0$), tj. potencijalna energija se smanjuje.

Postavlja se pitanje u što se pretvorila električna potencijalna energija. Sa stajališta čestice (tijela) koja nosi naboj q_0, sila $\vec{F}_c$ igra ulogu vanjske sile koja uzrokuje akceleraciju čestice $\vec{a} = \frac{\vec{F}_c}{m}$.
Na putu od A do B sila $\vec{F}_c$ izvrši rad

$$W = \int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} m v^2$$

gdje je v brzina čestice u točki B.
Dakle, električna potencijalna energija sustava dvaju naboja se smanjila, a za isti iznos se povećala mehanička kinetička energija čestice (tijela) koja nosi naboj q_0.

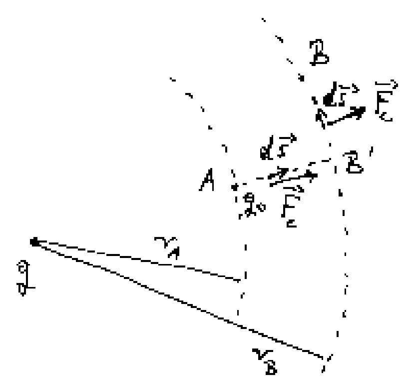
Potencijalna energija je skalar. Ona ovisi samo o iznosu udaljenosti r od naboja q do naboja q_0. Drugim riječima, ako naboj q_0 pomičemo u krugu oko q, potencijalna energija ostaje neizmijenjena



$$dE_p = -\vec{F}_c \cdot d\vec{s} = 0$$

Napomena:
Za gibanje čestice duž smjera $d\vec{s}$ potrebna je neka dodatna vanjska sila, ali je ne crtamo (podrazumijeva se).

Razmotrimo potencijalne energije u točkama A i B koje nisu na radijalnom smjeru



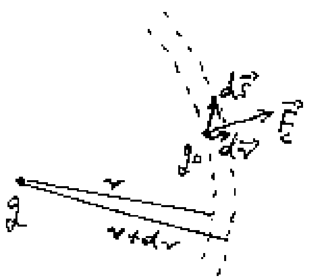
Naboj q_0 se može gibati (uz dodatno djelovanje odgovarajuće vanjske sile koja nije prikazana, ali se podrazumijeva) od točke A do B', a zatim od točke B' do B. Promjena potencijalne energije iznosi

$$\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = -\int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{s} = -\int_A^{B'} \vec{F}_c \cdot d\vec{s} - \underbrace{\int_{B'}^{B} \vec{F}_c \cdot d\vec{s}}_{0}$$

Cjelokupna promjena potencijalne energije odvija se na putu od A do B'. Na putu od B' do B nema promjene potencijalne energije jer su $\vec{F}_c$ i $d\vec{s}$ uzajamno okomiti na tome dijelu puta.

Možemo postaviti pitanje što dobivamo ako se naboj q_0 giba ravno od A prema B, ili pak bilo kojim krivudavim putom.

Razmotrimo mali pomak naboja q_0 u općenitom smjeru $d\vec{s}$

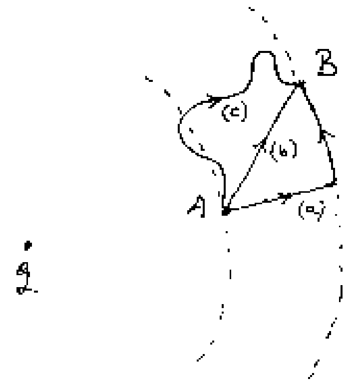


Projekcija vektora pomaka $d\vec{s}$ na radijalan smjer sile $\vec{F}_c$ jednaka je vektoru $d\vec{r}$. Zato je promjena potencijalne energije

$$dE_p = -\vec{F}_c \cdot d\vec{s} = -\vec{F}_c \cdot d\vec{r}$$

Ona ovisi samo o tome koliko se promijenio iznos udaljenosti naboja q_0 od q.

Općenitu putanju od točke A do točke B možemo sastaviti od niza malenih pomaka $d\vec{s}$.



Promjena potencijalne energije ne ovisi o obliku putanje

$$\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = -\int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{s}$$

po bilo kojoj putanji

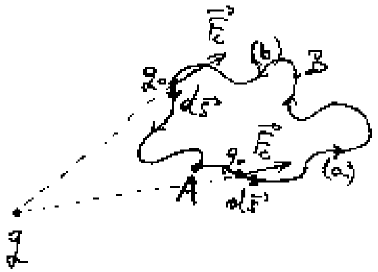
Napomena:
Putanja naboja q_0 može imati takav oblik da se na nekim dijelovima približava naboju q, a na drugim dijelovima se udaljava od njega. U skladu s time lokalna promjena potencijalne energije $dE_p = -\vec{F}_c \cdot d\vec{s}$ mijenja predznak, no ukupna promjena $\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA}$ ne ovisi o obliku putanje.

Ako naboj q_0 pomičemo od točke B do točke A, promjena potencijalne energije ima suprotan predznak

$$E_{pA} - E_{pB} = -\int_B^A \vec{F}_c \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{s} = -(E_{pB} - E_{pA})$$

Naime, zamjena granica integriranja po istoj putanji podrazumijeva zamjenu $d\vec{s} \to -d\vec{s}$, tj. promjenu smjera gibanja naboja q_0.

Možemo pomicati naboj q_0 po jednoj putanji od A do B, a natrag od B do A po nekoj drugoj putanji. Time je napravljen put po nekoj <u>zatvorenoj krivulji</u>.



$$\Delta E_p = -\oint \vec{F}_c\cdot d\vec{s} = -\underset{\text{po (a)}}{\int_A^B} \vec{F}_c\cdot d\vec{s} - \underset{\text{po (b)}}{\int_B^A} \vec{F}_c\cdot d\vec{s} = 0$$

Kada se naboj q_0 vrati u početnu točku A, promjena potencijalne energije jednaka je nuli, odnosno potencijalna energija je opet ista.

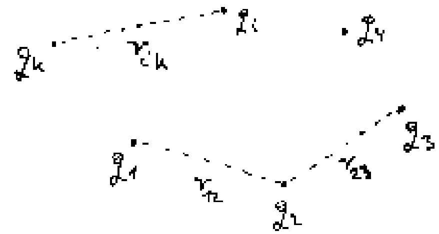
Kažemo da je potencijalna energija jednoznačna funkcija položaja naboja q_0 u odnosu prema q. Ona ne ovisi o tome na koji je način naboj q_0 doveden u taj položaj, odnosno gdje je prije bio i koji je put prošao.

Coulombova sila ima svojstvo <u>konzervativne sile</u>

$$\oint \vec{F}_c\cdot d\vec{s} = 0$$

Linijski integral Coulombove sile po zatvorenoj krivulji iščezava.

Razmotrimo potencijalnu energiju u sustavu s N naboja



Uzmimo dogovorno da je potencijalna energija jednaka nuli kada je svaki naboj beskonačno daleko od svih drugih naboja.

Uvažavajući princip superpozicije, dobivamo za potencijalnu energiju na konačnim udaljenostima naboja

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k\neq i}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_k}{r_{ik}^2}$$

Značenje dvostruke sume je sljedeće:
za $i=1$ zbraja se po $k=2,3,\ldots,N$
zatim se stavi $i=2$ i zbraja se po $k=1,3,4,\ldots,N$
na kraju se stavi $i=N$ i zbraja se po $k=1,2,\ldots,N-1$
U takvome postupku svaki se par (ik) zbroji dva puta, pa je potrebno uvesti faktor $\frac{1}{2}$ ispred sume.

2. Električni potencijal

Počnimo od slučaja s jednim nabojem q i probnim nabojem q_0 na udaljenosti r. Potencijalnu energiju možemo izraziti u obliku

$$E_p = \underbrace{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\right)}_{U} q_0 = q_0 U$$

Izraz U predstavlja <u>električni potencijal</u> na udaljenosti r od naboja q. Električni potencijal je veličina koja <u>ne</u> ovisi o probnom naboju q_0, nego samo o naboju q i udaljenosti r od njega. Kažemo da naboj q stvara u svim točkama prostora oko sebe potencijal U. Ako u danu točku postavimo (tj. dovedemo na bilo koji način) naboj q_0, sustav dvaju naboja q i q_0 imat će električnu potencijalnu energiju $E_p = q_0 U$.

Ako razmatramo pomicanje naboja q_0 iz točke A u točku B, možemo pisati razliku potencijalnih energija

$$E_{pB} - E_{pA} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_B} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_A}\right) q_0 = q_0 (U_B - U_A)$$

Izraz u zagradi predstavlja <u>razliku potencijala</u> između točaka A i B.

Iz ove jednadžbe slijedi jedinica za mjerenje električnog potencijala koja se naziva <u>1 volt</u>

$$1\,V = 1\,J\,C^{-1}$$

Kažemo da između dviju točaka u prostoru postoji razlika potencijala od 1V ako za prenošenje naboja od 1C iz jedne točke u drugu treba izvršiti rad od 1J.

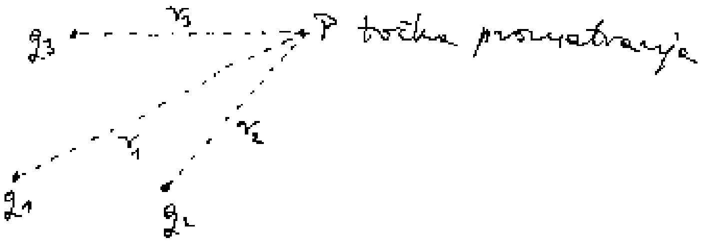
<u>Napomena:</u>
Nikada se u praksi ne prenosi ogroman naboj od 1C. Međutim, ako prenosimo npr. milijunti dio, tj. 10^{-6} C, onda bismo izvršili rad od 10^{-6} J.

Ako prenosimo jedan elementarni naboj $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ C između točaka s razlikom potencijala od 1V, onda izvršimo rad od $1{,}6\cdot 10^{-19}$ J. Zato se za energiju ponekad upotrebljava i jedinica zvana 1 elektronvolt

$$1\,eV = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J$$

Električni potencijal mnoštva naboja

Svaki naboj stvara električni potencijal u točkama prostora oko sebe, neovisno o postojanju drugih naboja koji to isto rade. To je temelj principa superpozicije



Potencijal je skalarna veličina u kojoj je važan samo iznos udaljenosti točke promatranja od pojedinog naboja. Potencijal u točki P dobivamo jednostavnim zbrajanjem

$$U=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i}$$

Napomena:

Ovaj izraz podrazumijeva da smo utvrdili dogovor prema kojemu je potencijal točke u beskonačnosti (svi $r_i \to \infty$) jednak nuli.

3. Odnos električnog polja i potencijala

Iz prethodnih razmatranja vidjeli smo da svaki naboj q stvara u točkama prostora oko sebe električno polje $\vec{E}$ (vektorsko polje) i električni potencijal (skalarno polje). Postavlja se pitanje postoji li nekakav odnos između ova dva polja što ih stvara isti naboj.

Pođimo od prethodno utvrđenog izraza za promjenu potencijalne energije kada se probni naboj q_0 premjesti iz točke A u točku B

$$E_{PB}-E_{PA}=q_0(U_B-U_A)=-\int_A^B \vec{F}_C\cdot d\vec{s}$$

Na naboj q_0 djeluje Coulombova sila koju možemo napisati pomoću izraza

$$\vec{F}_C=q_0\vec{E}$$

gdje je $\vec{E}$ električno polje koje stvara naboj q oko sebe. Isti naboj q stvara električni potencijal U_A i U_B u odgovarajućim točkama.

Iz gornjih dviju jednadžbi slijedi

$$U_B-U_A=-\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

U ovoj jednadžbi nema više probnog naboja q_0. Ostale su veličine koje ovise samo o naboju q.

Razliku potencijala između točaka A i B možemo izračunati kao linijski integral električnog polja između tih točaka (po bilo kojoj krivulji), ali uz negativan predznak.

Prethodna jednadžba kaže da vrijedi odnos

$$\boxed{dU = -\vec{E}\cdot d\vec{s}}$$

Značenje ove jednadžbe je sljedeće:
Ako nam je poznato električno polje $\vec{E}$ u nekoj točki prostora, onda možemo izračunati razliku potencijala dU između te točke i bliske točke do koje dolazimo pomakom $d\vec{s}$.

Možemo zaključiti da ukoliko nam je poznato električno polje u svim točkama prostora, možemo dogovorno odrediti potencijal u nekoj točki (npr. nulti potencijal u beskonačnosti) i zatim postupno izračunati električni potencijal u svim ostalim točkama prostora.

Možemo očekivati da vrijedi i obrat, tj. ako nam je poznat električni potencijal u svim točkama prostora, mogli bismo izračunati i električno polje u tome prostoru.

U svrhu dokaza, napišimo totalni diferencijal funkcije $U(x,y,z)$ koju smatramo poznatom

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

Električno polje možemo rastaviti na komponente

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$$

Isto tako rastavimo na komponente vektor infinitezimalnog pomaka

$$d\vec{s} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

Pomoću tih komponenti možemo pisati

$$dU = -\vec{E}\cdot d\vec{s} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

Usporedbom s gornjom jednadžbom nalazimo

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}\quad,\quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}\quad,\quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Dakle, komponenta električnog polja duž neke osi odgovara parcijalnoj derivaciji (tj. naglosti promjene) potencijala duž te osi. Predznak minus znači da je smjer električnog polja suprotan smjeru duž kojega potencijal raste (tj. poklapa se sa smjerom duž kojega potencijal opada).

Budući da je električno polje vektor, nastojimo dobiti vektorsku jednadžbu koja bi ga povezivala s potencijalom (koji je skalar!)

Uvedimo matematički operator gradijenta

$$\text{grad} = \vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

(simbol $\vec{\nabla}$ čita se "nabla".)

Gradijent je očito vektorski operator. Kada on djeluje na skalarnu funkciju $U(x,y,z)$ dobiva se vektor

$$\text{grad}\,U = \vec{\nabla}U = \vec{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial U}{\partial z}$$

Umjesto tri skalarne jednadžbe za komponente električnog polja, možemo napisati sažeto jednu vektorsku jednadžbu

$$\boxed{\vec{E} = -\text{grad}\,U = -\vec{\nabla}U}$$

Ova jednadžba kaže sljedeće:

Ako nam je poznat električni potencijal u nekoj točki i oko nje, možemo putem derivacije (naglosti promjene) odrediti smjer duž kojega električni potencijal najbrže opada. To je smjer električnog polja u danoj točki promatranja. Iznos električnog polja dan je naglošću promjene električnog potencijala u toj točki.

Alternativna jedinica za E:

Prethodno smo iz jednadžbe $\vec{E} = g_0\vec{E}$ utvrdili jedinicu za mjerenje električnog polja $1NC^{-1}$.

Iz sada postavljenih jednadžbi, nalazimo da se električno polje može izražavati pomoću $1Vm^{-1}$. Obje jedinice su jednake $1NC^{-1} = 1Vm^{-1}$.

(Jednakost proizlazi iz toga što je $1V = 1JC^{-1}$)

Napomena:

Izvedene jednadžbe $dU = -\vec{E}\cdot d\vec{s}$ i $\vec{E} = -\text{grad}\,U$ vrijede i u slučajevima mnoštva naboja koji stvaraju ukupno električno polje $\vec{E}$ u raznim točkama prostora i ukupni potencijal U u tim točkama, a sve prema općenitom principu superpozicije koji smo upoznali.

U općenitom slučaju mnoštva naboja, električno polje i potencijal predstavljaju složene prostorne funkcije. Samo u slučajevima visoke simetrije raspodjele naboja dobivamo jednostavne funkcije.

4. Ekvipotencijalne plohe

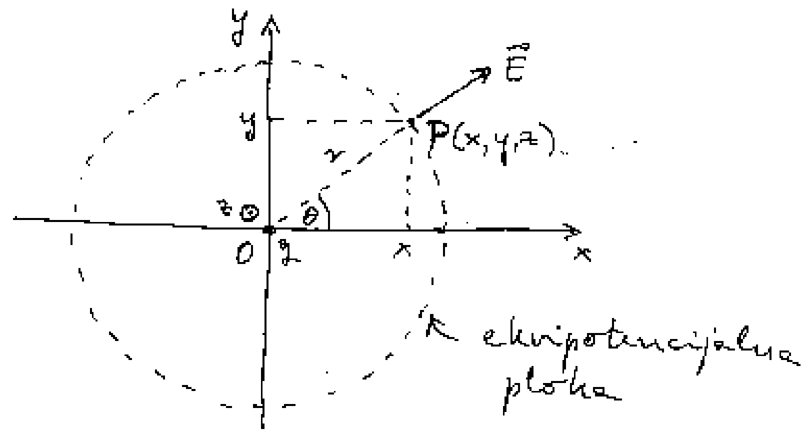
Sve točke u prostoru koje su na istome električnom potencijalu, čine ekvipotencijalnu plohu. Možemo zamisliti mnoštvo ekvipotencijalnih ploha, svaka na nekom drugom potencijalu.

Odnos između ekvipotencijalne plohe i električnog polja u nekoj točki na plohi možemo dobiti bilo iz jednadžbe $dU=-\vec{E}\cdot d\vec{s}$, ili iz jednadžbe $\vec{E}=-\mathrm{grad}\,U$. Ako $d\vec{s}$ uzmemo tako da povezuje dvije bliske točke na istoj potencijalnoj plohi, onda nema razlike potencijala između tih točaka $(dU=0)$, što ukazuje da je $\vec{E}$ okomito na $d\vec{s}$. Dakle, električno polje je okomito na ekvipotencijalnu plohu. Druga jednadžba $\vec{E}=-\mathrm{grad}\,U$ kaže da električno polje ima smjer duž kojega potencijal najbrže opada, a to je očito u smjeru koji je okomit na ekvipotencijalnu plohu i to prema susjednim plohama koje imaju niže potencijale.

Navedeno pravilo je općenito, tj. vrijedi za bilo koji raspored naboja koji stvara u prostoru neko električno polje i potencijal.

a) Primjer točkastog naboja

Razmotrimo kao najjednostavniji primjer jedan točkasti naboj postavljen u ishodište koordinatnog sustava



Električni potencijal je dan izrazom

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Ekvipotencijalne plohe su očito sferne, a potencijal opada s udaljenošću od q.

Električno polje možemo izračunati formalnim putem

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, q\, \frac{-\frac{1}{2}\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{x}{r}$$

Budući da je $\cos\theta = \frac{x}{r}$, dobiveni izraz predstavlja projekciju polja $E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$ na os x. Analogno bismo dobili komponente duž drugih osi, pa je električno polje

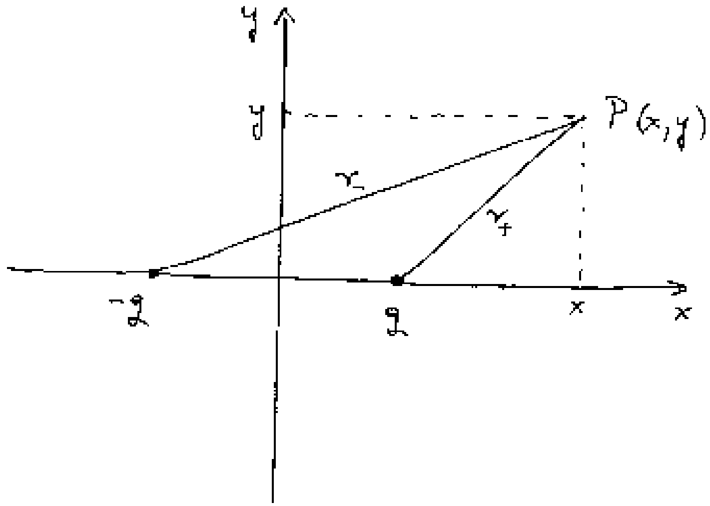
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\vec{r}}$$

Formalnim postupkom dobili smo očekivani rezultat. Električno polje je radijalno, tj. okomito na ekvipotencijalnu plohu u bilo kojoj njenoj točki, te ima smjer prema plohama nižeg potencijala.

Ako od točke P napravimo pomak $d\vec{s}$ duž smjera električnog polja $\vec{E}$, dolazimo u točku koja je na potencijalu nižem za $dU = -\vec{E}\cdot d\vec{s} = -E\,ds$ od potencijala točke P.

b) Primjer električnog dipola

Električni dipol se sastoji od naboja q i naboja $-q$ na međusobnoj udaljenosti d.

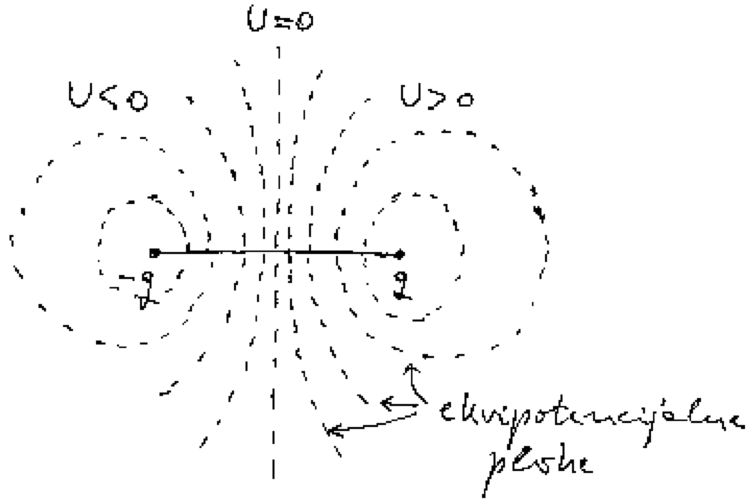


Primjenom principa superpozicije, potencijal u točki P iznosi

$$U(x,y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{r_-} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\frac{d}{2})^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+\frac{d}{2})^2+y^2}}\right]$$

Odmah možemo vidjeti da se za $x=0$, dva člana u zagradama poništavaju, bez obzira na iznos koordinate y. Dakle, potencijal je nula ne samo na beskonačnoj udaljenosti od ovih naboja, nego i u svim točkama ravnine koja prolazi središtem spojnice dvaju naboja i okomita je na nju (na crtežu je to ravnina yz).



Ekvipotencijalne plohe je lako odrediti numeričkim metodama.

Električno polje možemo izračunati putem deriviranja

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x-\frac{d}{2}}{\left[\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2\right]^{3/2}} - \frac{x+\frac{d}{2}}{\left[\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2\right]^{3/2}}\right]$$

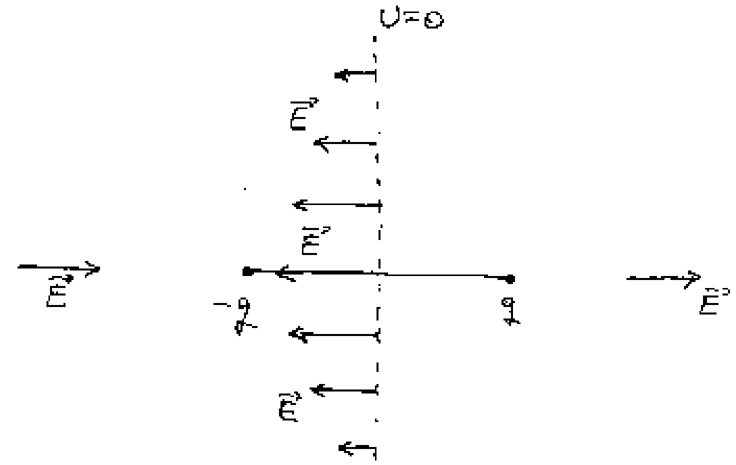
$$E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{y}{\left[\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2\right]^{3/2}} - \frac{y}{\left[\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2\right]^{3/2}}\right]$$

Razmotrimo polje za $x=0$, tj. u ravnini yz gdje je potencijal $U=0$

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2+y^2\right]^{3/2}}$$

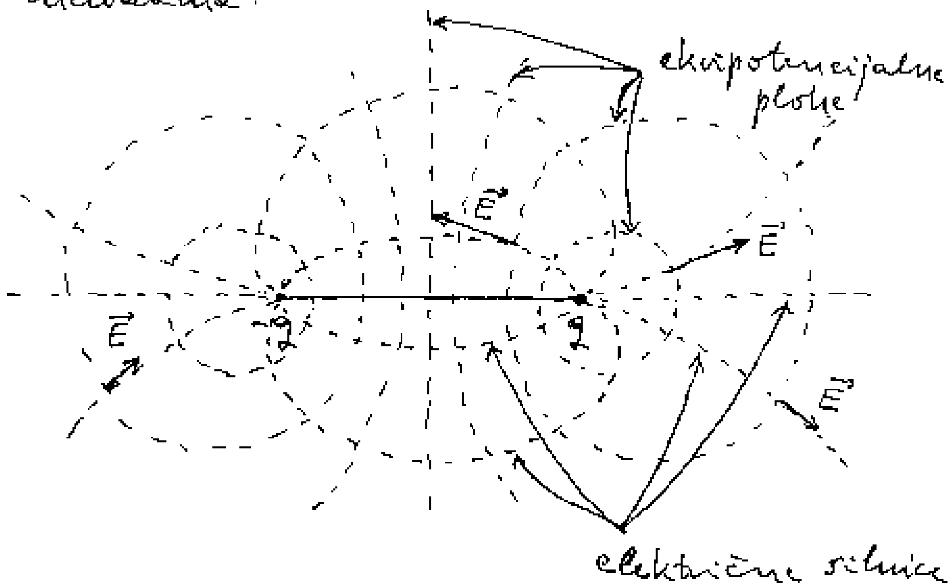
$$E_y = 0$$

Električno polje je okomito na ekvipotencijalnu plohu u kojoj je $U=0$, te ima smjer prema plohama s negativnim potencijalom.



Iznos električnog polja se smanjuje kada $|y|$ raste. Za $y=0$ dobiva se uvijek $E_y=0$. Električno polje je okomito na ekvipotencijalne plohe u svim točkama na osi x.

U svim ostalim točkama prostora električno polje bismo mogli odrediti numeričkim metodama.



Električne silnice su okomite na ekvipotencijalne plohe. Električno polje je tangencijalno na električnu silnicu, pa je time okomito na ekvipotencijalnu plohu.

5. Konzervativnost elektrostatskog polja

U dosadašnjem razmatranju utvrdili smo da za Coulombovu silu kojom naboj q djeluje na q_0 vrijedi

$$\oint \vec{F}_c \cdot d\vec{s} = 0$$

Ako uvažimo da je $\vec{F}_c = q_0 \vec{E}$, gdje je $\vec{E}$ električno polje koje stvara naboj q, dobivamo

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Važno je napomenuti da gornje izrazi vrijede ako naboj q miruje. Tada imamo elektrostatsko polje. Kažemo da je elektrostatsko polje konzervativno. Ovo svojstvo nam omogućuje da uvedemo električni potencijal $U(x,y,z)$ kao jednoznačnu funkciju u prostoru.

Napomena:

Kasnije ćemo vidjeti da naboj u gibanju stvara oko sebe električno polje koje nije konzervativno, tj. linijski integral po zatvorenoj krivulji ne iščezava.

5. ELEKTROSTATIKA VODIČA I DIELEKTRIKA

1. Električno polje nabijenog vodiča

Vodiči su tvari u kojima se naboji mogu slobodno pokretati. Najčešće se radi o metalima u kojima su elektroni pokretljivi.

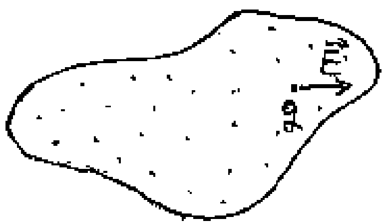
Uzmimo neko metalno tijelo (vodič) i dovedimo na njega naboj Q koji se sastoji od mnoštva elementarnih naboja

$$Q = \sum_i q_i$$

Postavljaju se dva zanimljiva pitanja:

a) Kako se u vodiču rasporede dovedeni naboji?
b) Stvaraju li oni električno polje unutar vodiča?

Pretpostavimo za trenutak da su naboji jednoliko raspoređeni po volumenu vodiča.



$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Promatrajmo jedan od tih naboja unutar vodiča.

Ako ostali naboji stvaraju električno polje $\vec{E}$ na mjestu promatranog naboja q, onda na njega djeluje sila $\vec{F} = q\vec{E}$.

Budući da su naboji u vodiču slobodni, sila $\vec{F}$ bi uzrokovala pokretanje naboja q. Prema tome, pretpostavljeno stanje ne bi bilo stabilno.

Promatrani naboj može biti bilo koji od raspoređenih naboja u bilo kojem dijelu volumena vodiča. Svaki od njih se pomiče ako ostali naboji stvaraju neko električno polje na njegovu mjestu.

Zaključujemo da će se naboji q_i konačno rasporediti na takav način da ne stvaraju električno polje niti u jednoj točki unutar vodiča, tj.

$$\boxed{\vec{E} = 0 \quad \text{unutar vodiča}}$$

Odgovorili smo na pitanje b), no moramo još odgovoriti i na pitanje a), tj. kakva je to čudesna raspodjela kojom se ostvaruje $\vec{E} = 0$ unutar vodiča?

Istoimeni naboji q_i se međusobno odbijaju pa možemo očekivati da će se nastojati razbježati iz središta prema površini vodiča.

Međutim, točnu analizu raspodjele naboja q_i možemo dobiti primjenom Gaussova zakona.

Promatrajmo unutar vodiča zamišljeni volumen V' koji je obuhvaćen zamišljenom zatvorenom plohom S'.

Budući da je $\vec{E}=0$ u svim točkama unutar vodiča, to vrijedi i za sve točke na plohi S'. Stoga nema električnog toka kroz plohu S'

$$\oint_{S'} \vec{E}\cdot d\vec{a} = 0$$

Prema Gaussovu zakonu to znači da u volumenu V' nema naboja.

Isti zaključak vrijedi za volumen V'' i bilo koji drugi zamišljeni volumen unutar vodiča.

Zaključujemo da se naboji q_i ne nalaze niti u jednome elementu volumena unutar vodiča. Drugim riječima, unutar vodiča imamo samo neutralne atome.

Cjelokupan višak naboja $Q=\sum_i q_i$ raspoređi se na površini vodiča.

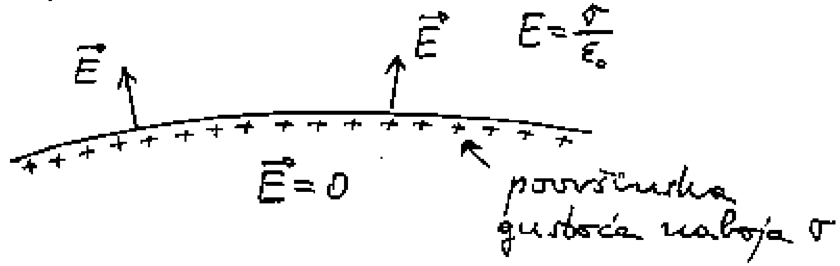
Pokus:

pokušaj dovođenja naboja u unutrašnjost šuplje metalne kugle

Pokus:

zatvorena metalna mreža kao šuplji vodič

Naboje na površini vodiča možemo promatrati kao ljusku naboja. Stoga možemo poopćiti rezultate dobivene u 3. poglavlju.



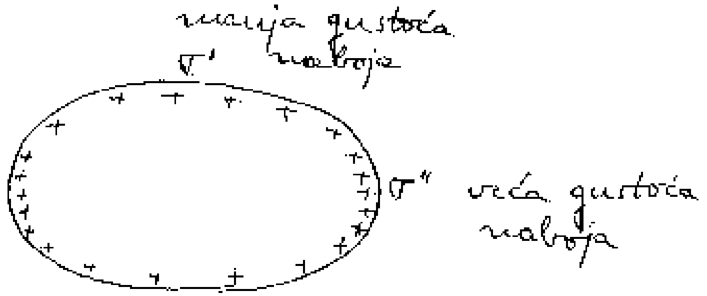
Tik ispod površine električno polje je nula. Ako točku promatranja pomaknemo tik iznad površine, električno polje napravi skok za iznos $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, gdje je σ lokalna površinska gustoća naboja.
Električno polje je uvijek okomito na lokalnu površinu vodiča.

Pokus:

ispitivanje električnog polja unutar i izvan zatvorene metalne mreže pomoću električnog njihala

Ako vodič ima oblik kugle, površinska gustoća naboja σ je posvuda jednaka. Međutim, ako vodič ima nepravilan oblik, površinska gustoća je veća tamo gdje je veća zakrivljenost površine.

Uzmimo primjer nabijenog metalnog elipsoida



Pokus:

ispitivanje površinske gustoće naboja na elipsoidu

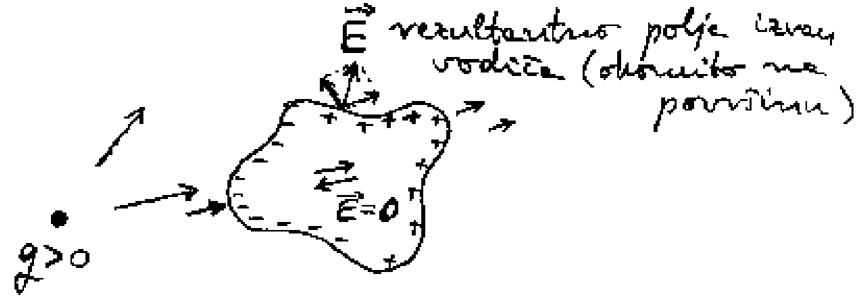
Ako nabijeni vodič ima šiljak, na njemu se pojavi jako velika gustoća naboja. Stoga je električno polje u okolini šiljka jako veliko.

Pokus:

efekti šiljka

2. Influencija u vodičima

Uzmimo neutralan vodič i dovedimo ga u blizinu nekog točkastog naboja $q>0$.



Naboj q stvara električno polje u svim točkama prostora oko sebe pa tako i u unutrašnjost vodiča. To polje pokreće slobodne naboje u vodiču (pozitivni idu u smjeru polja a negativni suprotno). Pojava razdvajanja naboja u neutralnom vodiču uslijed djelovanja vanjskog naboja naziva se influencija.

Naboji razdvojeni influencijom također stvaraju električno polje u svim točkama prostora oko sebe, tj. u unutrašnjosti vodiča i oko njega.

Po principu superpozicije, ukupno električno polje u nekoj točki prostora jednako je vektorskom zbroju polja što ih stvara naboj q i naboji razdvojeni influencijom.

Očito je da će se influencijom naboji razdvajati i pomicati sve dok ukupno polje ne iščezne u svim točkama unutar vodiča, tj:

$$\boxed{\vec{E} = 0 \quad \text{unutar vodiča}}$$

Pokus:

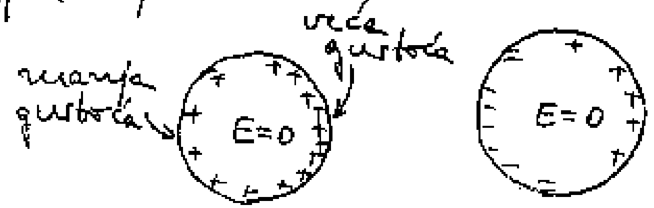
influencija u neutralnom vodiču (razdvajanje kugla)

Pokus:

električno polje unutar i izvan metalne mreže u blizini naboja

Zatvorena metalna mreža naziva se Faradayev kavez. Unutar njega nema električnog polja. Influencijom se potpuno zasjenjuje polje koje dolazi od vanjskih uzročnika.

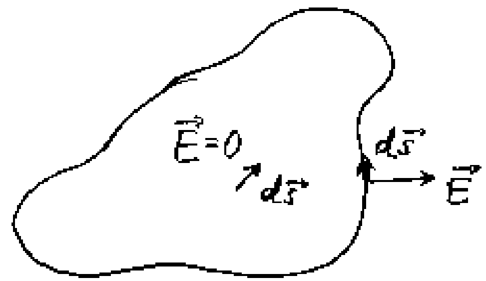
Napomena:
Ako umjesto točkastog naboja q postavimo nabijeni vodič dolazi do uzajamne influencije.



nabijeni vodič neutralni vodič

3. Potencijal vodiča

Kada se uspostavi ravnotežno stanje unutar vodiča električno polje je uvijek nula.



Razlika potencijala između dviju točaka udaljenih za $d\vec{s}$ iznosi (v. poglavlje 4)

$$dU = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

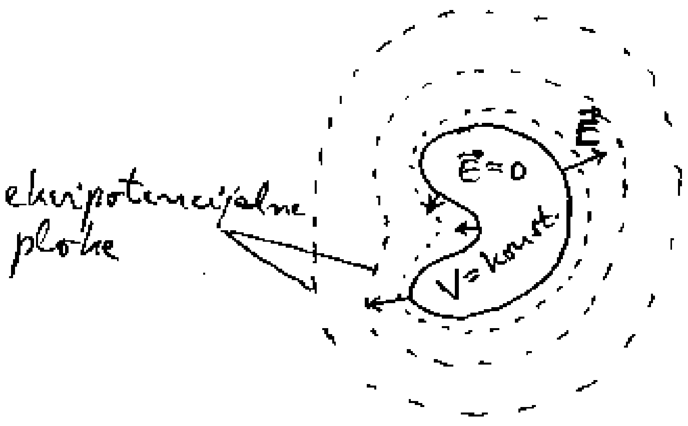
Za dvije točke unutar vodiča imamo $\vec{E} = 0$ pa je i $dU = 0$, tj: nema razlike potencijala između njih.

Zaključujemo da su sve točke unutar vodiča na istom potencijalu.

Na površini vodiča rezultantno električno polje je uvijek okomito na lokalnu površinu. Stoga je za dvije točke na površini $\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$.

Zaključujemo da je cijeli vodič, uključujući i njegovu površinu na istom potencijalu.

Pogledajmo kvalitativno izgled polja i ekvipotencijalnih ploha oko nekog nabijenog vodiča.



Cijela površina vodiča predstavlja jednu ekvipotencijalnu plohu.

Električno polje na površini vodiča je okomito na lokalnu površinu a po iznosu je veće na izbočinama a manje u udubinama.

Krenimo od točke na površini i načinimo pomak $\Delta\vec{s}$ u smjeru polja $\vec{E}$. Potencijal se smanji za $\Delta U=-E\Delta s$.

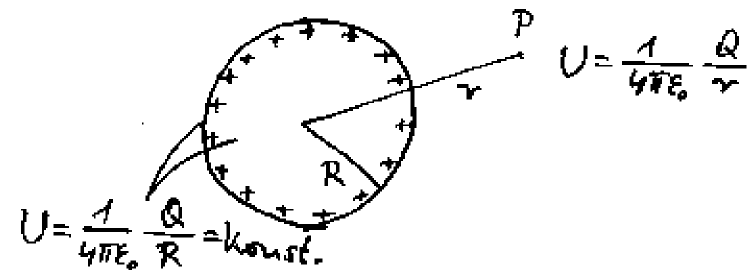
Ako želimo na svim mjestima oko površine vodiča postići istu promjenu ΔU, moramo napraviti veći pomak Δs tamo gdje je polje E manje.

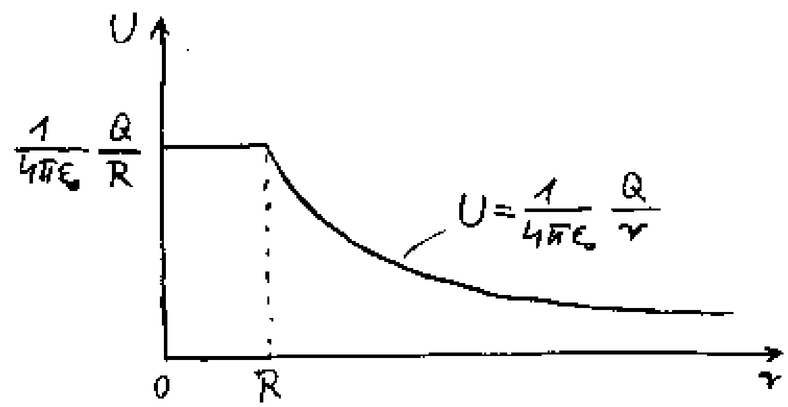
Zbog toga ekvipotencijalna ploha koja ima potencijal za ΔU manji od površine, ne slijedi oblik površine nego pravi manje udubljenje.

Postupak možemo nastaviti sa daljnjim potencijalnim plohama. Na većim udaljenostima one poprimaju sferni oblik, tj. kao da je cijeli nabijeni vodič točkasti naboj u središtu sfere.

Nabijena metalna kugla

Posebni oblik vodiča predstavlja kugla. Neka je naboj kugle Q.





Izvan kugle potencijal se ponaša kao da je cjelokupni naboj kugle u njenom središtu a od površine prema unutra je konstantan.

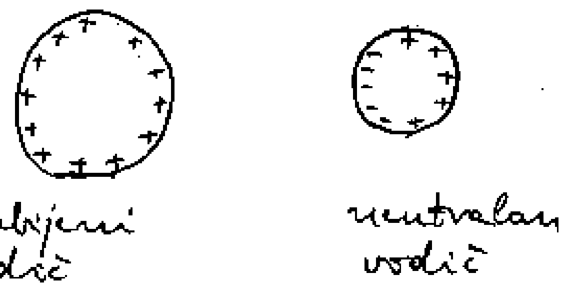
Napomena:

Sve što je o potencijalu rečeno u poglavlju 4. vrijedi i ovdje, tj. možemo dovoditi probni naboj q_0 iz beskonačnosti do neke točke, itd.

Dovođenje probnog naboja q_0 u unutrašnjost metalne kugle je zamišljeni postupak, no kada bi to bilo moguće ne bi se unutar kugle vršio dodatni rad jer je $\vec{E}=0$ pa se ne mijenja ni potencijal.

Neutralan vodič u blizini nabijenog

Dovedimo neutralan vodič u blizinu nabijenog. U njemu dođe do razdvajanja naboja zbog influencije.



Koliki je potencijal neutralnog vodiča?

Kada ne bi bilo neutralnog vodiča, na njegovom bi mjestu nabijeni vodič stvarao neki potencijal.

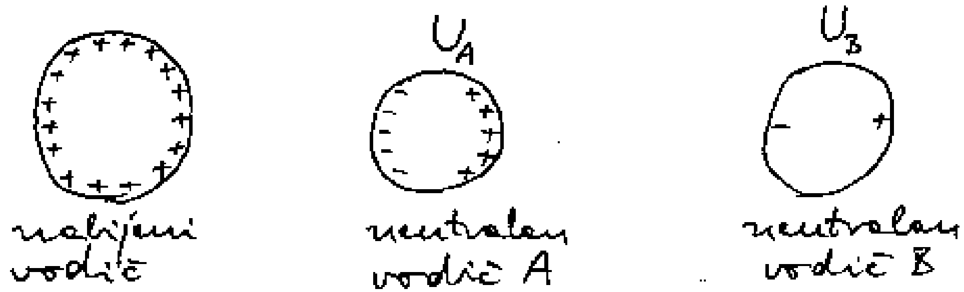
Neutralan vodič poprima dotični potencijal s time da ga razdvojeni naboji malo promijene i učine jednakim u svim točkama na površini.

Napomena:

Ako neutralan vodič dovedemo blizu pozitivno nabijenog vodiča, njegov potencijal postane pozitivan. U blizini negativno nabijenog vodiča neutralan vodič poprima negativan potencijal.

Dva vodiča na različitim potencijalima

Neka su dva neutralna vodiča postavljena na različitim udaljenostima od nekog nabijenog vodiča.



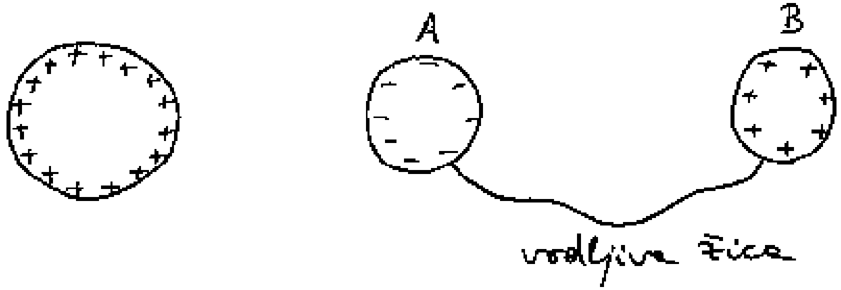
Vodič A je bliže nabijenom vodiču i stoga je njegov potencijal veći od onog za vodič B.

$$U_A > U_B$$

Napomena:

U vodiču A dolazi do većeg razdvajanja naboja jer je veća potreba za izjednačavanjem potencijala na cijeloj površini tog vodiča.

Ako vodljivom žicom spojimo vodiče A i B nastaje jedan vodič koji mora biti u cjelini na jednom potencijalu.



Naboji poteku kroz vodljivu žicu sve dok se potencijali ne izjednače na vrijednosti U koja se nalazi između prijašnjih U_A i U_B.

Ako zatim žicu odspojimo, vodiči A i B ostanu nabijeni.

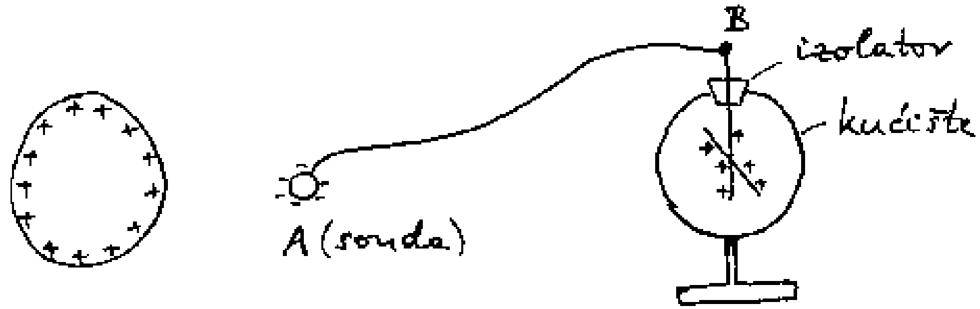
Pokus:

provjera putem elektroskopa

Navedimo dvije primjene koje se temelje na navedenoj pojavi.

a) Elektroskop kao pokazatelj potencijala

Elektroskop ima središnji vodič s pomičnom iglom. Neka nam on predstavlja vodič B. Spojimo ga vodljivom žicom na vodič A koji nam služi kao sonda.



Napomena:

Kućište nije dio vodiča B. Njih razdvaja izolator.

Pokus:

približavanje sonde nekom nabijenom vodiču

Možemo imati i više nabijenih vodiča te ispitivati potencijal u prostoru oko njih.

Pokus:

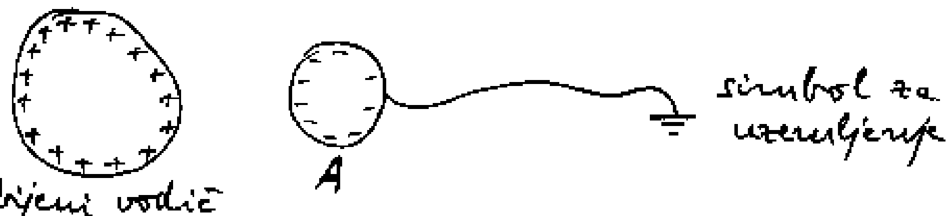
potencijal oko dvije kugle suprotnih naboja.

b) Uzemljenje

Ako za vodič B iz prethodnog primjera uzmemo neki jako velik vodič, onda se nakon spajanja potencijal vodiča B ne će bitno promijeniti a vodič A će poprimiti potencijal vodiča B.

Zemlja je ogroman vodič. Svaki neutralan vodič daleko od drugih nabijenih vodiča ima potencijal nula. Naboji stvoreni (npr. trljanjem) na površini Zemlje beznačajni su za njen potencijal. Stoga je potencijal Zemlje praktički uvijek jednak nuli.

Ako vodič A spojimo vodljivom žicom za Zemlju kažemo da smo ga uzemljili. Spajanje se obavlja na debelu metalnu žicu (ili cijevi za vodu ili sl.) koja ide duboko u zemlju gdje vlaga omogućuje dobru vodljivost tla.



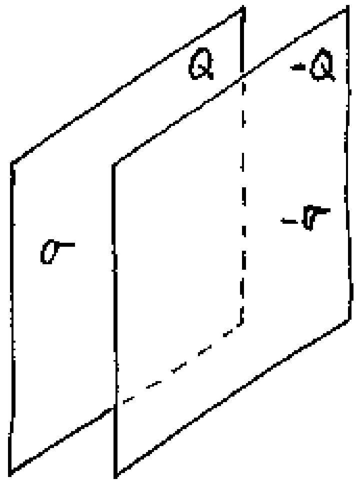
Iz Zemlje dođu negativni naboji na vodič A tako da smanje njegov protni pozitivni potencijal na nulu. U Zemlji ostanu pozitivni naboji no oni ne mogu promijeniti potencijal Zemlje.

4. Kondenzatori

Uzmimo dvije metalne ploče jednakih veličina i postavimo ih paralelno te nabijemo suprotnim nabojima Q i $-Q$.

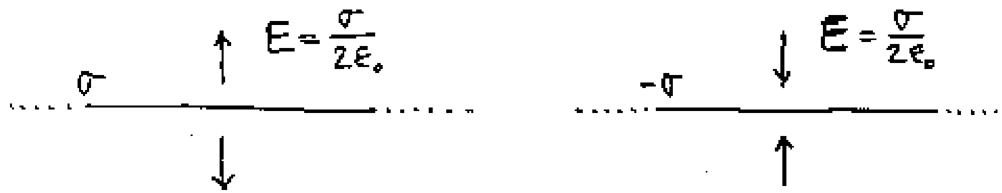
$\sigma = \frac{Q}{A}$ površinska gustoća naboja

A - površina ploče



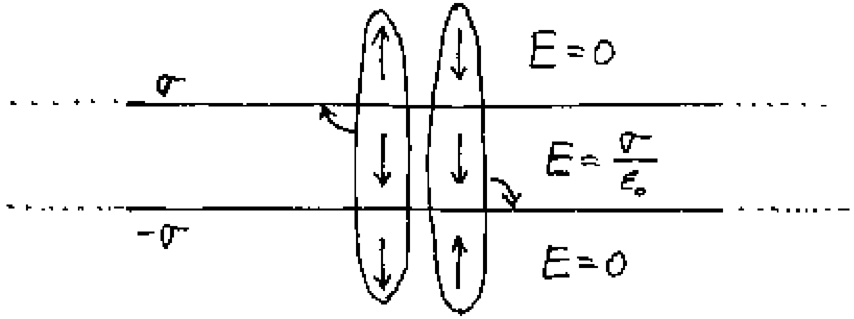
Naboji se rasporede po ploči i nastane površinska gustoća naboja.

Kada bi ploče bile beskonačno velike (idealizacija) mogli bismo smatrati da imamo dvije ravninske raspodjele naboja. Svaka od njih zasebno stvara električno polje u prostoru oko nje.



(ploča stoji okomito na ravninu crtanja)

Ako ih postavimo jednu nasuprot drugoj i primijenimo princip superpozicije, dobivamo ukupno polje u raznim točkama prostora.



Napomena:

Električno polje koje nastaje od ravninske raspodjele naboja ne ovisi o udaljenosti točke promatranja od ravnine s nabojima.

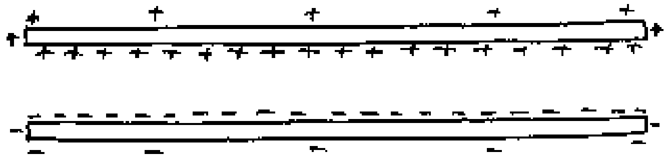
U svim točkama izvan ravnina ukupno električno polje je nula.
Između ravnina zbrajaju se doprinosi

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0} .$$

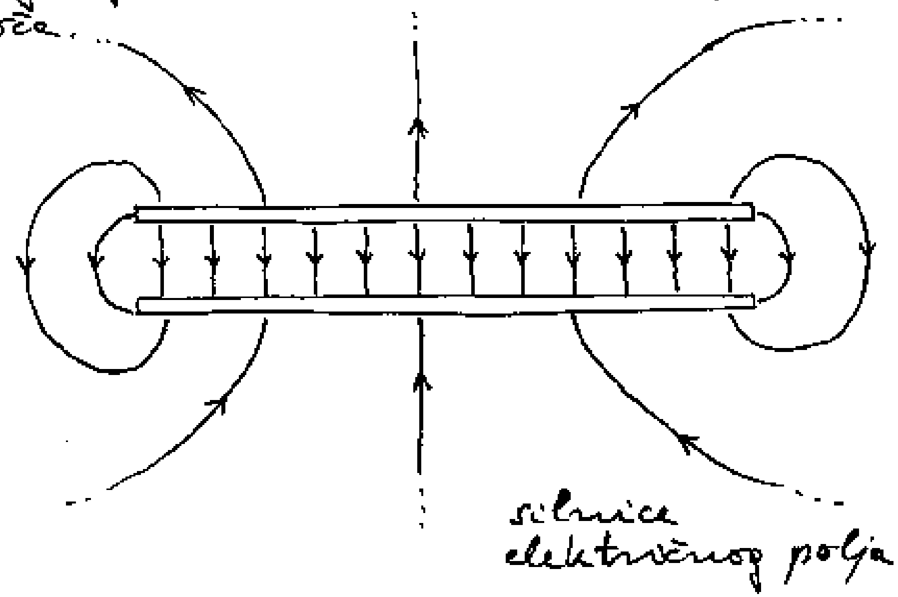
Napomena:

I ovdje nalazimo ranije utvrđeno pravilo da prelaskom s jedne strane ravninske raspodjele na drugu električno polje napravi skok od $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. U gornjem slučaju imamo dva takva skoka.

Za ploče konačnih dimenzija imamo neko odstupanje od idealnog kondenzatora. Većina naboja se i dalje nalazi na unutarnjim plohama dviju ploča ali nešto malo naboja se nalazi i na vanjskim plohama.

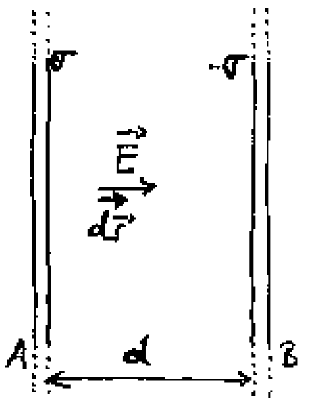


Zbog toga nalazimo neko slabo polje izvan ploča.



Što je razmak između ploča manji to je realni kondenzator bliže idealnome, tj. polje izvan ploča postaje zanemarivo.
Mi ćemo analizirati upravo takav gotovo idealan kondenzator.

Razmotrimo razliku potencijala između dviju ploča kondenzatora (A i B).



$dU = -\vec{E}\cdot d\vec{r}$

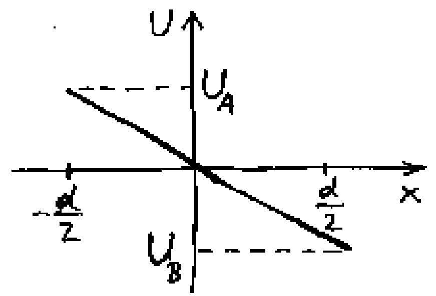
razlika potencijala između dviju točaka udaljenih za $d\vec{r}$

Ako točku promatranja pomičemo duž smjera električnog polja, potencijal se smanjuje ($dU<0$).

Pokus:

promatranje potencijala pomoću sonde elektroskopa

Električno polje između ploča kondenzatora je homogeno (tj. jednako u svim točkama tog prostora). Stoga se potencijal smanjuje linearno od U_A do U_B.



smjer okomit na ploče

Pozitivno nabijena ploča A je na pozitivnom potencijalu ($U_A>0$) a negativno nabijena ploča B je na negativnom potencijalu ($U_B<0$). U sredini između njih je potencijal nula.

Ukupna razlika potencijala između ploča kondenzatora iznosi

$$U_B - U_A = \int_A^B dU = -E\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dr = -Ed$$

Pozitivna razlika potencijala naziva se napon kondenzatora

$$\boxed{V = U_A - U_B = Ed}$$

Kapacitet kondenzatora

Želimo dovesti napon V u vezu s nabojem Q na ploči kondenzatora i geometrijom ploča. Možemo pisati

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A\varepsilon_0} \qquad A \text{ - površina ploče}$$

$$V = \frac{Qd}{A\varepsilon_0} \implies Q = \underbrace{\varepsilon_0\frac{A}{d}}V$$

C - kapacitet kondenzatora

$$\boxed{Q = CV}$$ jednadžba kondenzatora

Napon je razlika potencijala pa se mjeri u istim jedinicama kao potencijal, tj. u voltima.
Jedinica za kapacitet naziva se farad

$$1F = 1CV^{-1}$$

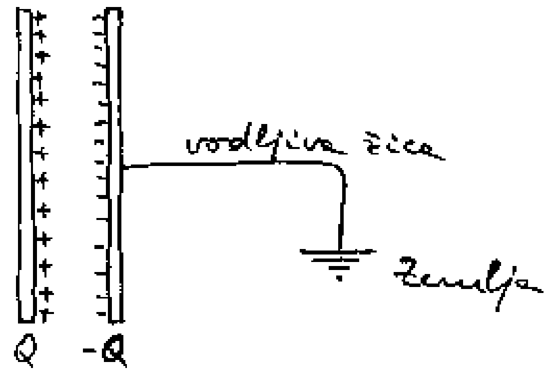
Kondenzator ima kapacitet od 1F ako se dovođenjem naboja od 1C stvori napon od 1V.

Napomena:
Kada kažemo da je na kondenzator doveden naboj Q, onda se podrazumijeva da je ujedno na drugu ploču doveden naboj -Q.

Kao što je 1C jako velika jedinica za naboj (nikada u praksi ne baratamo s tolikim nabojem), tako je i 1F jako velika jedinica za kapacitet.
Veći kondenzatori koje susrećemo u praksi imaju kapacitet od nekoliko mikro-farada ($1\mu F = 10^{-6}F$). Najčešći su kondenzatori s kapacitetom u području nano-farada ($1nF = 10^{-9}F$). Maleni kondenzatori imaju kapacitet od nekoliko piko-farada ($1pF = 10^{-12}F$).

Uzemljenje kondenzatora

Možemo uzemljiti jednu ploču kondenzatora a na drugu dovesti naboj Q.



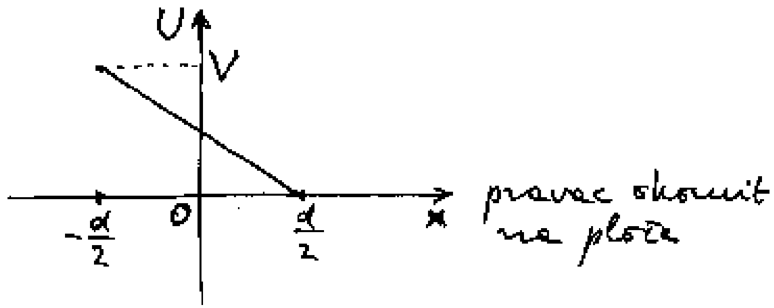
Dovoljno je nabiti lijevu ploču pozitivnim nabojem da bi se na desnoj ploči automatski pojavili negativni naboji uslijed razdvajanja naboja u neutralnom vodiču (desna ploča + vodljiva žica + Zemlja). Pozitivni naboji su otišli u Zemlju.

Pokus:
provjera da se i na uzemljenoj ploči nalaze naboji

Možemo reći da pozitivni naboji privuku što bliže k sebi negativne naboje a pozitivne naboje odbiju što dalje, tj. u Zemlju.
Ekvivalentan opis događaja možemo iskazati i koristeći se pojmom potencijala.

Kada desna ploča ne bi bila uzemljena, njen bi potencijal postao pozitivan čim se lijeva ploča nabije. Da bi se potencijal desne ploče spustio na nulu potrebno je na nju dovesti negativne naboje. To se ostvaruje putem uzemljenja.

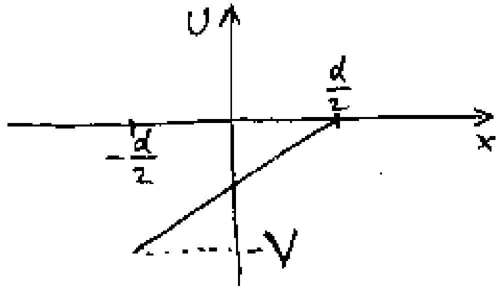
Lijeva ploča je na potencijalu $+V$ ($V=\frac{Q}{C}$), a desna na potencijalu nula.



Pokus:

promatranje potencijala između ploča pomoću sonde i elektroskopa

Ako lijevu ploču nabijemo negativnim nabojem $-Q$, njen potencijal je $-V$, a desna je opet na potencijalu nula jer je uzemljena.

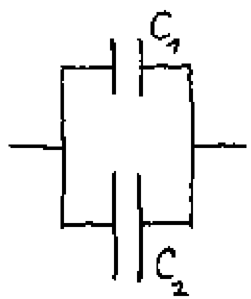


Zaključak:

Ako niti jedna ploča nije uzemljena, njihovi su potencijali $\frac{V}{2}$ i $-\frac{V}{2}$ a nula je na sredini između ploča.
Uzemljenjem jedne od ploča ne gubi se naboj na njoj, niti se mijenja razlika potencijala (napon).
Samo se potencijal uzemljene ploče postavi na nulu a druga ploča automatski dođe na potencijal koji odgovara danom naponu $V=\frac{Q}{C}$!

Paralelan spoj kondenzatora

Spojimo u paralelu dva kondenzatora čiji su kapaciteti C_1 i C_2.



Lijeve ploče obaju kondenzatora spojene su vodljivom žicom pa su stoga na istome potencijalu. To vrijedi i za desne ploče. Zato su naponi na kondenzatorima jednaki

$$V_1 = V_2 = V$$

Ukupni naboj Q koji dovedemo na lijeve ploče rasporedi se tako da naponi budu jednaki

$$Q_1 = C_1 V$$
$$Q_2 = C_2 V$$
$$\underbrace{Q_1 + Q_2}_{Q} = \underbrace{(C_1 + C_2)}_{C} V$$

Dva kondenzatora spojena u paralelu ekvivalentna su jednom kondenzatoru kojem je kapacitet jednak zbroju kapaciteta tih dvaju kondenzatora

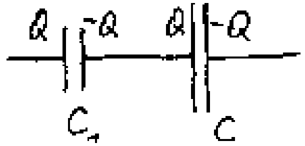
$$C = C_1 + C_2 .$$

Za veći broj kondenzatora spojenih u paralelu imamo poopćenje gornjeg pravila

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_N = \sum_{i=1}^{N} C_i$$

Serijski spoj kondenzatora

Spojimo dva kondenzatora u seriju i dovedemo naboj Q na lijevu ploču prvog kondenzatora.



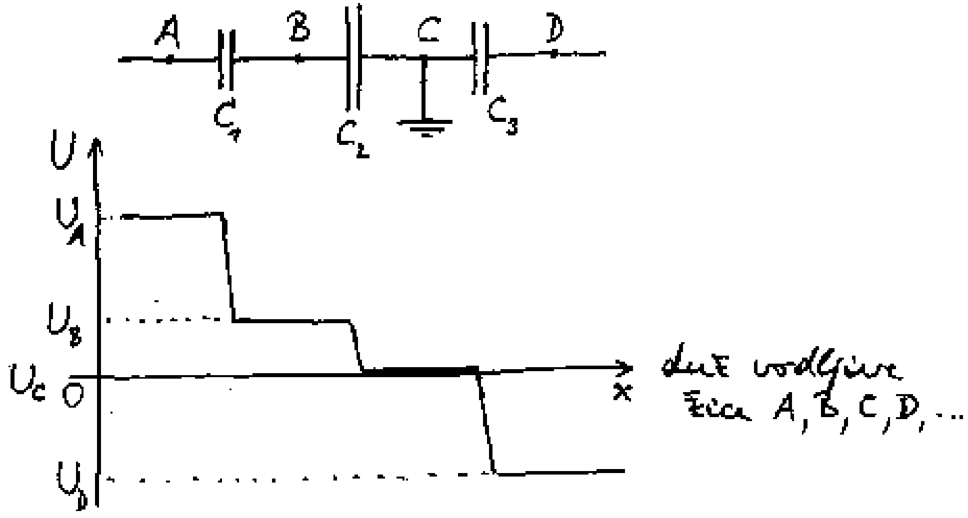
Čim nabijemo lijevu ploču prvog kondenzatora dolazi automatski do razdvajanja naboja u središnjem neutralnom vodiču (desna ploča prvog kondenzatora + spojna žica + lijeva ploča drugog kondenzatora).
Razdvajanje naboja u neutralnome vodiču daje $-Q$ i $+Q$ na pločama dvaju kondenzatora. Stoga su naboji na kondenzatorima jednaki iako kapaciteti C_1 i C_2 mogu biti različiti.

Na svakom kondenzatoru dobivamo napon

$$V_1 = \frac{Q}{C_1}$$
$$V_2 = \frac{Q}{C_2}$$
$$\underbrace{V_1 + V_2}_{V} = \underbrace{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}_{\frac{1}{C}} Q$$

Serijski spoj dvaju kondenzatora možemo tretirati kao jedan zamjenski kondenzator na kojemu je napon V a kapacitet mu je C.

Možemo grafički prikazati promjene potencijala u serijskom spoju kondenzatora



Ako je npr. točka C uzemljena, onda je njen potencijal nula $U_C = 0$. Potencijali ostalih točaka ovise o naponima na kondenzatorima

$$U_A = V_1 + V_2$$

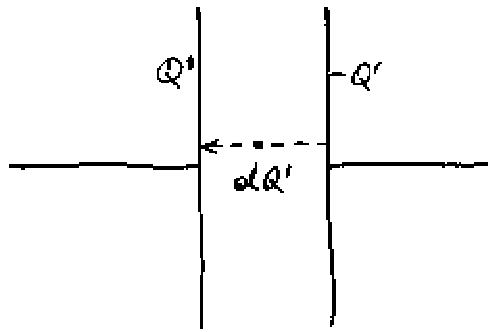
$$U_B = V_2$$

$$U_C = 0$$

$$U_D = -V_3$$

Potencijalna energija nabijenog kondenzatora

Nabijanje kondenzatora možemo zamisliti kao proces u kojemu krenemo od neutralnih ploča a zatim oduzimamo jednoj ploči pozitivan naboj i prenosimo ga na drugu ploču. Time u prvoj ploči ostaje negativan naboj.



$$V' = \frac{Q'}{C}$$

Ako prenosimo naboj dQ' s jedne ploče na drugu, tj. između točaka s razlikom potencijala (naponom) V', moramo izvršiti rad

$$dW = V' dQ' = \frac{Q'}{C} dQ'$$

Za nabijanje kondenzatora od $Q' = 0$ do $Q' = Q$ izvrši se rad

$$W = \int dW = \int_0^Q \frac{Q'}{C} dQ' = \frac{Q^2}{2C}$$

Utrošeni rad pretvara se u potencijalnu energiju

$$E_p = \frac{Q^2}{2C}$$

Analogija s elastičnom oprugom

Možemo napraviti matematičku analogiju između elastične opruge i kondenzatora.

$$E_p = \frac{1}{2} K u^2 \qquad \text{za rastegnutu elastičnu oprugu}$$

$$E_p = \frac{1}{2}\frac{1}{C} Q^2 \qquad \text{za nabijeni kondenzator}$$

Inverzna vrijednost kapaciteta $\frac{1}{C}$ je matematička analogna konstanti opruge K. To su veličine koje ovise o građi danog sustava.

Naboj Q je matematički analogan deformaciji opruge u. Te veličine kazuju koliko smo dani sustav otklonili od ravnotežnog stanja. (Ravnotežna stanja se smatraju $u=0$, odnosno $Q=0$).

Slijedom ove matematičke analogije dobivamo dalje

$$F_{el} = K u \qquad \text{elastična sila opruge}$$

$$V = \frac{1}{C} Q \qquad \text{napon na kondenzatoru}$$

Napon V je matematički analogan elastičnoj sili F_{el}.

Energija električnog polja

Kod nabijanja kondenzatora stvara se električno polje između ploča. Izrazimo potencijalnu energiju E_p nabijenog kondenzatora pomoću električnog polja E koje je time stvoreno.

$$E_p = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(\sigma A)^2}{2\varepsilon_0 \frac{A}{d}} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} \underbrace{A d}_{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 V$$

V volumen između ploča kondenzatora

Na potencijalnu energiju možemo gledati na dva ekvivalentna načina. U prvom, potencijalna energija je stvorena time što smo razdvojili naboje Q i $-Q$ koji se privlače. Drugi način gledanja je da kažemo kako je kod nabijanja kondenzatora rad utrošen za stvaranje električnog polja.

Budući da električno polje postoji samo u volumenu V između ploča kondenzatora, možemo dobiti <u>gustoću energije</u> električnog polja, tj. energiju po jedinici volumena

$$\frac{E_p}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

<u>Pokus:</u>

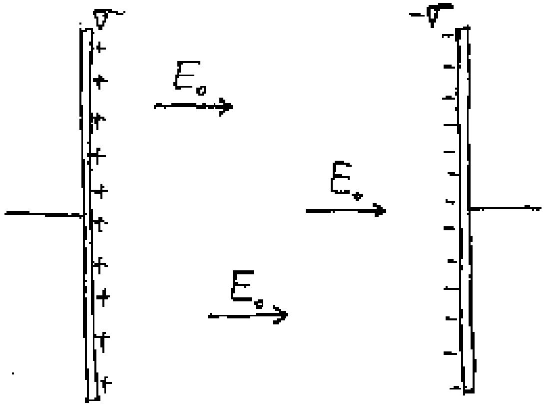
izbijanje kondenzatora kratkim spojem (Leydenska boca)

5. Dielektrici

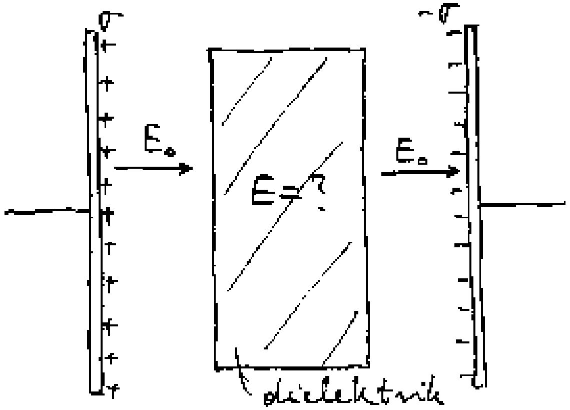
Naziv dielektrik (grč. dia = kroz) ukazuje na svojstvo tih tvari da električno polje prolazi kroz njih (barem djelomično). Po tome se dielektrici razlikuju od vodiča u kojima je električno polje nula.

Dielektrici su zapravo svi izolatori (npr. staklo, plastika, keramika, itd.)

Što se zbiva u dielektriku koji je stavljen u vanjsko električno polje?



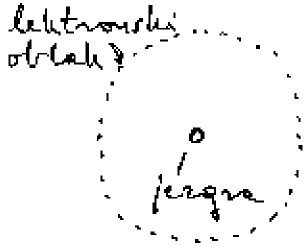
Između ploča kondenzatora nema dielektrika. U svakoj točki prostora električno polje je $E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$



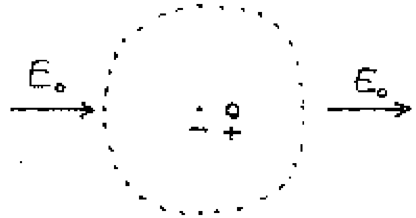
Izvan dielektrika imamo u svakoj točki $E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

U odnosu prema dielektriku E_0 djeluje kao vanjsko polje.

Dielektrici su izolatori pa u njima ne može doći do makroskopskog pomicanja naboja kao kod vodiča. U dielektricima je svaki elektron čvrsto vezan uz svoj matični atom. U vanjskom električnom polju dolazi samo do malene deformacije atoma.



Ako nema vanjskog električnog polja ($E_0 = 0$) atom je sferno simetričan. Središta pozitivnog i negativnog naboja poklapaju se.



U vanjskom električnom polju atom se deformira. Središta pozitivnog i negativnog naboja malo se razdvoje.

Definicija električnog dipola

Sustav od dva naboja q i $-q$ razmaknuta za neki iznos l nazivamo električni dipol.

Veličinu

$$p = ql$$

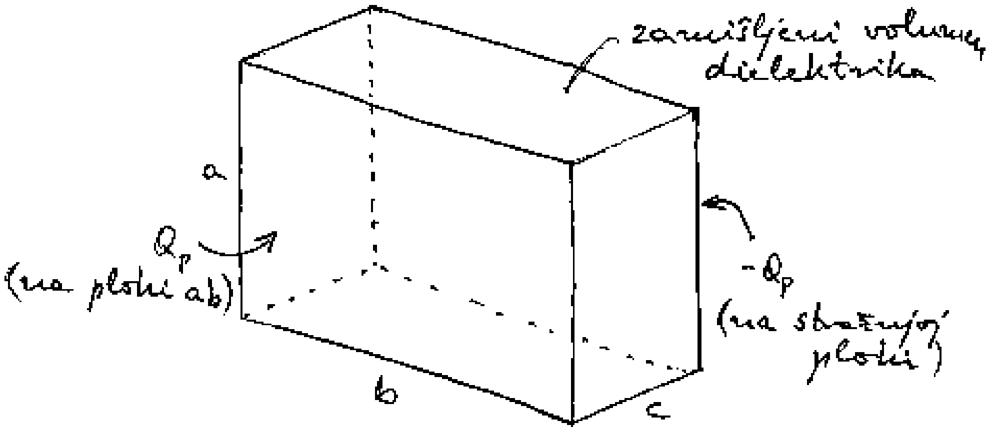
tj. umnožak naboja i razmaka nazivamo električni dipolni moment.

Kada se dielektrik stavi u vanjsko električno polje svaki se njegov atom polarizira, tj. postane električni dipol. Ako u nekom volumenu V dielektrika imamo N atoma, onda ukupni dipolni moment tog volumena dielektrika iznosi Np. Dipolni moment po jedinici volumena

$$P = \frac{Np}{V} = \frac{N}{V} q l$$

naziva se polarizacija dielektrika.

Zamislimo da nije došlo do deformacija atoma, tj. do nastajanja atomskih dipola nego do makroskopskog pomicanja naboja koje bi dalo isti dipolni moment po jedinici volumena



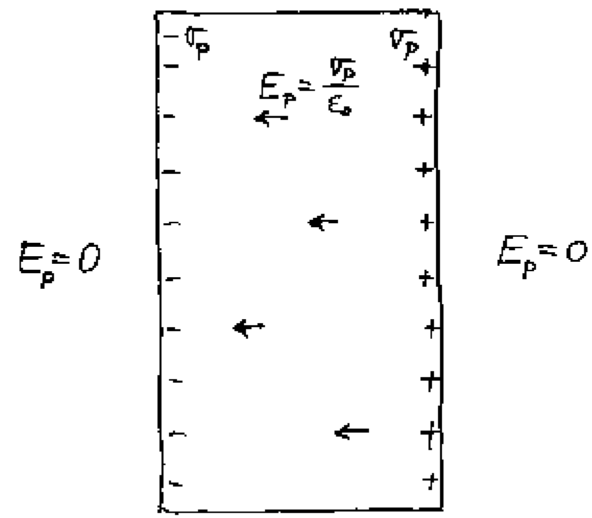
Kada bi došlo do zamišljenog razdvajanja naboja Q_p i $-Q_p$ na suprotne plohe ab, nastao bi dipolni moment $Q_p c$ jer je c razmak između naboja.

Da bi dipolni moment po jedinici volumena stvoren u tako zamišljenom procesu bio jednak polarizaciji koja nastaje u stvarnome procesu, mora biti

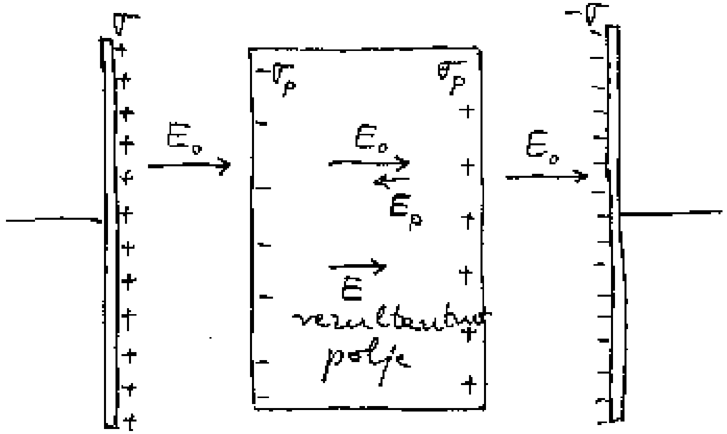
$$P = \frac{Q_p c}{V} = \frac{Q_p c}{abc} = \frac{Q_p}{ab} = \sigma_p$$

Zamišljeni makroskopski proces razdvajanja naboja ekvivalentan je stvarnome mikroskopskom procesu deformacije atoma uz uvjet da je zamišljena plošna gustoća naboja σ_p jednaka polarizaciji P.

Svođenjem polarizacije na zamišljenu plošnu gustoću naboja možemo jednostavno odrediti električno polje koje bi naboji stvarali



Zaključimo razmatranje na cjelovitom sustavu s dielektrikom između ploča kondenzatora



Primjenom principa superpozicije dobivamo da je ukupno električno polje u točkama prostora izvan dielektrika E_0, a unutar dielektrika imamo po iznosu smanjeno polje

$$E = E_0 - E_p = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma - \sigma_p}{\varepsilon_0}$$

Analogno s relacijom $P = \sigma_p$ uvodi se veličina

$$D = \sigma$$

koja se naziva <u>električni pomak</u> (engl. electric displacement).
Naime, možemo zamisliti da umjesto plošnih gustoća naboja σ i $-\sigma$ imamo odgovarajuće polje D u svim točkama prostora između ploča kondenzatora.

Tada kažemo da polje električnog pomaka D uzrokuje u dielektriku polarizaciju P pa je rezultantno električno polje

$$E = \frac{\sigma - \sigma_p}{\varepsilon_0} = \frac{D - P}{\varepsilon_0}$$

Ova se relacija najčešće piše u obliku

$$\boxed{D = \varepsilon_0 E + P}$$

Smanjenje električnog polja u dielektriku ovisi o iznosu polarizacije P koja se u njemu inducira. To možemo izraziti putem relacije

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

Električno polje u dielektriku smanji se ε_r puta. Veličina ε_r naziva se <u>relativna permitivnost</u> dielektrika.

dielektrik	ε_r
staklo	5-10
guma	3-35
drvo	2-8
glicerin	56
voda	81
zrak	$1{,}00059 \approx 1$

$\Rightarrow E \approx E_0$ kao u vakuumu

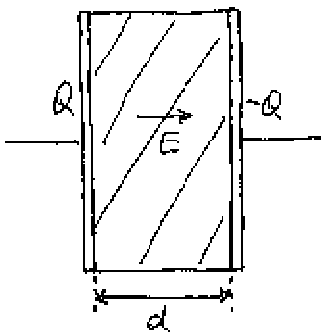
Odnos između D i E možemo napisati pomoću ε_r.
Iskoristimo izraz $E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{D}{\varepsilon_0}$ i pišemo

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{D}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \Longrightarrow \boxed{D = \varepsilon_r \varepsilon_0 E}$$

Ako se dielektrik s danim ε_r nalazi u polju električnog pomaka D dobiva se u dielektriku električno polje E dano gornjom relacijom.

Kapacitet kondenzatora s dielektrikom

Neka je kondenzator nabijen nabojem Q. Umetnimo dielektrik u cijeli prostor između ploča kondenzatora.



$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

$$V = E d = \frac{E_0}{\varepsilon_r} d = \frac{V_0}{\varepsilon_r}$$

Napon se također smanji za ε_r.

Pokus:

umetanje dielektrika između ploča kondenzatora

Opisanu pojavu možemo izraziti i putem promjene kapaciteta kondenzatora

$$V = E d = \frac{E_0}{\varepsilon_r} d = \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0} d = \frac{\frac{Q}{A}}{\varepsilon_r \varepsilon_0} d$$

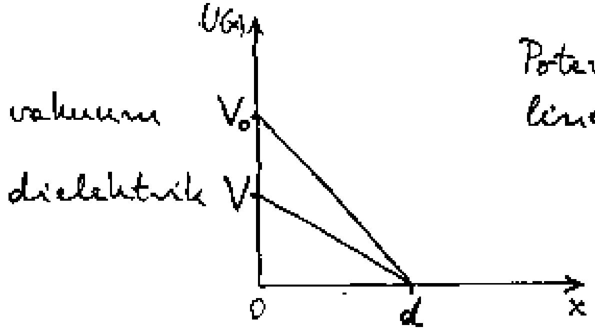
Ovu relaciju možemo napisati u standardnom obliku

$$Q = \underbrace{\varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d}}_{C \text{ - kapacitet kondenzatora}} V$$

Kapacitet kondenzatora poraste ε_r puta kada se između ploča stavi dielektrik.

Prikaz potencijala

Neka os x bude okomita na ploče kondenzatora.



Potencijal u dielektriku linearno pada duž osi x.

$$E = -\frac{dU(x)}{dx} = \text{konst.}$$

Ovdje je pretpostavljeno da je desna ploča uzemljena pa se potencijal svake točke određuje u odnosu na desnu ploču.
Potencijal lijeve ploče jednak je naponu na kondenzatoru.

Proboj dielektrika

Ako se povećava električno polje u kojemu se nalazi neki dielektrik, povećava se i razdvajanje naboja unutar atoma (dipol) od kojih se sastoji dielektrik. Kod nekog dovoljno jakog polja $\vec{E}_{max}$ dolazi do otkidanja elektrona od atoma (ionizacija) i pokretljivosti naboja. Dielektrik se više ne ponaša kao izolator nego vodi struju. To se naziva proboj dielektrika.

Jakost dielektrika (engl. dielectric strength) izražava se maksimalnim električnim poljem E_{max} koje dani dielektrik može izdržati prije proboja.

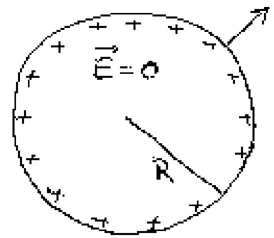
Za suhi zrak je $E_{max} \approx 3 \cdot 10^6 \, Vm^{-1}$.

Pokus:

pojava iskre između nabijenih polova Wimshurstovog stroja

Staklo ima veću dielektričnu jakost ($E_{max} \approx 15 \cdot 10^6 \, Vm^{-1}$), a bakelit još veću ($E_{max} \approx 24 \cdot 10^6 \, Vm^{-1}$).

Proboj u zraku ograničava mogućnost nabijanja metalne kugle.



$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2}$ tik iznad površine

$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R}$ potencijal kugle

Usporedbom ovih jednadžbi dobivamo $V = E \cdot R$. Maksimalan potencijal prije nastanka proboja u zraku oko kugle iznosi

$$V_{max} = E_{max} \cdot R$$

Za kuglu koja ima npr. $R = 3\,cm$

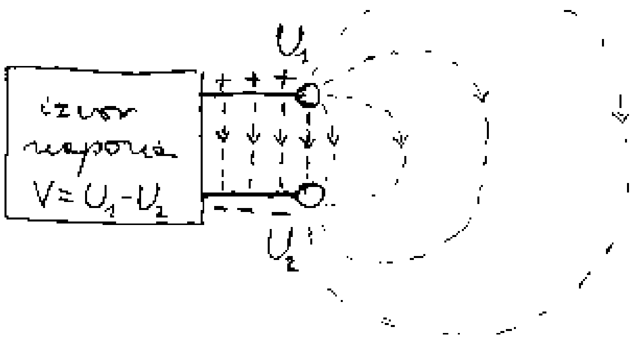
$$V_{max} = 3 \cdot 10^6 \, Vm^{-1} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \, m = 9 \cdot 10^4 \, V = 90 \, kV$$

U praksi se postižu naponi od nekoliko kilovolti jer zrak obično ima neku količinu iona koji odvode naboj s kugle u okolinu.

6. ELEKTRIČNE STRUJE

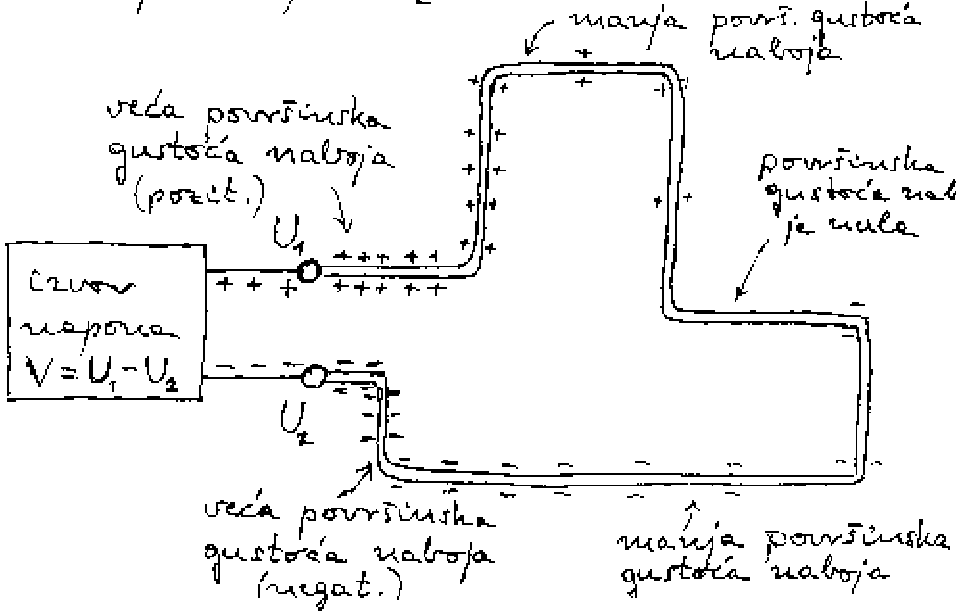
1. Nastanak električne struje

Razmotrimo najprije električno polje u okolini priključnica na izvor napona



električno polje brzo slabi na većim udaljenostima od priključnica

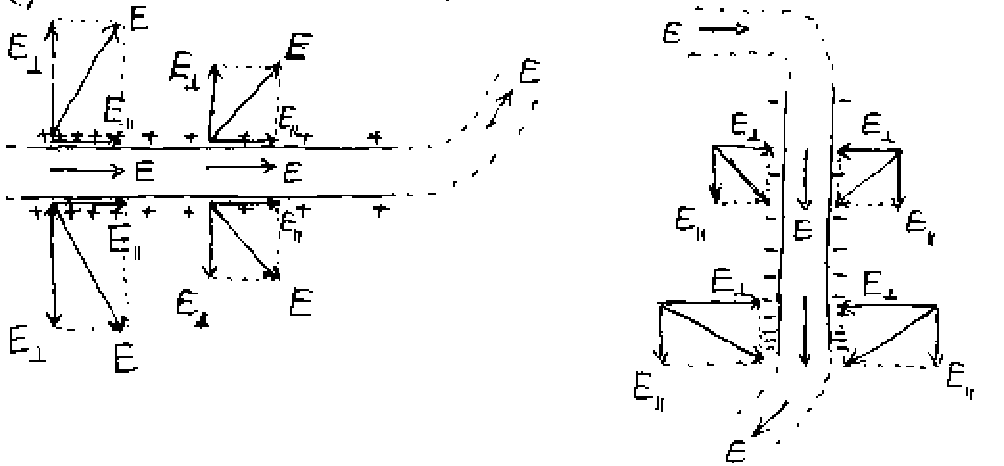
Ako dvije priključnice spojimo vodljivom žicom poteče struja od višeg potencijala U_1 prema nižem potencijalu U_2.



Naboji se rasporede po površini vodljive žice na taj način da se površinska gustoća naboja mijenja od maksimalne pozitivne vrijednosti blizu priključnice U_1 i smanjuje se do nule na nekom mjestu na žici a zatim postaje negativna i poprima maksimalnu negativnu vrijednost blizu priključnice U_2.

Ovi površinski naboji stvaraju električno polje u vodljivoj žici i oko nje. Ovo se električno polje potpuno razlikuje od onoga koje stvaraju priključnice U_1 i U_2 između kojih nije spojena vodljiva žica.

Razmotrimo neke segmente vodljive žice (jako uvećana slika)



Električno polje unutar vodiča kojim teče struja nije nula. Ovo je konstantno po iznosu duž cijele dužine vodljive žice i slijedi smjer žice.

Električno polje izvan vodljive žice kojom teče struja nije okomito na površinu žice. Okomita komponenta ovisi o lokalnoj površinskoj gustoći naboja ($E_\perp = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$). Stoga ona ima maksimalan iznos i smjer "od žice" u blizini U_1 te se smanjuje do nule na nekoj udaljenosti duž žice i zatim opet raste po iznosu ali sa smjerom "prema žici".

Komponenta koja je paralelna površini žice pojavljuje se zato što se gustoća naboja stalno mijenja u jednome smjeru duž žice. $E_\parallel$ ima stalnu vrijednost duž cijele žice. Ona je jednaka iznosu električnog polja unutar žice kojom teče struja.

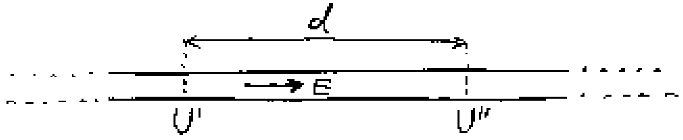
Napomena:

Električna polja s jedne i druge strane granične plohe dvaju sredstava mogu biti različita po iznosu i smjeru. Okomite komponente se razlikuju ako postoji neka površinska gustoća naboja a paralelne komponente su uvijek jednake (jer ne postoji uzrok za njihovu promjenu).

U gornjem primjeru je okomita komponenta električnog polja unutar žice nula a tik izvan žice je $E_\perp = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Ali $E_\parallel$ tik izvan žice jednako je E unutar žice.

Promjena potencijala duž vodiča kojim teče struja

Budući da duž vodiča postoji električno polje $E \neq 0$ onda postoji i razlika potencijala



$$U' - U'' = Ed$$

Potencijal se stalno smanjuje ($U' > U''$) duž vodiča u smjeru u kojem je električno polje E.

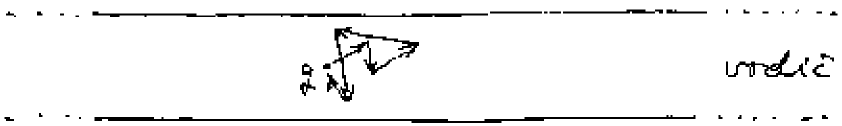
Na taj način promijeni se potencijal od U_1 na jednome kraju vodljive žice do U_2 na drugome njenom kraju.

Napomena:

U danome presjeku žice sve točke su na istome potencijalu (usp. U') zato jer električno polje unutar žice nema komponentu paralelnu presjeku.

2. Gibanje naboja u vodiču

a) $E = 0$ (nema električnog polja)



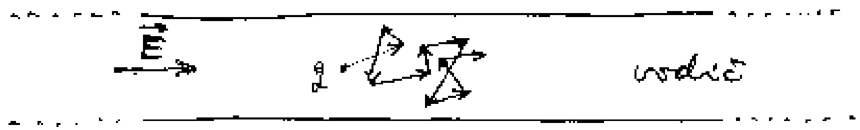
Naboj izvodi termičko gibanje. Uslijed sudara s atomima (ionima) u vodiču naboj svaki put promijeni smjer gibanja.

Gledano u duljem vremenskom periodu naboj se giba nasumično. Nema globalnog napredovanja naboja niti u jednome smjeru, tj. nema električne struje.

Vremenski usrednjena brzina (vektorski)

$$\overline{\vec{v}} = 0$$

b) $\vec{E} \neq 0$ (gibanje u električnom polju)



Pored termičkog gibanja postoji i neko napredovanje naboja duž smjera Coulombove sile na naboj $q\vec{E}$.

Kada ne bi bilo sudara čestica mase m koja nosi naboj q ubrzavala bi se trajno prema II. Newt. zak.

$$m\vec{a} = q\vec{E}$$

Stalno sudaranje ometa ubrzavanje naboja u jednome smjeru. To je ekvivalentno sili trenja kod gibanja tijela u fluidu.

Zato se čestice s nabojem ne ubrzavaju trajno nego dosegnu neku konstantnu srednju brzinu.

Neka je τ srednje vrijeme između dva uzastopna sudara. U tome intervalu vremena naboj se ubrzava akceleracijom $\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$ pa dosegne brzinu

$$\overline{\vec{v}} = \vec{a}\,\tau = \frac{q\vec{E}\tau}{m}$$

U sudaru naboj gubi usmjerenu brzinu i zatim počinje ubrzanje do sljedećeg sudara, itd.

Jakost struje i gustoća struje

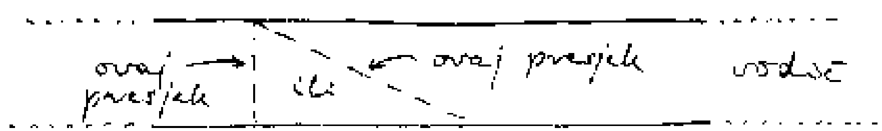
Definicija jakosti struje

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

ΔQ – količina naboja koja prođe kroz poprečni presjek vodiča u vremenu Δt.

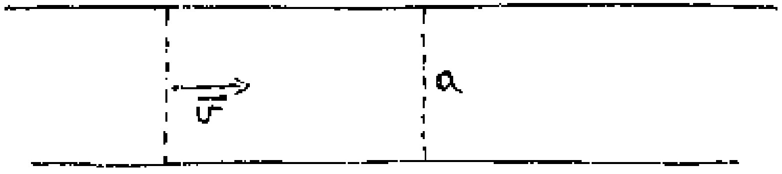
Napomena:

Svejedno je koji presjek vodiča uzmemo, tj.



Sjetimo se definicije toka (npr. vode)

$$\vec{v}\cdot\vec{a}' = v\underbrace{a'\cos\theta}_{a} = va = \vec{v}\cdot\vec{a}$$



Ako volumen $\Delta V = a\Delta l$ prođe kroz presjek u vremenu Δt

$\dfrac{\Delta V}{\Delta t} \rightarrow$ tok (npr. vode) u m^3/s

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{a\Delta l}{\Delta t} = va = \vec{v}\cdot\vec{a}$$ tok u m^3/s kroz a

Ako imamo čestice s nabojem q, onda u volumenu ΔV imamo naboj

$$\Delta Q = Nq\Delta V$$

$N \rightarrow$ gustoća čestica (broj čestica u jedinici volumena)

Jakost struje

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Nq\Delta V}{\Delta t} = \underbrace{Nq\vec{v}}_{\vec{j}}\cdot\vec{a}$$

$\vec{j}$ gustoća struje (definicija)

$$I = \vec{j}\cdot\vec{a}$$

Napomena:

Ne može se pisati $\vec{j} = \dfrac{I}{\vec{a}}$ jer dijeljenje s vektorom nema smisla!!

$$\vec{j} = Nq\vec{v} = \underbrace{Nq\frac{q\tau}{m}}_{\sigma}\vec{E}$$

σ vodljivost (definicija)

$$\boxed{\vec{j} = \sigma\vec{E}}$$ mikroskopski oblik Ohmovog zakona

Smjer struje

Obratimo pažnju najprije na smjer gibanja naboja, tj. na izraz za brzinu

$$\vec{v} = \frac{q\tau}{m}\vec{E}$$

Ako uzmemo da se gibaju pozitivni naboji ($q>0$) vidimo da brzina $\vec{v}$ ima isti smjer kao i električno polje $\vec{E}$.
Ako se gibaju negativni naboji ($q<0$), onda je njihova brzina $\vec{v}$ u suprotnom smjeru od $\vec{E}$.

Međutim, gustoća struje $\vec{j}$ je dana izrazom

$$\vec{j} = Nq\vec{v}$$

Ovdje se pojavljuje još jednom naboj q. Matematički gledano, vektor $\vec{j}$ ima smjer kao $\vec{v}$ ako je $q>0$, a suprotan smjer ako je $q<0$.

Ugrađujemo ovaj matematički rezultat u fizikalnu sliku i kažemo da nam gibanje pozitivnih naboja u jednome smjeru daje istu struju kao gibanje negativnih naboja u suprotnom smjeru.

Stoga uvijek smatramo da struja teče u smjeru električnog polja $\vec{E}$ u vodiču, odnosno od točke s višim potencijalom prema točki s nižim potencijalom duž vodiča.

Jedinica za jakost struje je amper (1A).

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \implies 1A = 1C\,s^{-1}$$

Vodičem teče struja od 1A ako kroz poprečni presjek tog vodiča prođe naboj od 1C u intervalu vremena od 1s.

Primjer

Uzmimo žicu od dobrog vodiča (npr. bakar) poprečnog presjeka $1\,mm^2$. Neka njime teče struja od 10A. (To je dosta velika struja za tako tanku žicu!!)

uvećana slika vodiča

U volumenu $\Delta V = \Delta l \cdot 1\,mm^2$ nalazi se naboj $\Delta Q = 10C$ koji prođe kroz poprečni presjek za 1s. Nađimo duljinu Δl.

Broj pokretnih elektrona po jedinici volumena u bakru iznosi

$$N \approx 8\cdot 10^{22}\ \text{elektrona}/cm^3 = 8\cdot 10^{19}\ \text{elektrona}/mm^3$$

Naboj elektrona je $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$ pa imamo

$$eN\Delta V = \Delta Q$$

$$(1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 8 \cdot 10^{19}\,C\,mm^{-3})\,\Delta l \cdot 1\,mm^2 = 10\,C$$

$$\Delta l \approx 0{,}8\,mm$$

Prema tome, brzina gibanja elektrona iznosi

$$\bar{v} = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{0{,}8\,mm}{1\,s} = 0{,}8\,mm\,s^{-1}$$

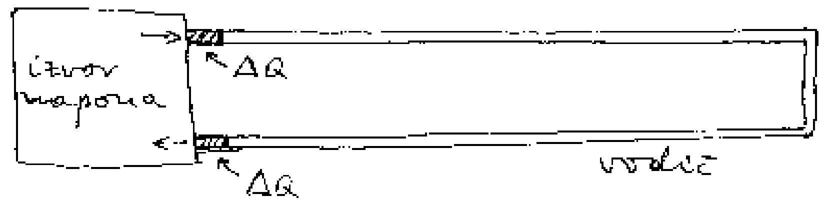
Brzina gibanja elektrona je jako malena (oko milimetar u sekundi)!!

Ako kroz isti vodič teče struja od 1A (umjereno jaka struja), brzina elektrona je deset puta manja. Kod slabih struja od npr. 10mA, brzina elektrona je svega $\bar{v} \approx 0{,}8\,\mu m\,s^{-1}$ (oko mikrometar u sekundi)!!

Napomena

Iako je brzina elektrona jako malena, struja se uspostavi gotovo trenutno u cijelome vodiču koji može biti čak i kilometrima dugačak od jednog do drugog pola izvora napona.

Kada naboji krenu iz izvora napona u vodič, oni ne ulaze u "prazan" vodič nego u vodič koji je već ispunjen mnoštvom pokretljivih elektrona. Zamislimo da je od trenutka spajanja ušao iz izvora napona u vodič neki naboj ΔQ.



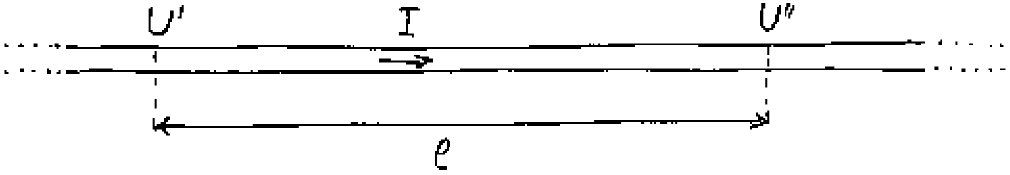
Praktički istodobno se pomiču svi naboji u vodiču tako da iz njega na drugome kraju izađe isto toliki naboj ΔQ koji uđe u izvor napona na drugome polu. Vodič u cijelosti uvijek ima istu količinu pokretljivih elektrona.

Termičko gibanje elektrona

Valja napomenuti da je termička brzina elektrona između dva sudara s atomima vrlo velika (oko $10^5\,ms^{-1}$ na sobnoj temperaturi), međutim ona nasumično mijenja smjer nakon svakog sudara pa je njena srednja vektorska vrijednost nula.

3. Ohmov zakon u makroskopskom obliku

Razmotrimo struju koja teče kroz vodljivu žicu poprečnog presjeka S.



Odaberimo proizvoljni segment duljine l. Između njegovih krajeva postoji <u>napon</u> (razlika potencijala)

$$V = U' - U'' = El$$

Struju možemo izraziti pomoću prethodnih relacija

$$I = jS = \sigma E S = \sigma \frac{V}{l} S = \frac{V}{\frac{1}{\sigma}\frac{l}{S}} = \frac{V}{\rho \frac{l}{S}} = \frac{V}{R}$$

Inverzna vrijednost električne vodljivosti naziva se <u>električna otpornost</u>

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

Električna vodljivost (σ) i otpornost (ρ) ovise o vrsti materijala od kojega je načinjena vodljiva žica (npr. bakar, aluminij, srebro, itd.)

<u>Električni otpor</u> vodljive žice koja ima duljinu l i poprečni presjek S a načinjena je od materijala koji ima otpornost ρ iznosi

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Uz takvu definiciju otpora imamo

$$\boxed{I = \frac{V}{R}}$$

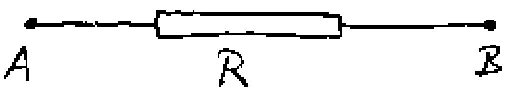
To je <u>Ohmov zakon</u> u makroskopskom obliku.

Jedinica za otpor naziva se 1 om u čast njem. fizičara Ohma (19. st.). Iz Ohmova zakona slijedi

$$1\Omega = 1VA^{-1}$$

Vodič ima otpor od 1Ω ako dovođenjem napona od $1V$ između njegovih krajeva, poteče kroz njega struja od $1A$.

<u>Simboličko označavanje otpora</u>

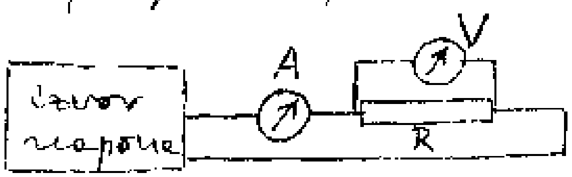


To je idealizacija u kojoj smatramo da spojne žice nemaju otpor.

U praksi se za spojne žice uzima debela žica (veliki poprečni presjek S) od bakra koji ima veliku vodljivost σ.
Otpornik se sastoji od tanke žice (malen S) načinjene od materijala velike otpornosti ρ. Otpornik može imati žicu velike duljine l tako da otpor R bude što veći.

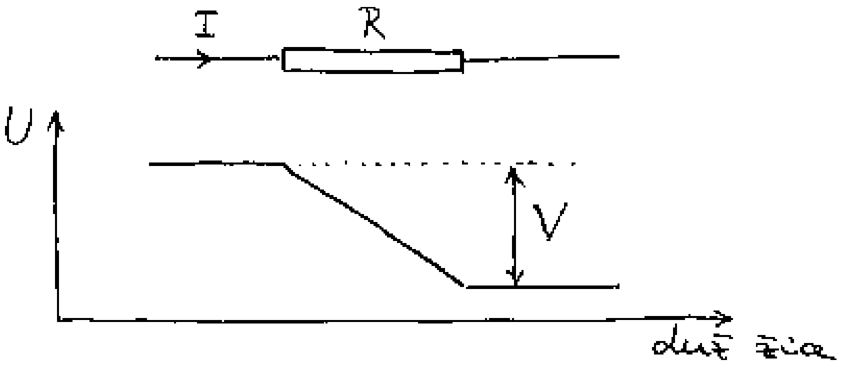
Pokus:

provjeravanje Ohmova zakona



Pomoću ampermetra mjerimo struju I, a pomoću voltmetra napon na otporniku.

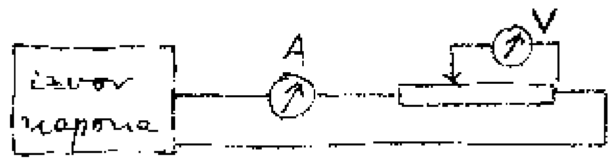
Možemo prikazati pad potencijala duž otpornika.



Na spojnim žicama je pad potencijala zanemarivo malen.

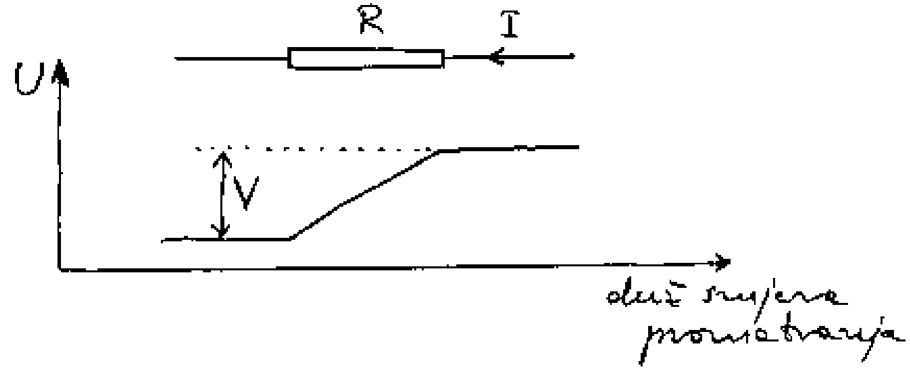
Pokus:

promatranje napona na dijelu otpornika pomoću kliznog kontakta.



Napomena:

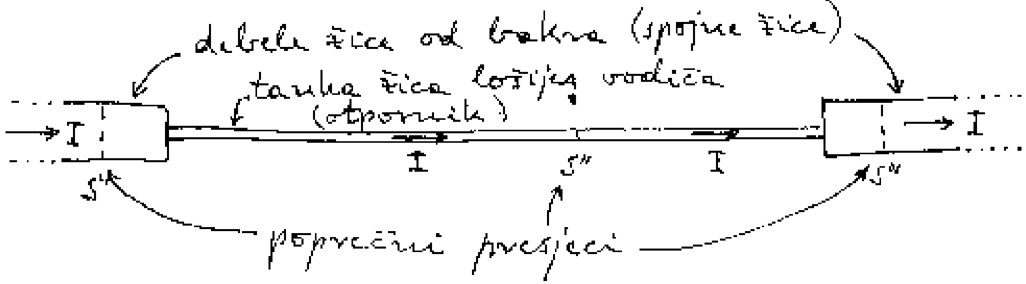
Struja uvijek teče od točke s višim potencijalom prema točki s nižim potencijalom. Stoga gledajući promjenu potencijala duž smjera suprotnog struji dobivamo porast potencijala.



Pokus:

promjena polariteta na izvoru napona
(promjena smjera struje)

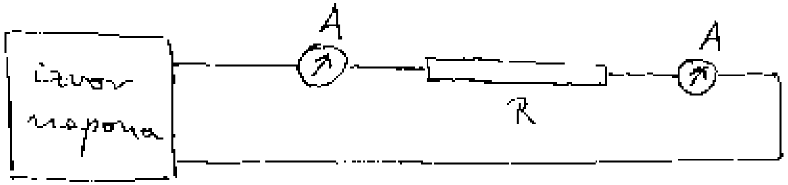
Struja ima isti iznos u spojnim žicama s jedne i druge strane otpornika kao i u samome otporniku.



Naboj koji uđe kroz poprečni presjek S' ne može nestati (zakon o očuvanju naboja!). Isto toliki naboj mora proći i kroz poprečni presjek S'' jer bi se inače naboj gomilao između S' i S''. Jednako vrijedi i za poprečni presjek S''', odnosno za bilo koji poprečni presjek.

Kroz svaki poprečni presjek prolazi jednaka struja $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$.

Pokus



provjera jednakosti struja s obje strane otpornika

4. Električna vodljivost u raznim materijalima

Električna vodljivost ovisi o broju pokretljivih naboja po jedinici volumena (N) i srednjem vremenu (τ) između uzastopnih sudara naboja s atomima u vodiču.

$$\sigma = \frac{N q^2 \tau}{m}$$

U metalima su pokretni elektroni pa je $q = e$ (naboj elektrona) a m je masa elektrona.

Kod dobrih vodiča (npr. bakar, srebro, zlato) imamo

$$N \approx (\text{od } 5 \text{ do } 8)\,10^{22} \text{ pokretnih elektrona}/\text{cm}^3$$

Kod lošijih vodiča taj je broj manji pa je stoga i njihova vodljivost manja.

Vrijeme τ naziva se još i vrijeme raspršenja (engl. scattering time). U dobrim vodičima ono iznosi tipično (na sobnoj temperaturi)

$$\tau \approx 10^{-14}\,\text{s}$$

Vodljivost dobrih vodiča je reda veličine

$$\sigma \approx 5 \cdot 10^{7}\,\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$$

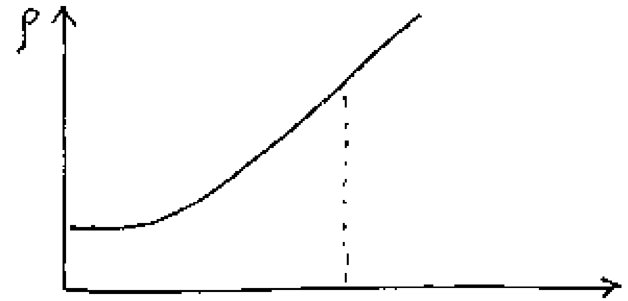
Otpornost je inverzna vrijednost vodljivosti

$$\rho \approx 2 \cdot 10^{-8}\,\Omega\text{m}$$

Vrijeme raspršenja τ ovisi o temperaturi vodiča. Na višoj temperaturi dolazi do bržeg raspršenja (sudara) naboja s atomima u metalu, tj. τ se skraćuje.

Tipična ovisnost u metalima je $\tau \propto \frac{1}{T}$ (T je apsolutna temperatura mjerena u stupnjevima kelvina K.) Stoga je otpornost linearno ovisna o temperaturi kod metala

$$\rho \propto T$$



Na jako niskim temperaturama ($T < 20K$) dolazi do zasićenja.

Pokus:

promjena otpora ($R = \rho \frac{\ell}{S}$) s temperaturom vodiča

Primjer lošeg vodiča je nikrom, tj. legura nikal-krom (Ni-Cr), kojoj je otpornost oko 50 puta veća od otpornosti bakra

$$\rho_{Ni-Cr} \approx 10^{-6}\,\Omega m$$

Nikrom se upotrebljava kao otporna žica u izradi otpornika.

Primjer spojnih žica i otpornika

Neka je spojna žica od bakra duljine $\ell = 1m$ i poprečnog presjeka $S = 1mm^2 = 10^{-6}m^2$. Njen otpor je

$$R = \rho_{Cu}\frac{\ell}{S} = 2\cdot 10^{-8}\,\frac{1}{10^{-6}} = 0{,}02\,\Omega \quad (\text{jako malen!})$$

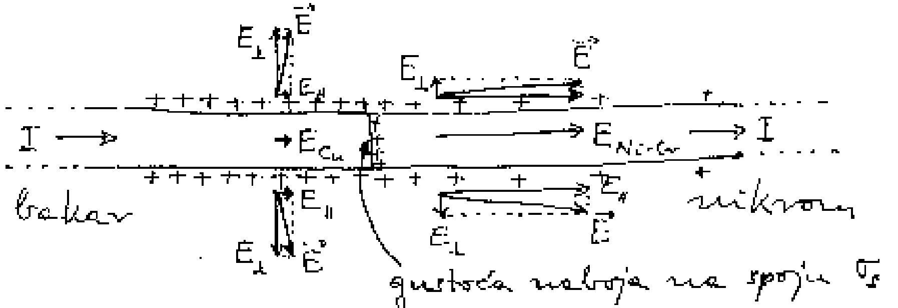
Ako se otpornik sastoji od žice nikroma duljine $\ell = 10m$ i uz to vrlo tanke $S = 0{,}01\,mm^2 = 10^{-8}m^2$, njegov je otpor

$$R = \rho_{Ni-Cr}\frac{\ell}{S} = 10^{-6}\cdot\frac{10}{10^{-8}} = 1000\,\Omega = 1k\Omega.$$

U ovome slučaju otpore spojnih žica možemo zanemariti prema otporu otpornika, tj. imamo nestinu slučaj koji je blizak idealizaciji u kojoj spojne žice imaju otpor nula.

Električno polje kod spoja dobrog i lošeg vodiča

Radi jednostavnosti razmotrimo najprije spoj dvaju vodiča jednakih poprečnih presjeka.



Kroz oba vodiča mora teći ista struja I. Budući da su poprečni presjeci jednaki, moraju i gustoće struje $\vec{j}$ biti jednake u oba vodiča

$$\vec{j}_{Cu} = \sigma_{Cu}\vec{E}_{Cu} = \sigma_{Ni-Cr}\vec{E}_{Ni-Cr} = \vec{j}_{Ni-Cr}$$

Budući da je vodljivost nikroma mnogo manja od vodljivosti bakra (oko 50 puta), mora električno polje u žici nikroma biti mnogo veće od onog u bakru (oko 50 puta).

Napomena:

Gornja slika je nerealistična. Električno polje u žici bakra bi moralo biti gotovo zanemarljivo ili bi pak električno polje u nikromu trebalo prikazati puno duljom strelicom.

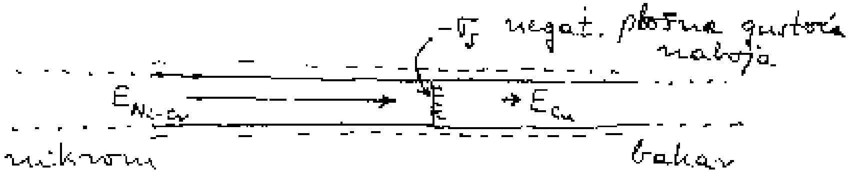
Električno polje tik izvan površine bakrene žice je praktički okomito na površinu vodiča zato jer je površinska gustoća naboja gotovo jednolika. Zbog velike vodljivosti bakra (σ_{Cu}) dovoljno je vrlo maleno električno polje ($\vec{E}_{Cu}$) da se ostvari potrebna gustoća struje.

Na površini nikroma ostvari se vrlo promjenljiva površinska gustoća naboja koja daje veliku komponentu polja $E_\parallel$ (paralelno površini žice nikroma). U nikromu je potrebno veliko električno polje ($\vec{E}_{Ni-Cr}$) da bi se ostvarila ista gustoća struje uz malenu vodljivost (σ_{Ni-Cr})

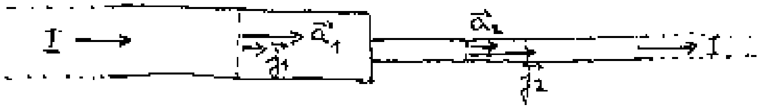
Na plohi spoja žice bakra s nikromom pojavi se plošna gustoća naboja (σ_s). Ona je neophodno vezana uz skok električnog polja $\vec{E}_{Cu}$ s jedne strane na vrijednost $\vec{E}_{Ni-Cr}$ s druge strane te poprečne plohe ($E_{Ni-Cr} - E_{Cu} = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_0}$).

Napomena:

Na drugom kraju nikromove žice imamo spoj na bakrenu žicu



Ako spajamo deblju žicu s tanjom žicom, dolazi do promjene gustoće struje $\vec{j}$ jer sama struja I mora biti jednaka u svakom poprečnom presjeku

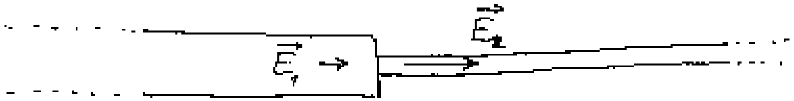


$$I = \vec{j}_1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{j}_2 \cdot \vec{a}_2 = I$$

Na većem poprečnom presjeku ($\vec{a}_1$) gustoća struje je manja ($\vec{j}_1$). U tanjoj žici (manji $\vec{a}_2$) mora biti veća gustoća struje ($\vec{j}_2$).

Čak i kada su deblja i tanja žica od istoga materijala (npr. od bakra), tj. imaju istu vodljivost σ, električna polja su različita u žicama.

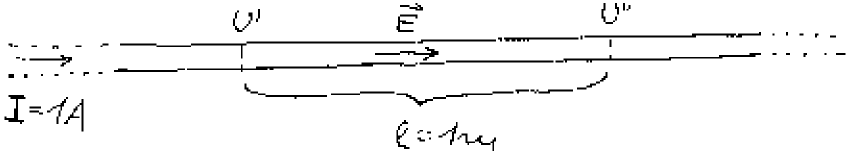
$$\left.\begin{aligned} \vec{j}_1 &= \sigma \vec{E}_1 \\ \vec{j}_2 &= \sigma \vec{E}_2 \end{aligned}\right\} \text{ za } \vec{j}_1 \ll \vec{j}_2 \implies \vec{E}_1 \ll \vec{E}_2$$



Ako je deblja žica od boljeg vodiča a tanja od lošijeg ($\sigma_1 \gg \sigma_2$), onda se razlika u električnim poljima još poveća.

Izračun električnog polja

Uzmimo žicu od bakra poprečnog presjeka od $1\,mm^2$ kojim teče struja od 1A.



Ranije smo izračunali da 1m duljine bakre bakrene žice ima otpor $R = 0{,}02\,\Omega$.
Iz Ohmova zakona slijedi da je napon (razlika potencijala na krajevima segmenta duljine 1m)

$$V = U' - U'' = IR = 1 \cdot 0{,}02 = 0{,}02\,V \text{ (volta)}$$

Iz odnosa električnog polja i razlike potencijala ($dU = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$) slijedi

$$V = U' - U'' = E\ell \implies E = \frac{0{,}02\,V}{1m} = 0{,}02\,Vm^{-1}$$

Vidimo da je za tjeranje struje od 1A u ovom vodiču od bakra dovoljno jako malено električno polje. Kada bi se radilo o žici od nikroma iste debljine, bilo bi potrebno polje od $1\,Vm^{-1}$, što je još uvijek maleno polje. Čak i za tanje žice električno polje nije jako veliko.

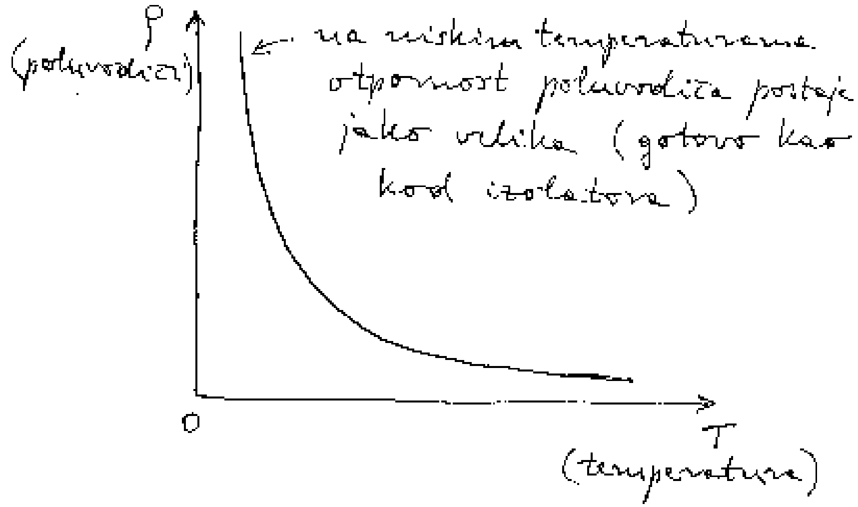
Poluvodiči

Kod poluvodiča su elektroni uglavnom u valentnoj vrpci u kojoj nisu pokretljivi. Tek manji broj elektrona nalazi se u pobuđenom stanju u vodljivoj vrpci.

Grafit (polikristalinični ugljik) ima otpornost $\rho \approx 10^{-4}\,\Omega m$ (dva reda veličine više od nikroma). Upotrebljava se za izradu otpornika u području $k\Omega$ i $M\Omega$.

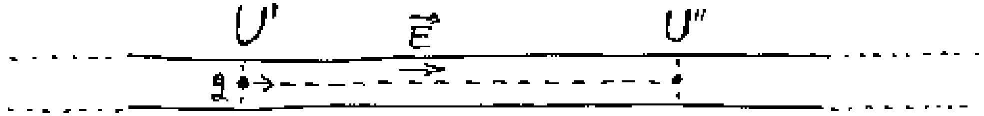
Čisti germanij i silicij su poluvodiči veće otpornosti ($\rho \approx 10^{-2}\,\Omega m$). Dopiranjem se otpornost može mijenjati.

Temperaturna ovisnost otpornosti poluvodiča je potpuno drukčija od otpornosti metala



5. Trošenje električne energije

Razmotrimo još jednom gibanje naboja u vodljivoj žici (uvećana slika).



Kada se naboj q nalazi na mjestu gdje je potencijal U', njegova potencijalna energija je $E_p' = qU'$.

Na naboj djeluje električno polje $\vec{E}$ koje ima smjer od većeg prema nižem potencijalu. Kada bi se naboj mogao slobodno gibati, sila $\vec{F} = q\vec{E}$ bi ga ubrzavala tako da bi dobivao kinetičku energiju.

Međutim, čestica koja nosi naboj (npr. elektron) sudara se s atomima i predaje im svoju kinetičku energiju. Ta se energija pretvara u <u>toplinu</u> vodiča.

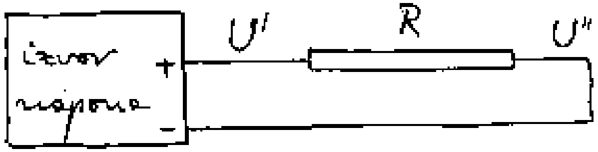
Kada naboj dođe do točke s potencijalom U'', njegova se potencijalna energija smanji za

$$\Delta E_p = E_p' - E_p'' = q(U' - U'') = qV$$

Ta energija je predana atomima vodiča u obliku topline.

Možemo reći da se gibanjem naboja u vodiču u kojem teče struja troši njegova potencijalna energija i pretvara u toplinu.

Kroz vodič teče mnoštvo naboja. Interesira nas koliko se električne energije pretvori u toplinu u nekom otporniku u jedinici vremena.



Dovodne žice imaju zanemariv otpor (idealizacija). To znači da duž njih nema pada potencijala. Svi naboji u žici lijevo od otpornika nalaze se na potencijalu U' a oni u desnoj žici i natrag do izvora napona su na potencijalu U''.

Jakost struje smo definirali kao omjer

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

gdje je ΔQ količina naboja koja je prošla kroz neki poprečni presjek vodiča u vremenu Δt.

Razmotrimo prolazak naboja na ulazu u otpornik. Naboji ΔQ su prethodno bili u dovodnoj žici na potencijalu U' i ušli su u otpornik u vremenu Δt.

No isto toliko naboja ΔQ mora u vremenu Δt izaći iz otpornika na desnome kraju (u protivnom bi se naboji gomilali u otporniku). Ti naboji dolaze u žicu na potencijalu U''.

Ukupni učinak je kao da su naboji ΔQ prešli s potencijala U' na U'' pa su izgubili potencijalnu energiju

$$\Delta E_p = \Delta Q\,(U' - U'') = \Delta Q \cdot V$$

Potrošena električna energija u jedinici vremena naziva se <u>snaga</u>

$$P = \frac{\Delta E_p}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} V = I V$$

Uzimajući u obzir Ohmov zakon $V = IR$ možemo pisati snagu

$$\boxed{P = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R}}$$

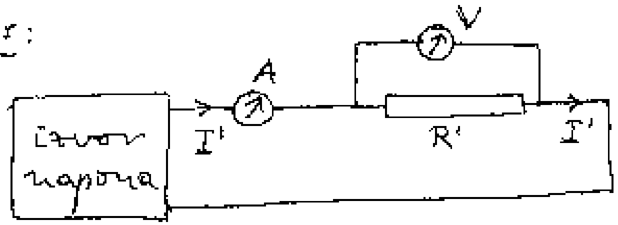
<u>Napomena:</u>

U otporniku ima mnogo naboja. Međutim, njihov broj i raspored od višeg prema nižem potencijalu nije se promijenio u vremenu Δt. Naboji u gibanju stupaju na mjesta svojih prethodnika. Stoga je ukupna potencijalna energija svih naboja u otporniku konstantna. Promjenu možemo svesti samo na naboje ΔQ koji su ušli i izašli iz otpornika.

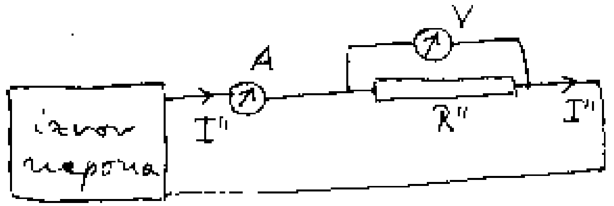
Promjena otpornika

Ako na isti izvor napona spajamo različite otpornike, mijenja se struja u krugu.

Pokus:



$V = I'R'$



$V = I''R''$

Izvor napona (npr. baterija ili akumulator) nije izvor stalne struje nego stalnog napona!! Struja u krugu se prilagodi priključenom otporu.

Snaga koju troši otpornik također se mijenja

$$P' = I'V = \frac{V^2}{R'}$$

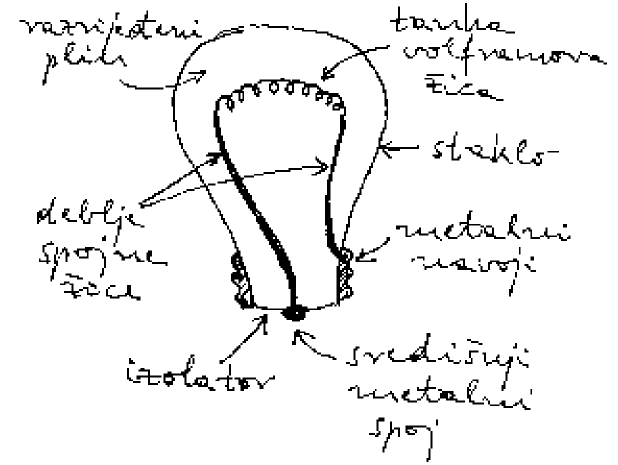
$$P'' = I''V = \frac{V^2}{R''}$$

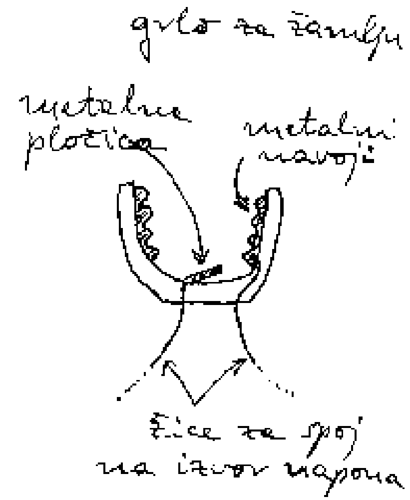
Što je otpor manji troši se veća snaga jer je uz isti napon struja veća!!

Ako priključimo otpornik zanemarivo malenog otpora, nastane <u>kratak spoj</u> u kojemu poteče ogromna struja, odnosno troši se ogromna snaga. Realni izvori napona ne mogu dati ogromne struje, odnosno ne mogu davati takvu snagu nego se pokvare. Radi sprječavanja kvara ugrađuju se osigurači koji prekidaju strujni krug kada struja poraste iznad neke zadane vrijednosti.

Primjer žarulje kao otpornika

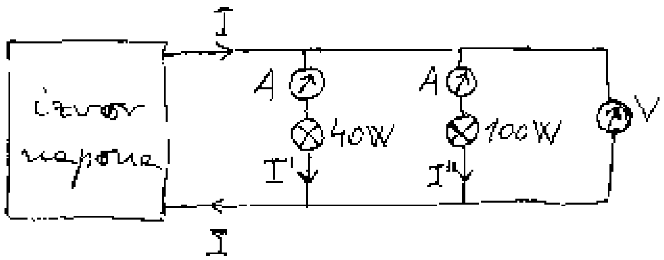
Žarulja ima tanku žicu od volframa (engl. tungsten) koja igra ulogu otpornika. Prolaskom jače struje kroz žarulju volframova žica se jako ugrije i svijetli. Volfram se upotrebljava jer izdrži visoke temperature (talište iznad 3000°C).





Žarulja je obilježena snagom koja se u njoj troši kada je priključena na napon od 220 V. Veću snagu ima žarulja s manjim otporom volframove žice (deblja žica).

Pokus:



$I' = \frac{V}{R'}$

$I'' = \frac{V}{R''}$

Kod spoja u paralelu obje žarulje su na istom naponu V. Struja kroz svaku žarulju ovisi o otporu volframove žice u njoj.

$R'' < R' \implies I'' > I' \implies P'' > P'$

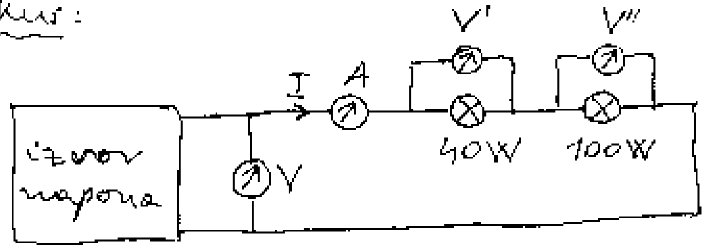
Žarulja od 100W jače svijetli

Napomena:

U rasvjetnoj mreži žarulje se uvijek uključuju u paralelu, tj. na isti napon!! Stoga žarulje na kojima je zapisana veća snaga uistinu jače svijetle.

Ako žarulje spojimo u seriju (to se ne radi u rasvjetnoj mreži!!), onda kroz njih teče ista struja (I), ali su naponi između spojeva na žarulju različiti ($V' \neq V''$).

Pokus:



$V' = IR'$

$V'' = IR''$

Na žarulji veće snage je manji napon zbog manjeg otpora volframove žice u njoj.

$R'' < R' \implies V'' < V' \implies P'' < P'$

Žarulja od 100W slabije svijetli

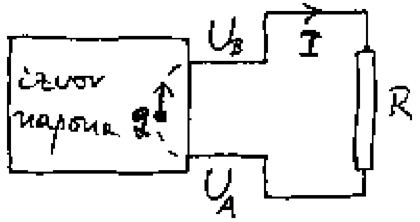
Napomena:

U gornjim primjerima spajanja žarulja u paralelu i seriju napon na priključnicama izvora je uvijek isti ali struja koja izlazi iz izvora nije ista.

O izračunavanju struja u serijskom i paralelnom spoju otpornika bit će riječi kasnije u ovome poglavlju.

6. Elektromotorna sila

Za pokretanje električne struje kroz neki vodič (otpornik) potreban je izvor napona.



U vanjskom dijelu strujnog kruga naboj q (pretpostavimo $q>0$) giba se od višeg potencijala U_B kroz otpornik R do nižeg potencijala U_A. Time naboj gubi svoju potencijalnu energiju koja se pretvara u toplinu u otporniku.

Međutim, unutar izvora mora postojati neka sila koja tjera naboj od nižeg potencijala U_A prema višem U_B. Rad te sile na putu naboja kroz izvor povećava potencijalnu energiju naboja.

Prema tome, naboji dobivaju na neki način potencijalnu energiju u izvoru a troše je na toplinu u potrošaču (otporniku R).

Napomena:

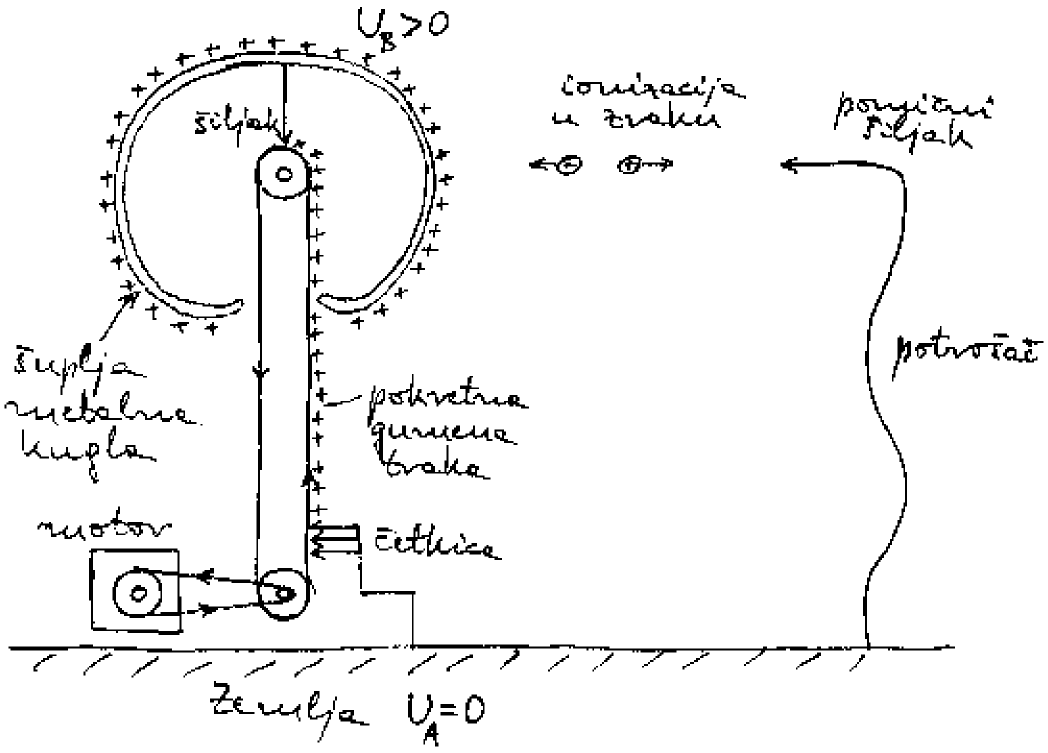
Pogrešno je reći da se "struja troši" u otporniku. Struja I je jednaka ispred i iza otpornika (jer je $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$). Troši se električna potencijalna energija koja je stvorena u izvoru napona.

Koja je priroda sile u izvoru napona?

Razmotrimo Van de Graaffov elektrostatski stroj kao primjer izvora napona.

Pokus:

rad Van de Graaffova stroja



Motor pokreće gumenu traku. Trenjem između gumene trake i četkica dolazi do nabijanja površine gumene trake pozitivnim nabojima.

Gornji šiljak preuzima dovedene naboje i oni odmah odlaze na vanjsku stijenku šuplje metalne kugle. Tako se ona nabija.

Gumena traka fizički prenosi naboje od češljića koja je na nižem potencijalu ($U_A = 0$) do metalne kugle koja je na višem potencijalu ($U_B > 0$). Time naboji dobivaju potencijalnu energiju.

Treba uočiti da motor mora davati silu za pokretanje gumene trake s nabojima (čak i ako zanemarimo razna trenja u ležajima osovine i slično). Naime, naboji na metalnoj kugli odbijaju naboje na gumenoj traci koji kreću od češljića prema kugli. Sila motora mora svladavati ovu odbojnu silu između naboja i omogućiti pokretanje gumene trake.

Napomena:
Gumena traka je izolator. Naboji se ne mogu pomicati po njenoj površini nego putuju zajedno s površinom kao da su zalijepljeni.

U idealiziranim uvjetima kada ne bi bilo ionizacije u zraku, nabijanje metalne kugle bi se nastavljalo a time bi rasla i odbojna sila na naboje na gumenoj traci.
Konačno bi se proces ipak zaustavio kada motor ne bi više mogao dati dovoljno jaku silu za daljnje pokretanje gumene trake.
Tada bi metalna kugla dosegla neki maksimalni potencijal U_{Bmax}.

U praksi se to ne događa jer postoji uvijek neka ionizacija u zraku i nastaje gibanje tih iona koje predstavlja struju.
Ovu struju možemo pospješiti primicanjem šiljka koji je drugim krajem uzemljen.
Pokus:

primicanje šiljka metalnoj kugli Van de Graaffova stroja

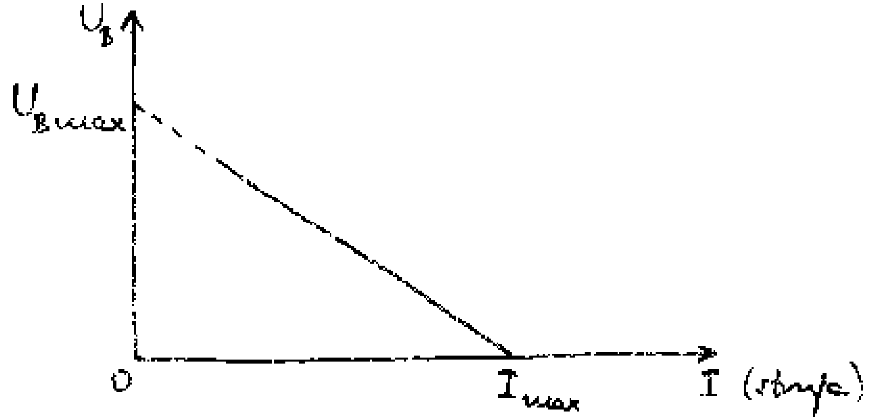
Zašto se potencijal kugle U_B smanjuje kod primicanja šiljka?

Ako se poveća odvođenje naboja s kugle, gumena traka koja dovodi nove naboje nastoji nadoknaditi gubitak naboja na kugli.
Međutim, količina naboja koje traka može donositi u jedinici vremena ovisi o brzini pokretanja trake i količini naboja koju češalj može trenjem nanijeti na traku.

Ako gumena traka ne može nadoknaditi u cijelosti povećani gubitak naboja na kugli, onda se ukupni naboj kugle smanji a time padne i njen potencijal U_B. No smanjivanjem potencijala U_B smanjuje se i odvođenje naboja putem iona.

Brzo se uspostavi novo stanje u kojem potencijal U_B poprimi takvu vrijednost da se izjednači gubitak naboja putem iona s dolaskom novih naboja putem gumene trake.

Kvalitativno možemo prikazati ovisnost potencijala U_B o struji odvođenja naboja s kugle putem iona.

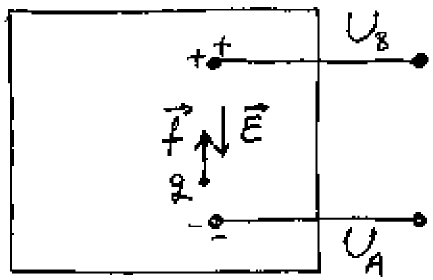


Idealiziranu vrijednost U_{Bmax} bismo mogli postići kada bi struja odvođenja naboja s kugle bila nula, tj. kada ne bi bilo ionizacije.

Što je struja odvođenja veća, to je U_B manji. Konačno, ako izravno spojimo vodljivom žicom kuglu sa Zemljom (kratak spoj) dobivamo $U_B = 0$. Struja I_{max} ovisi o maksimalnoj sposobnosti češlja i gumene trake da dovode naboje na kuglu. To je <u>struja kratkog spoja</u> izvora.

Općenito, svaki izvor napona mora imati neki mehanizam kojim se unutar izvora naboj q prebacuje s nižeg na viši potencijal, tj. daje mu se potencijalna energija.

Shematski možemo prikazati ovako:



Unutarnji mehanizam mora djelovati silom $\vec{f}$ na naboj q (pretpostavljamo $q>0$) i prenositi ga od pola A do pola B.

Međutim, gomilanjem naboja na polovima raste i električno polje $\vec{E}$ koje oni stvaraju pa raste i sila $q\vec{E}$ kojom oni nastoje zaustaviti gibanje naboja.

Ravnoteža se uspostavi kada je

$$\vec{f} + q\vec{E} = 0$$

tj. ukupna sila na naboj q iščezava pa prestane daljnje gibanje naboja.

Tada se postigne maksimalna razlika potencijala (napon) između polova.

Kod Van de Graaffove stroja silu $\vec{f}$ daje motor koji pokreće gumenu traku s nabojima. U drugim izvorima napona sila $\vec{f}$ potiče iz drugih uzroka.

Logično bi bilo silu $\vec{f}$ nazvati elektromotornom silom jer ona pokreće naboje. Međutim, povijesno se uobičajilo upotrebljavati naziv <u>elektromotorna sila</u> za izraz

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q}\int_A^B \vec{f}\cdot d\vec{r} = V_{max}$$

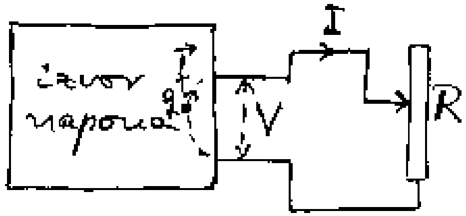
Ako sila $\vec{f}$ pomiče naboj q na putu od A do B, onda izvrši rad dan gornjim integralom. Taj rad se utroši na povećanje potencijalne energije naboja. Dijeljenjem s nabojem dobivamo razliku potencijala (napon) između točaka A i B.

Elektromotorna sila nekog izvora definira se kao maksimalan napon koji taj izvor može postići.

Maksimalan napon na priključnicama izvora ostvaruje se kada na izvor nije priključen nikakav potrošač, tj. kada nema odvođenja naboja s pozitivnog pola i preko otpornika vraćanja na negativni pol.

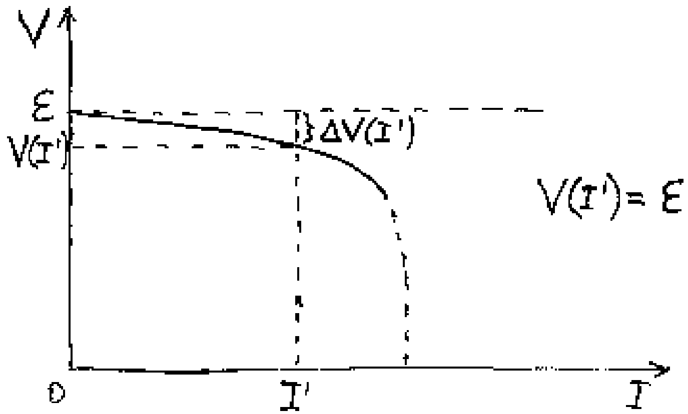
Ako na izvor priključimo potrošač tako da poteče struja, napon se smanji za neki iznos ΔV koji ovisi o jakosti struje.

$$V = \mathcal{E} - \Delta V$$



Pomoću kliznog otpornika možemo mijenjati jakost struje, tj. odvođenje naboja s polova izvora. Mehanizam koji unutar izvora uzrokuje silu $\vec{f}$ nastoji nadoknaditi gubitak naboja, no ako ne uspije u potpunosti, onda se razlika potencijala između polova (napon) smanjuje.

Smanjenje napona je općenito nelinearna funkcija karakteristična za dani izvor.



$$V(I') = \mathcal{E} - \Delta V(I')$$

Za neku struju I' ostvari se smanjenje napona $\Delta V(I')$ u odnosu na maksimalni napon $\mathcal{E}$ (elektromotorna sila).

Kod manjih iznosa struje smanjenje napona se obično mijenja linearno sa strujom pa možemo pisati

$$\Delta V(I) = kI$$

Faktor proporcionalnosti k odgovara nagibu pravca što ga daje $V(I)$ za malene struje I u prethodnom grafu.

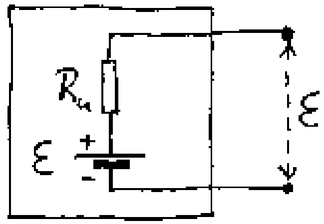
Iznos konstante k ovisi o tome koliko je u danom izvoru unutarnji mehanizam u stanju efikasno nadoknađivati gubitak naboja na polovima. Kod efikasnog nadoknađivanja, k je maleno jer je smanjenje napona ΔV maleno.

Ukupno uzevši, karakteristika nekog izvora napona dane su dvjema veličinama: maksimalnim naponom $\mathcal{E}$ i faktorom k.

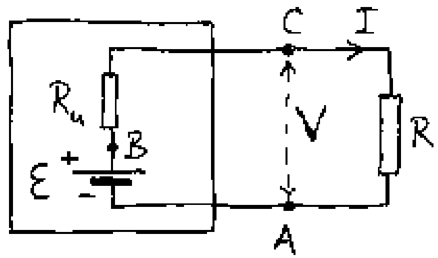
Faktor k očito ima dimenziju otpora jer množen sa strujom daje napon. Stoga možemo formalno pisati $k = R_u$, tj. kao da je pad napona ΔV nastao na nekom zamišljenom otporu R_u unutar izvora.

$$\Delta V = R_u I$$

U shematskom prikazu izvora napona možemo staviti kao da je unutarnji otpor R_u spojen u seriju s idealnim izvorom elektromotorne sile $\mathcal{E}$.



Kada potrošač nije priključen, napon na priključnicama iznosi $\mathcal{E}$.

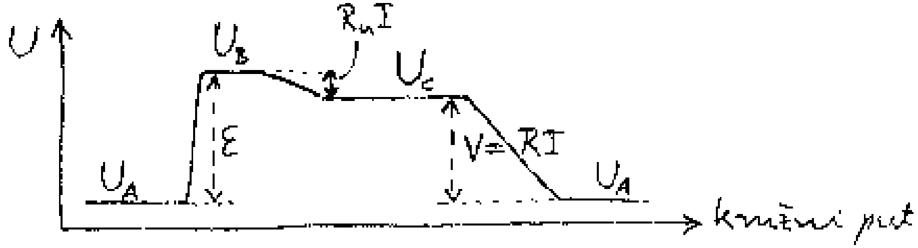


$$V = \mathcal{E} - R_u I$$

$$V = RI$$

Kada je spojen potrošač i teče struja I, imamo pad potencijala na unutarnjem otporu R_u pa je napon V na priključnicama manji od $\mathcal{E}$.

Možemo prikazati promjene potencijala na putu od točke A preko B i C i dalje opet do A.



Idući od točke A potencijal ima skok $\mathcal{E}$ na idealnom izvoru elektromotorne sile. Od točke B do C potencijal padne na otporu R_u. Stoga je napon (razlika potencijala) na priključnicama $V = U_C - U_A = \mathcal{E} - R_u I$.

Nastavljajući od točke C preko otpornika R nailazimo na pad potencijala (napon) $V = U_C - U_A = IR$.

Izjednačavajući dva izraza za napon dobivamo

$$\mathcal{E} - R_u I = RI$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_u + R}$$

Formalno bi se moglo reći da idealni izvor elektromotorne sile šalje struju kroz serijski spoj unutarnjeg otpora i vanjskog potrošača.

Ako smanjujemo otpor vanjskog potrošača R, struja I raste. Kažemo da time povećavamo opterećenje izvora napona.

Komercijalni izvori napona uvijek imaju oznaku maksimalne struje kao opterećenje koje se ne smije prijeći. Iznad te struje nastupa unutarnji kvar u izvoru (crtkana linija u prethodnom V-I grafu).

To su izvori napona koji ne podnose kratak spoj ($R \to 0$) između priključnica. Zato imaju već ugrađene osigurače koji ih isključe u trenutku kratkog spoja, ili se dogodi da pregore.

Međutim, postoje i takvi izvori napona koji mogu izdržati kratak spoj ($R \to 0$). Oni imaju velik unutarnji otpor R_u tako da im struja kratkog spoja $I_{ks} = \frac{\mathcal{E}}{R_u}$ nije pretjerano velika.

Napomena:

Moramo još jednom naglasiti da unutarnji otpor R_u nije stvarni otpor između polova izvora.

Kod Van de Graaffova stroja između dva pola nalazi se gumena traka koja je izolator i njen otpor nema veze s veličinom R_u.

Unutarnji otpor R_u uvodimo kao formalnu veličinu pomoću koje možemo opisati smanjenje napona V u odnosu na maksimalan napon $\mathcal{E}$.

Fizikalni uzrok smanjenja napona leži u tome da mehanizam koji daje silu $\vec{f}$ na naboje nije u mogućnosti potpuno efikasno nadoknađivati odvođenje naboja s polova.

7. Galvanske ćelije (članci)

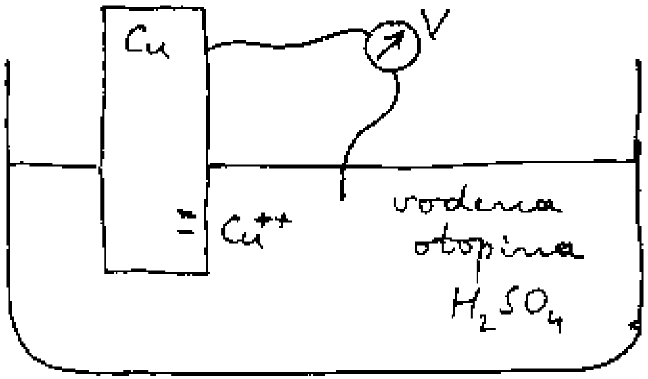
Galvanske ćelije (ili članci) je opći naziv za sve izvore elektromotorne sile na bazi elektrokemijskih procesa.

L. Galvani (talijanski liječnik) opazio je 1790. g. kod seciranja žabljih krakova njihovo stezanje kod dodira metalom.

A. Volta (tal. fizičar) protumačio je 1796. g. pojavu koju je opisao Galvani. Volta je napravio prvi članak koje je mogao davati trajnu električnu struju. Od tada su se električne struje mogle proučavati.

Elektrodni potencijal

Uronimo bakrenu šipku (ili ploču) djelomično u vodenu otopinu sumporne kiseline H_2SO_4.



Sumporna kiselina se disocira na $2H^+$ i SO_4^{--}. U dodiru s bakrom, ioni SO_4^{--} izvlače ion bakra Cu^{++}. Dva elektrona (--) ostaju u komadu bakra.

Uzrok ove pojave leži u tome da SO_4^{--} jače privlači Cu^{++} nego što su privlačne sile među atomima Cu u metalu.

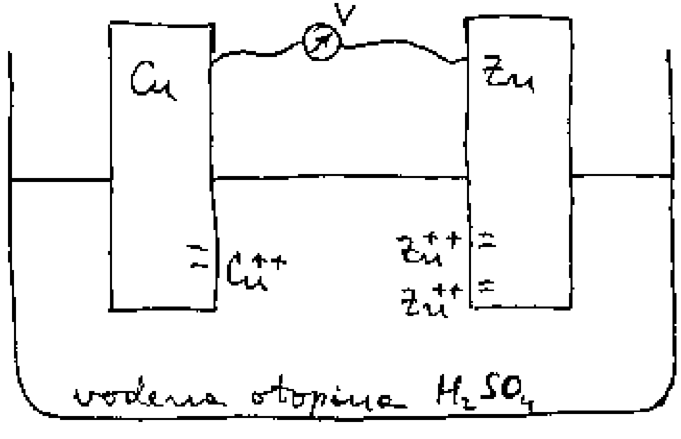
Ravnotežno stanje postigne se kod neke koncentracije Cu^{++} u otopini. Tada se izjednači sila kojom ioni SO_4^{--} nastoje izvući još jedan Cu^{++} iz komada bakra sa silom kojom nagomilani negativni elektroni u tom istom bakru zadržavaju dotični Cu^{++} da ne ode u otopinu.

Uspostavljena razlika potencijala između komada bakra i otopine naziva se <u>elektrodni potencijal</u> bakra.

Pokus:

pokazivanje elektrodnog potencijala

Voltin članak (1796. g.)



Ione SO_4^{--} jače privlače Zn^{++} nego Cu^{++}. Stoga se cink više otapa od bakra. U ravnoteži dobivamo da je elektrodni potencijal cinka još negativniji od elektrodnog potencijala bakra.
Između elektroda bakra i cinka nastaje razlika potencijala (napon) od oko 1V.

Pokus:

napon Voltina članka

Voltin članak se danas ne upotrebljava u praksi ali ima povijesnu važnost.

Važno je naglasiti da u ovome slučaju elektromotornu silu $\mathcal{E}$ (maksimalan napon) uzrokuju sile među ionima (kemijske sile).
Djelovanje tih kemijskih sila ekvivalentno je postojanju neke sile $\vec{F}$ koja tjera naboj q od cinkove (negativne) elektrode prema bakrenoj (pozitivnoj) elektrodi.

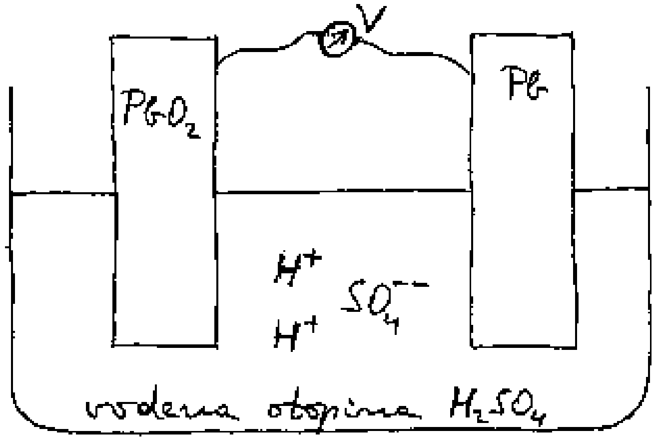
Elektrokemijski procesi se mogu odvijati s različitim vrstama metala i u otopinama različitih kiselina.

Pokus:

razni primjeri elektroda i otopina

Olovni akumulator

G. Planté (franc. fiz.) izumio je 1859. g. olovni akumulator.



Olovni akumulator se i danas upotrebljava (automobili).

Pokus:

prikaz akumulatora s više ćelija spojenih u seriju

Na olovnoj elektrodi se SO_4^{--} spaja s atomom olova

$$SO_4^{--} + Pb \rightarrow PbSO_4 + 2e^-$$

(U spoju $PbSO_4$ olovo je dvovalentni ion Pb^{++} pa olovo otpusti dva elektrona $Pb \rightarrow Pb^{++} + 2e^-$).
Olovni sulfat se taloži na površini elektrode a elektroni ostaju u elektrodi i ona postaje negativno nabijena.

Na elektrodu od olovnog dioksida (PbO_2) dolaze ioni vodika H^+ i izvlače kisik van.

$$PbO_2 + 4H^+ \rightarrow Pb^{++++} + 2H_2O$$

(U spoju PbO_2 olovo je četverovalentno Pb^{++++}. Takvo olovo vezuje kisik slabijom silom od sile kojom ioni vodika privlače taj isti kisik.)

Stvorene molekule vode H_2O odlaze u otopinu a ion Pb^{++++} ostaje u elektrodi. Međutim, taj ion je nestabilan. Njemu prilaze ioni SO_4^{--} kojih ima u otopini i nastaje reakcija vezivanja

$$2e^- + Pb^{++++} + SO_4^{--} \longrightarrow PbSO_4$$

(Da bi došlo do reakcije, potrebno je da Pb^{++++} uzme dva elektrona iz elektrode $2e^- + Pb^{++++} \rightarrow Pb^{++}$ jer je olovo u $PbSO_4$ dvovalentni ion Pb^{++}.)

I na ovoj elektrodi se olovni sulfat $PbSO_4$ taloži na površini. Budući da se za potrebe njegova nastanka uzimaju elektroni iz elektrode, znači da u elektrodi ostaje višak pozitivnog naboja.

Elektromotorna sila (maksimalni napon) između pozitivne elektrode PbO_2 i negativne elektrode Pb iznosi oko 2V.

Elektromotornu silu E uzrokuju sile među ionima koje dovode do cjelokupnog kemijskog procesa. U ekvivalentnoj zamišljenoj slici sve se odvija kao da djeluje neka sila $\vec{F}$ koja tjera naboj q od elektrode Pb prema elektrodi PbO_2.

Ćelije se mogu spajati u seriju radi zbrajanja elektromotornih sila. Akumulatori za osobne automobile obično imaju 6 ćelija što daje ukupno 12 V.

Ako na akumulator priključimo potrošač dolazi do odvođenja naboja s elektrode a gubitak se nadoknađuje nastavkom opisanih kemijskih reakcija.
Time se obje elektrode sve više prekrivaju slojem $PbSO_4$ koji se na njima taloži. Kada prekrivanje postane potpuno, ioni H^+ i SO_4^{--} u otopini nemaju više dostupa do PbO_2 i Pb te kemijski procesi stanu. Akumulator više ne stvara elektromotornu silu i ne može više davati struju. Kažemo da se akumulator "ispraznio".

Velika je tehnološka prednost olovnog akumulatora da ga možemo ponovo "napuniti". Taj proces zapravo znači da skidamo sloj $PbSO_4$ s obje elektrode.

Za punjenje akumulatora potrebno je na njega spojiti vanjski izvor napona koji je nešto veći od elektromotorne sile akumulatora. Pozitivni pol vanjskog izvora spoji se na PbO_2 a negativni na Pb.
Svi navedeni kemijski procesi kreću u obrnutom smjeru, tj. kao da smo u napisanim jednadžbama okrenuli smjer strelice. To znači da se $PbSO_4$ razgrađuje na obje elektrode.
Dovršetkom razgradnje sloja $PbSO_4$ na elektrodama akumulator je "napunjen".

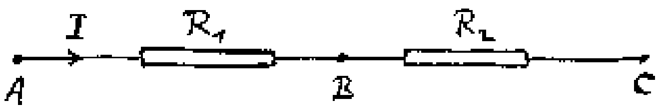
Ostali galvanski članci

- Lechlancheov članak (suhi članak) daje elektromotornu silu od 1,5V. Nalazi se u svim potrošnim baterijama. Članci mogu biti spojeni u seriju pa nalazimo baterije od npr. 3V, 4,5V ili 9V. Lechlancheov članak nije obnovljiv, tj. ne može se ponovo napuniti.
- Suvremeni članci su Ni-Cd (nikalj-kadmij), NiMH (nikalj-metal-hidrid), Li-Ion (litij-ion), Li-Poly (litij-polimer).
  Ove baterije se mogu ponovo napuniti (engl. rechargeable).
  Daju elektromotornu silu od 1,2V (Ni-Cd i NiMH), odnosno 3,6V (Li-Ion i Li-Poly).

8. Pravila u električnim krugovima

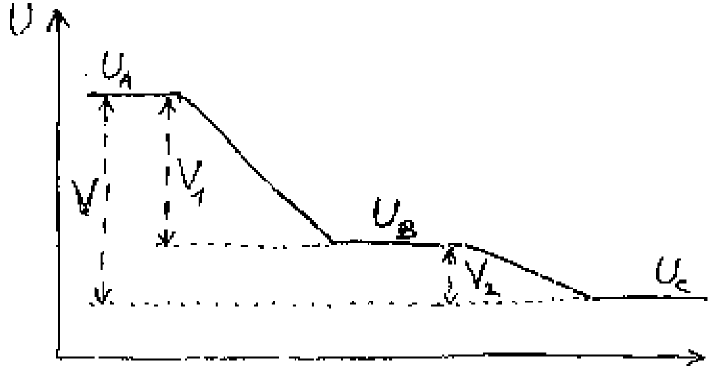
Razmotrimo najprije spajanje otpora u nekom dijelu električnog kruga.

Serijski spoj otpora



U serijskom spoju ista struja mora prolaziti kroz oba otpornika (u protivnom bi dolazilo do nagomilavanja naboja na nekom mjestu).
Ukupni pad potencijala od točke A do C dobivamo zbrajanjem pada potencijala od A do B i od B do C

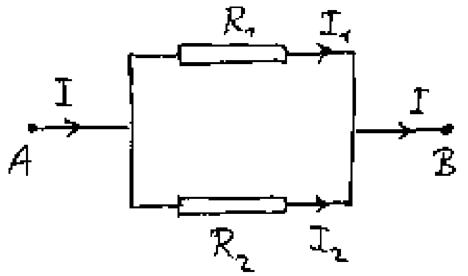
$$V = V_1 + V_2 = IR_1 + IR_2 = I\underbrace{(R_1+R_2)}_{R \text{ ukupni otpor}}$$



U serijskom spoju otpori se zbrajaju (općenito)

$$R = R_1+R_2+R_3+\dots = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

Paralelni spoj



U paralelnom spoju struja I se dijeli na I_1 i I_2 koje ne moraju biti jednake ali vrijedi pravilo

$$I = I_1 + I_2$$

Ono što je zajedničko dvama otpornicima u paralelnom spoju je napon

$$V = U_A - U_B$$

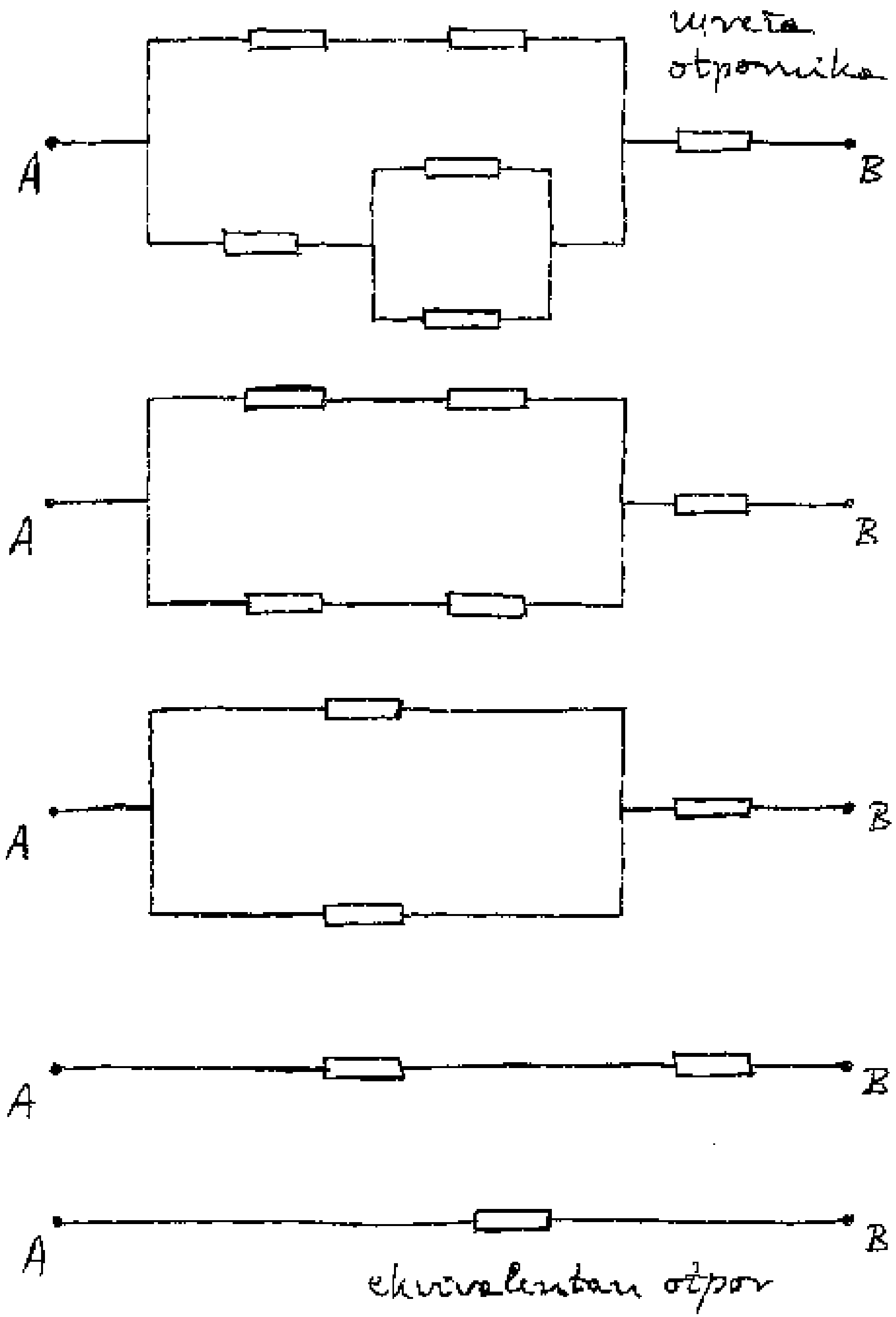
Otpore R_1 i R_2 možemo zamijeniti jednim otporom R kroz koji teče ukupna struja I. Primjenom Ohmova zakona dobivamo

$$\frac{V}{R} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Recipročna vrijednost ukupnog otpora jednaka je zbroju recipročnih vrijednosti pojedinih otpora.

Svođenje mreže otpornika na ekvivalentan otpornik



Napomena:

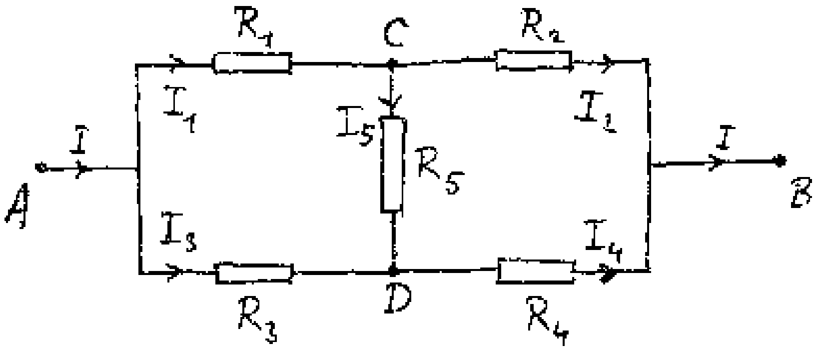
Dva se otpornika mogu svesti na ekvivalentan otpornik ako je:

a) struja kroz oba otpornika ista

ili

b) napon na oba otpornika isti

Mreža otpornika koja se ne može svesti na ekvivalentan otpornik



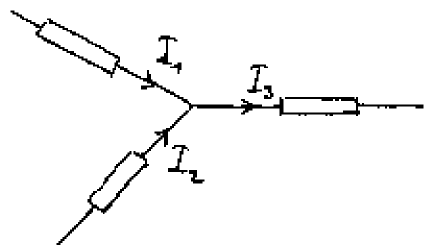
Ako je $I_5 \neq 0$ (općenit slučaj) onda je

a) $I_1 \neq I_2 \Rightarrow$ ne možemo svoditi R_1 i R_2 na serijski spoj

b) $U_C - U_D = I_5 R_5 \neq 0$ tj. točke C i D nisu na istom potencijalu $\Rightarrow V_1 \neq V_3$, tj. naponi na otpornicima R_1 i R_3 nisu jednaki pa ih ne možemo svoditi na paralelan spoj.

Kirchoffova pravila

Prvo Kirchoffovo pravilo odnosi se na struje u čvoru.

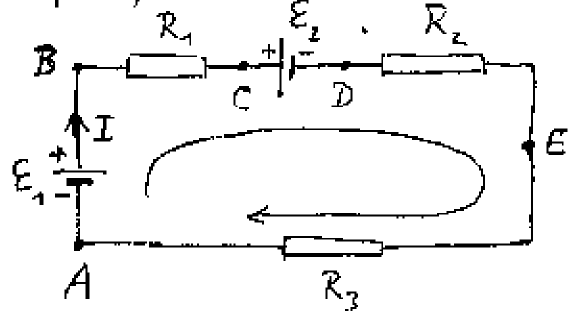


$$I_1 + I_2 = I_3$$

Općenito, zbroj struja koje ulaze u čvor mora biti jednak zbroju struja koje izlaze iz čvora.

Ovo pravilo je posljedica zakona očuvanja naboja. (Naboji se ne mogu stvoriti niti nestati.)

Drugo Kirchoffovo pravilo odnosi se na strujnu petlju.



Označimo proizvoljno smjer struje I i odaberimo smjer obilaska petlje.

Ako krenemo od točke A preko B, C, D i E natrag do A vratimo se na isti potencijal, tj. zbroj svih porasta i padova potencijala daje nulu

$$\mathcal{E}_1 - IR_1 - \mathcal{E}_2 - IR_2 - IR_3 = 0$$

Napomena:

$\mathcal{E}_1$ uzimamo s pozitivnim predznakom jer idući od A do B prelazimo s nižeg potencijala (negativni pol) na viši potencijal (pozitivni pol).

Kod prelaska iz točke C u D imamo pad potencijala (od pozitivnog na negativni pol) pa pišemo $-\mathcal{E}_2$.

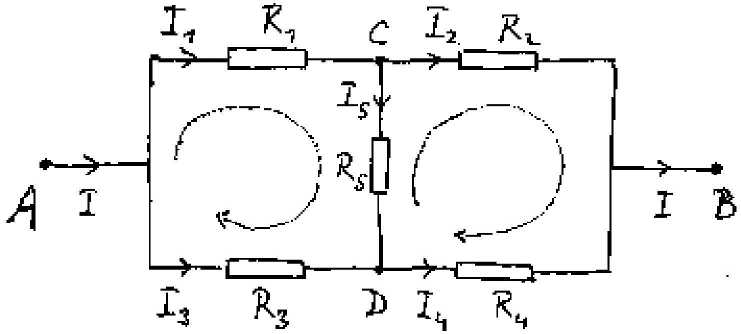
Drugo Kirchhoffovo pravilo kaže da je algebarski zbroj svih napona (razlika potencijala) u strujnoj petlji jednak nuli.

$$\sum_i V_i = 0$$

Napomena:

Za napon na nekom otporu uzimamo predznak minus ($-IR_i$) ako struja teče u smjeru obilaska petlje. U protivnom slučaju stavljamo predznak plus ($+IR_i$).

Primijenimo Kirchhoffova pravila na ranije postavljeni problem strujne mreže.



Najprije moramo u svim granama petlje označiti struje i pretpostaviti njihove smjerove po slobodnom izboru. (Grana je spoj između dva čvora).

Zatim primijenimo I. Kirchhoffovo pravilo na čvorove. Imamo četiri čvora.

$$I = I_1 + I_3$$

$$I_1 = I_2 + I_5$$

$$I_3 + I_5 = I_4$$

Jednadžba za četvrti čvor ($I_2 + I_4 = I$) nije neovisna. Ona je već sadržana u gornjim jednadžbama (uvrstimo I_1 i I_3 iz druge i treće u prvu jednadžbu).

U sljedećem koraku primijenimo II. Kirchhoffovo pravilo na petlje. Na shemi su označeni smjerovi obilaska petlje po slobodnom izboru.

$$-I_1R_1 - I_5R_5 + I_3R_3 = 0 \quad \text{za lijevu petlju}$$

$$I_5R_5 - I_2R_2 + I_4R_4 = 0 \quad \text{za desnu petlju}$$

Mogli bismo još dodati i veliku petlju no dobivena jednadžba $(-I_1R_1 - I_2R_2 + I_4R_4 + I_3R_3 = 0)$ nije neovisna jer se može dobiti zbrajanjem gornjih jednadžbi.

Prema tome, imamo ukupno 5 neovisnih jednadžbi iz kojih možemo izračunati 5 nepoznanica. Ako su npr. zadani svi otpori i ukupna struja I, ostaju nepoznate struje I_i u pojedinim granama pa ih možemo izračunati.

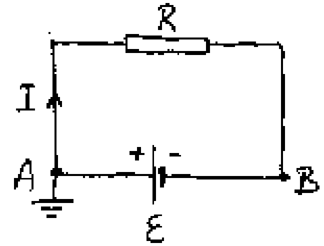
Napomena:

U početku pretpostavimo smjerove struja po slobodnom izboru. Međutim, ako nam rješenje postavljenog sustava jednadžbi dade negativnu vrijednost za neku struju, onda to znači da dotična struja u stvarnosti teče u smjeru suprotnom od onoga koji je bio pretpostavljen.

Uzemljivanje

Uvijek smijemo uzemljiti jednu točku u strujnom krugu. Ostale točke poprimaju odgovarajuće potencijale u odnosu na uzemljenu točku.

Uzmimo kao primjer najjednostavniji strujni krug.

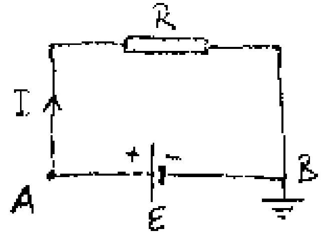


$U_A = 0$

$U_B = -E$

(ili $U_B = -IR$)

Ako uzemljimo točku B, dobivamo



$U_B = 0$

$U_A = E$

(ili $U_A = IR$)

(Izraze u zagradama dobivamo ako od uzemljene točke do one druge idemo preko otpornika.)

Napomena:

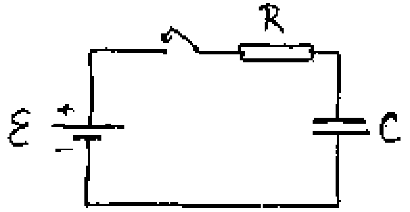
Ne smijemo uzemljiti dvije točke u strujnom krugu.

Npr. ako uzemljimo A i B nastaje kratak spoj na izvoru elektromotorne sile.

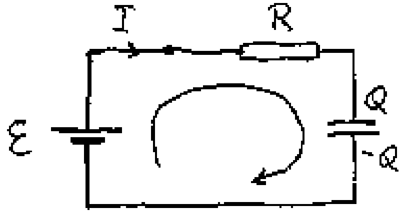
9. RC krugovi

Do sada smo razmatrali električne krugove u kojima teče stalna struja. U njima nije bilo kondenzatora.

Između ploča kondenzatora je dielektrik (izolator) pa kroz kondenzator ne može teći struja. Međutim, ploče kondenzatora se mogu nabijati pa u dovodnim žicama ipak teče struja, ali samo privremeno dok traje nabijanje.



$t=0$



$t>0$

U $t=0$ spojimo prekidač. Poteče struja I koja nabija kondenzator

$$I=\frac{dQ}{dt}$$

(Svi naboji koji prolaze kroz poprečni presjek vodiča završe na ploči kondenzatora.)

Naboj Q se povećava, a time raste i napon $V=\frac{Q}{C}$ na kondenzatoru. Kada napon V dosegne vrijednost elektromotorne sile $\mathcal{E}$, proces nabijanja stane, tj. struja padne na nulu.

Kakva je vremenska ovisnost $Q(t)$, $V(t)$ i $I(t)$?

Temeljnu jednadžbu dobivamo primjenom II. Kirchhoffova zakona. Idući prema naznačenom smjeru obilaska petlje imamo

$$\mathcal{E} - IR - V = 0$$

Napon V na kondenzatoru uzimamo s predznakom minus jer u danome smjeru obilaska idemo od višeg potencijala (pozitivna ploča) prema nižem potencijalu (negativna ploča).

Uvrštavanjem izraza $I=\frac{dQ}{dt}$ i $V=\frac{Q}{C}$ u gornju jednadžbu dobivamo nakon sređivanja

$$\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{RC}Q=\frac{\mathcal{E}}{R}$$

Rješenje ove diferencijalne jednadžbe daje vremensku ovisnost naboja na kondenzatoru

$$Q(t)=Q_0\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Da je ova funkcija uistinu rješenje gornje diferencijalne jednadžbe možemo se uvjeriti uvrštavanjem rješenja u diferencijalnu jednadžbu.

U tu svrhu deriviranjem funkcije $Q(t)$ dobijemo najprije

$$\frac{dQ}{dt}=Q_0\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$$

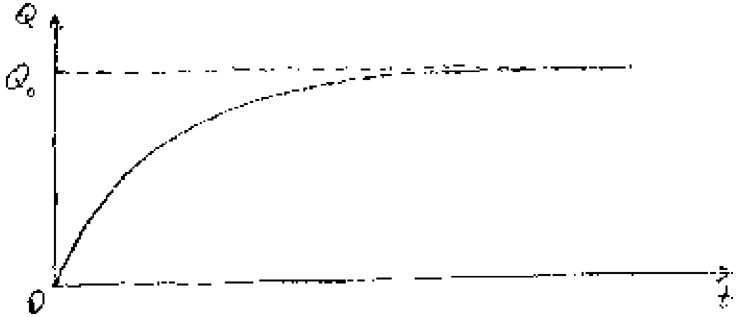
Uvrštavanjem $\frac{dQ}{dt}$ i $Q(t)$ u dif. jedn. dobivamo

$$Q_0 \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{RC} Q_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Članovi koji sadrže vrijeme poništavaju se. Preostaje

$$\frac{1}{RC} Q_0 = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad \Longrightarrow \quad Q_0 = C\mathcal{E}$$

Dakle, postavljeno rješenje $Q(t)$ zadovoljava dif. jednadžbu za sva vremena uz uvjet da je $Q_0 = C\mathcal{E}$. Q_0 je maksimalni naboj na kondenzatoru koji se postiže za $t \to \infty$.



Kondenzator se nabija po eksponencijalnoj funkciji.

Napon na kondenzatoru je u svakom trenutku $V = \frac{Q}{C}$. Prema tome

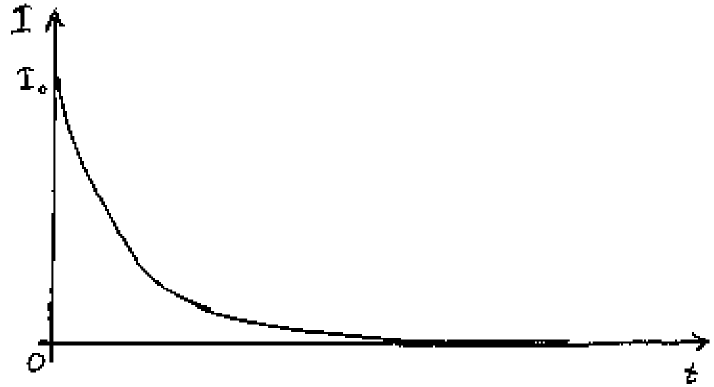
$$V(t) = \mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Funkcija $V(t)$ ima isti oblik kao $Q(t)$. Maksimalan napon je $\mathcal{E}$ i postiže se za $t \to \infty$.

Struju izračunamo deriviranjem $I = \frac{dQ}{dt}$ i uzmemo u obzir da je $Q_0 = C\mathcal{E}$ pa dobivamo

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

I_0 je maksimalna struja u $t=0$ kada sklopimo prekidač. Za $t \to \infty$ struja pada na nulu.



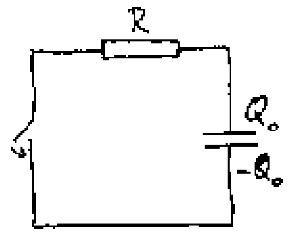
Produkt RC ima dimenziju vremena tako da eksponent $-\frac{t}{RC}$ bude bezdimenzionalan.

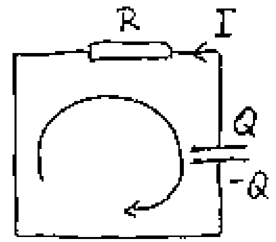
Vrijeme $\tau = RC$ naziva se vremenska konstanta RC-kruga.
Vremenska konstanta određuje brzinu nabijanja kondenzatora preko otpornika.

Pokus:

nabijanje i izbijanje kondenzatora
(promjena vremenske konstante)

Izbijanje kondenzatora odvija se također eksponencijalno i s istom vremenskom konstantom $\tau = RC$.





U $t=0$ kondenzator je bio nabijen nabojem Q_0. Tada spojimo prekidač i poteče struja

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

Struja nastaje zbog smanjenja naboja na kondenzatoru ($dQ<0$). Zato stavljamo predznak minus da bi struja ipak bila pozitivna veličina

II. Kirchoffov zakon daje

$$RI - V = 0$$

Uvrštavanjem $I = -\frac{dQ}{dt}$ i $V = \frac{Q}{C}$ dobivamo nakon sređivanja

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC} Q = 0$$

Rješenje glasi

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Provjeru rješenja možemo izvršiti uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu

$$-\frac{1}{RC} Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{RC} Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} = 0$$

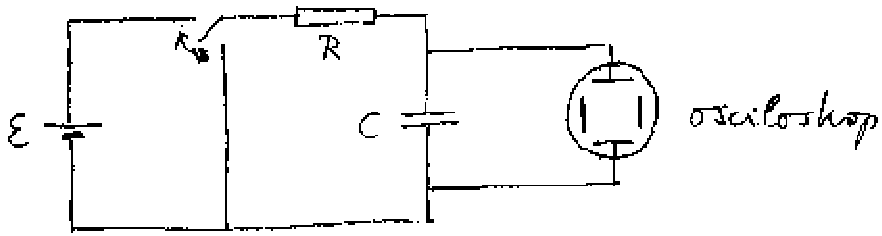
Ova jednadžba je očito zadovoljena za sva vremena.
Napon na kondenzatoru eksponencijalno pada

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Struja izbijanja je maksimalna u početku dok je kondenzator jako nabijen a zatim pada

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Sklop za eksperimentalno promatranje nabijanja i izbijanja kondenzatora



Osciloskop je instrument za mjerenje napona koji se mijenja u vremenu.
Prikaz na ekranu osciloskopa daje na horizontalnoj osi vrijeme, a na vertikalnoj napon, tako da promatramo funkciju $V(t)$.

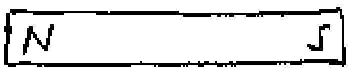
8. MAGNETOSTATIKA

1. Permanentni magneti (povijesni osvrt)

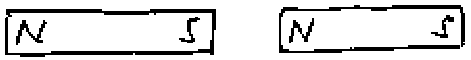
Još u antičko doba bilo je poznato da mineral magnetit (Fe_3O_4) privlači sitne čestice željeza.

Razumijevanje magnetizma u razini tvari postignuto je tek nakon otkrića kvantne fizike u 20. st.

Svaki permanentni magnet ima dva pola koji se nazivaju sjeverni (N, prema engl. north) i južni (S, prema engl. south).



Postojanje dvaju različitih polova očituje se u privlačenju ili odbijanju dvaju magneta



privlače se

Raznoimeni polovi se privlače.

odbijaju se

Istoimeni polovi se odbijaju.

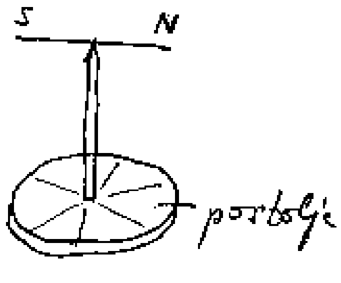
Pokus:

privlačenje i odbijanje magneta

Permanentni magnet u obliku štapa ponaša se slično kao električni dipol.

Magnetska igla

Magnetska igla je permanentni magnet postavljen na osovinu oko koje se može okretati.



Magnetsku iglu možemo upotrebljavati na sličan način kao što smo upotrebljavali versorij za ispitivanje električnog polja.

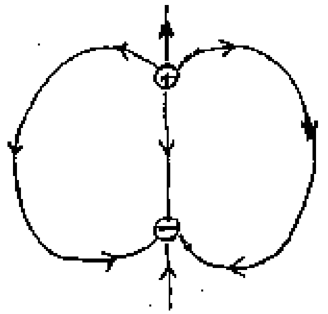
Pokus

ponašanje magnetske igle u okolini šipkastog magneta

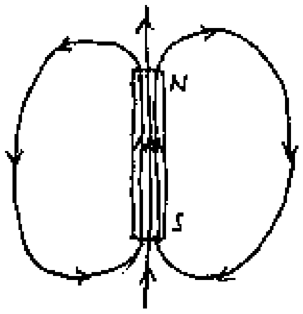
Možemo ustanoviti da se magnetska igla sama od sebe postavi u odgovarajući smjer slično kao versorij u okolini električnog dipola.

Stoga ima smisla reći da šipkasti magnet stvara u svim točkama prostora oko sebe magnetsko polje a magnetska igla se postavlja u smjer polja koje vlada na mjestu igle.

Silnice električnog i magnetskog polja



električni dipol



magnetski štap

Izvan magnetskog štapa silnice magnetskog polja izgledaju slično kao silnice električnog polja oko električnog dipola.

Međutim, postoji razlika kod silnica koje idu kroz magnet i onih koje izravno spajaju električne naboje.

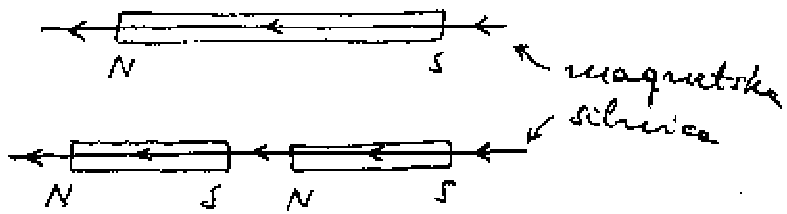
Silnice električnog polja izviru iz pozitivnog naboja i poniru (završavaju) na negativnom naboju.

Magnetske silnice uvijek imaju kružni tok. Izvan magneta one idu od sjevernog (N) pola prema južnome (S) a unutar magneta idu od S prema N.

Električne naboje možemo po volji razdvojiti i izolirati svaki naboj zasebno. Međutim, ne možemo dobiti zasebno jedan magnetski pol.

Pokus:

pokušaj kidanja magneta



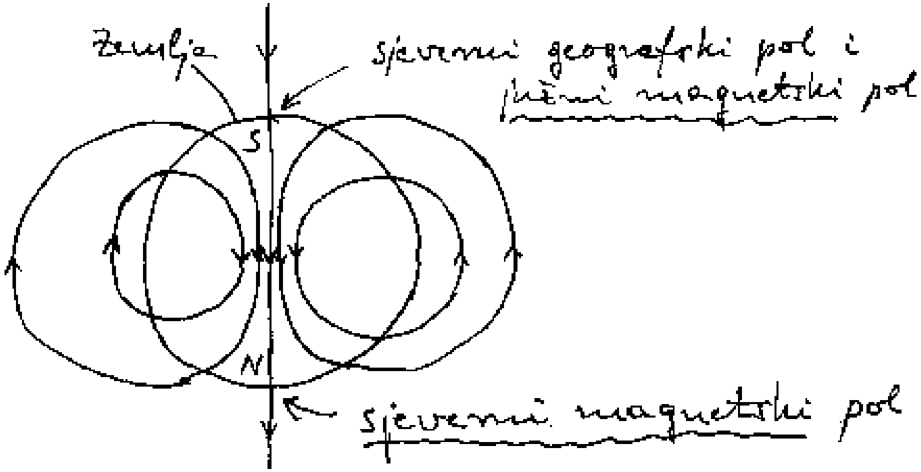
Na prekidu opet dobivamo polove S i N tako da i svaki novi komad uvijek ima oba pola. Postupak dijeljenja možemo nastaviti no rezultat je uvijek isti.

Svaki magnet možemo zamisliti kao mnoštvo sitnih magneta koji su spojeni u nizu.

Magnetizam Zemlje

Zemaljska kugla je također permanentan magnet. Uzrok njenog magnetizma je negdje duboko u unutrašnjosti i nije istražen.

Magnetsko polje na površini Zemlje je slabo ali ipak dovoljno da se magnetska igla orijentira.



Na ekvatoru je magnetsko polje paralelno s površinom Zemlje, tj. ima samo horizontalnu komponentu.
Na sjevernoj hemisferi magnetsko polje ima inklinaciju (nagib) prema Zemlji a na južnoj uvis.
Horizontalna komponenta magnetskog polja uvijek ima smjer od južnog geografskog pola prema sjevernom.
Magnetska igla se uvijek orijentira tako da njen sjeverni (N) magnetski pol bude u smjeru horizontalne komponente magnetskog polja Zemlje.

Prema tome, sjeverni magnetski pol igle pokazuje prema sjevernome geografskom polu Zemlje. Tako je povijesno nastao naziv za magnetske polove.
Magnetski kompas je poznat od 11. stoljeća.

2. Magnetsko polje struje (eksperimentalna opažan

Povezanost električne struje i magnetizma otkrio je H. C. Oersted u svom glasovitom pokusu (Kopenhagen, 1820).

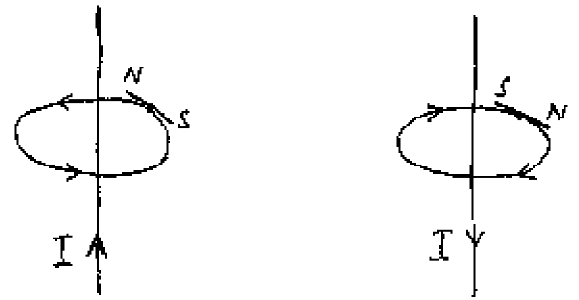
Pokus:

Oerstedov pokus

Kada kroz vodič pustimo struju, opaža se djelovanje na magnetsku iglu u blizini. To znači da struja kroz neki vodič stvara magnetsko polje oko vodiča.

Eksperimentalno možemo utvrditi da silnice magnetskog polja oko ravnog vodiča kojim teče struja imaju oblik kružnice.

Pokus:



Magnetska igla je uvijek tangencijalna na silnicu. Ako promijenimo smjer struje I, promijeni se smjer magnetskog polja.

Odnos struje i magnetskog polja koje nastaje uslijed struje možemo odrediti pravilom desne ruke:
Postavimo ispruženi palac u smjer struje.
Savijeni prsti pokazuju smjer obilaska magnetskih silnica oko ravnog vodiča.

Ovim pokusima smo utvrdili da struja u nepomičnom (učvršćenom) vodiču djeluje na lako pokretljivu magnetsku iglu. Po III. Newtonovom zakonu mora postojati i sila reakcije.
Postavimo nepomičan (učvršćen) permanentni magnet i lako pokretljiv vodič (npr. obješen o nit kao njihalo) kroz koji teče struja.

Pokus:

pomicanje vodiča sa strujom

Između vodiča kojim teče struja i nekog permanentnog magneta postoji obostrano međudjelovanje kao što postoji između dva permanentna magneta.
Drugim riječima, vodič kojim teče struja može zamijeniti permanentan magnet.

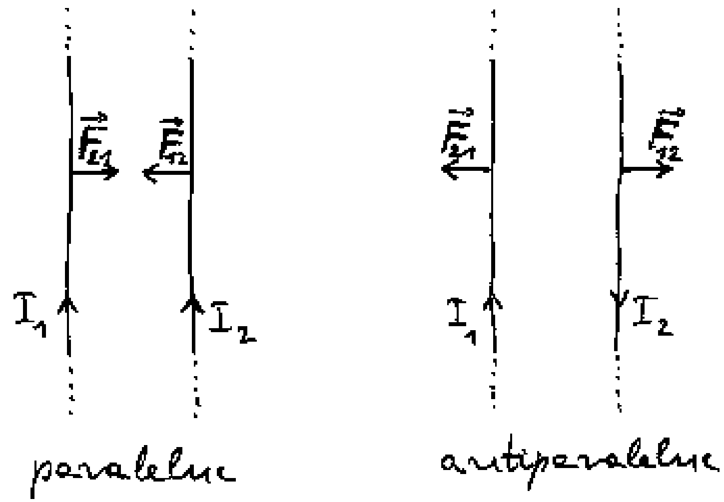
Zamijenimo oba permanentna magneta vodičima kojima teku struje. Jedan vodič može biti nepomičan a drugi pokretljiv.

Pokus:

međudjelovanje dvaju vodiča kroz koja teku struje

Možemo reći da struja kroz neki vodič stvara magnetsko polje oko vodiča. To polje djeluje silom na drugi vodič kroz koji teče struja.
Vrijedi i obrat, tj. struja koja teče kroz drugi vodič stvara oko njega magnetsko polje a ono djeluje silom na prvi vodič kojim teče struja.

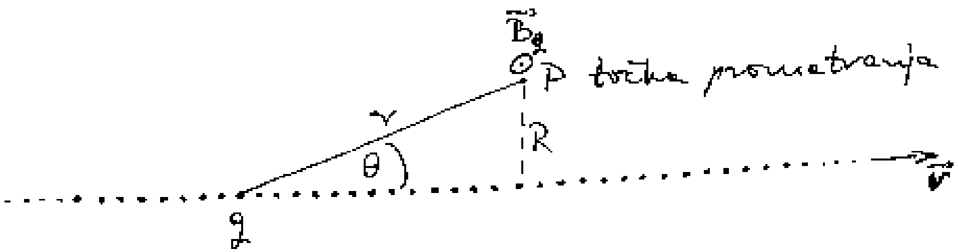
Paralelne struje se privlače a antiparalelne se odbijaju.



$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$ III. Newtonov zakon

3. Priroda magnetskog djelovanja struje

Zamislimo model struje koju čini beskonačan niz naboja q koji se gibaju brzinom v



Magnetsko polje koje stvara jedan naboj q u točki promatranja P iznosi (v. prethodno poglavlje)

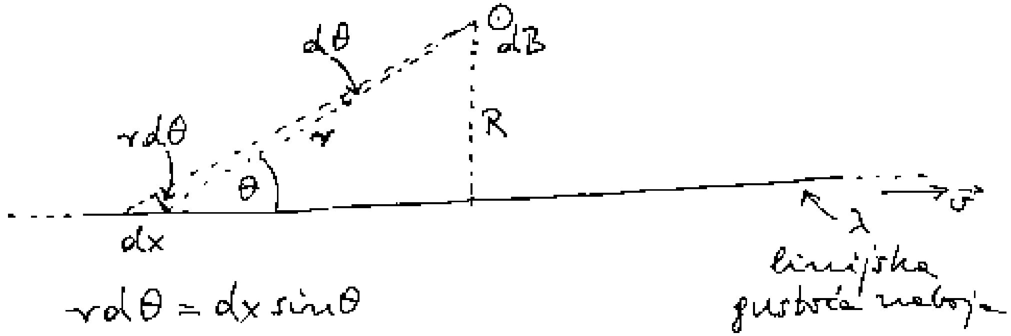
$$B_q = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q v \sin\theta}{\gamma^2 r^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}$$

Moramo naći ukupno magnetsko polje u točki P koje stvaraju svi naboji (princip superpozicije).

Zamislimo da su naboji jako gusto raspoređeni (odgovara realnoj situaciji) tako da možemo napraviti prijelaz od diskretnog niza na kontinuum. Definiramo linijsku gustoću naboja $\lambda = \frac{\Delta q}{\Delta x} \rightarrow \frac{dq}{dx}$

To znači da na segmentu dx imamo naboj $dq = \lambda dx$. Možemo odmah uočiti da naboj dq stvara polje dB u točki P (izraz identičan po formi prethodnom)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{dq\, v \sin\theta}{\gamma^2 r^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}$$



$$r\,d\theta = dx \sin\theta$$

$$R = r \sin\theta$$

$$dq = \lambda dx = \lambda \frac{r\,d\theta}{\sin\theta} = \lambda \frac{R\,d\theta}{\sin^2\theta}$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\lambda \frac{R\,d\theta}{\sin^2\theta}\,\frac{v\sin\theta}{\gamma^2 \frac{R^2}{\sin^2\theta}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\lambda v}{R\gamma^2}\,\frac{\sin\theta\, d\theta}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}$$

Ukupno polje beskonačne ravne struje dobivamo integriranjem od $\theta=0$ do $\theta=\pi$. U prethodnom poglavlju smo već računali integral

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \, d\theta}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}} = 2\gamma^2$$

Prema tome, ukupno magnetsko polje B u točki P koja se nalazi na udaljenosti R od beskonačne ravne struje iznosi

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi R}\lambda v$$

Prisjetimo se definicije struje

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dx}\frac{dx}{dt} = \lambda v$$

Linijska gustoća naboja pomnožena s brzinom predstavlja struju I.

Konačno, magnetsko polje beskonačne ravne struje I na udaljenosti R iznosi

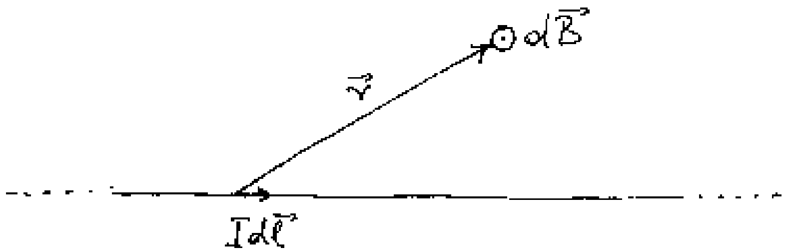
$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}}$$

Napomene:

1) Razmatrali smo samo niz pozitivnih naboja (pozitivna linijska gustoća λ) u gibanju. Pored magnetskog polja, ti naboji stvaraju i električno polje (okomito na niz naboja). U realnoj situaciji imamo i jednaku količinu negativnih naboja u nizu (negativna linijska gustoća $-\lambda$), no za njih moramo pretpostaviti da miruju tako da ne stvaraju magnetsko polje, ali se električna polja poništavaju.

2) Gornji model struje odnosio se na idealan vodič bez električnog otpora tako da se naboji gibaju bez električnog polja duž smjera vodiča (nisu potrebni površinski naboji), pa nema ni pada potencijala duž takve vodiča. U realnoj situaciji imamo električni otpor i površinske naboje koji stvaraju odgovarajuće električno polje unutar vodiča i izvan njega.

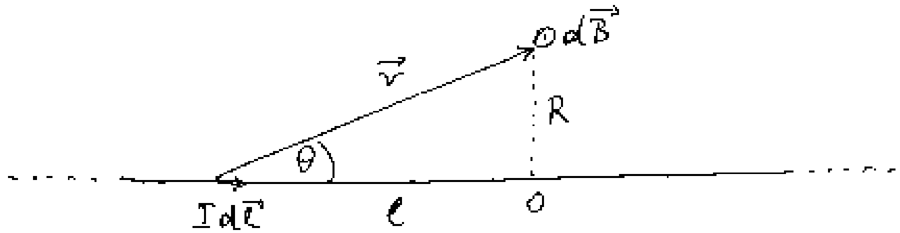
Uvedimo sada pojam <u>elementa struje</u> $Id\vec{l}$. Element struje $Id\vec{l}$ stvara magnetsko polje $d\vec{B}$ na mjestu promatranja udaljenom za $\vec{r}$ od njega



$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}}$$ Biot-Savartov zakon

Francuski fizičari Biot i Savart (19. st.) došli su do ovog zakona temeljem niza eksperimentalnih opažanja.

Pokažimo valjanost ovoga zakona primjenom na beskonačno dugačku ravnu struju



Element struje $Id\vec{l}$ nalazi se na udaljenosti l od ishodišta O. Točka promatranja je na udaljenosti R od ishodišta O.

$$r^2 = R^2 + l^2$$

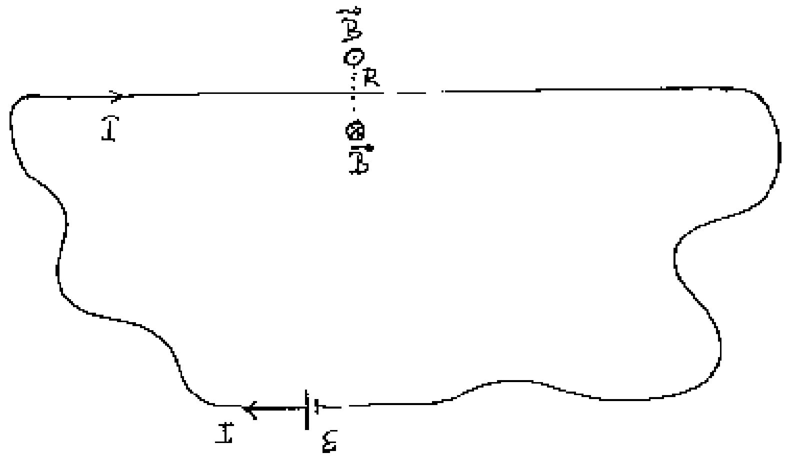
$$|d\vec{l}\times\hat{r}| = dl\sin\theta = dl\,\frac{R}{r} = dl\,\frac{R}{\sqrt{R^2+l^2}}$$

Ukupno magnetsko polje u točki promatranja iznosi

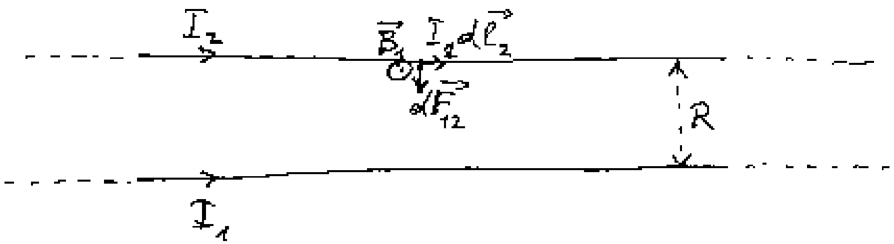
$$B = \int dB = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{(R^2+l^2)^{3/2}}\,dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

<u>Napomena</u>:

Beskonačno dugačak ravan vodič je idealizacija. Gornju formulu možemo upotrebljavati i za ravan vodič <u>konačne</u> duljine L ako je točka promatranja relativno blizu vodiča ($R \ll L$) tako da doprinose $d\vec{B}$ od udaljenih strujnih elemenata možemo zanemariti.



Razmotrimo sada problem uzajamnog djelovanja dviju paralelnih struja I_1 i I_2 koji smo prethodno promatrali u pokusu.



Struja I_1 stvara magnetsko polje $\vec{B}_1$ $\left(B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}\right)$ na mjestu kojim prolazi struja I_2.

Neka se u elementu struje $I_2 d\vec{l}_2$ nalazi naboj dQ_2 koji se giba brzinom v_2. Na taj naboj djeluje magnetski dio Lorentzove sile

$$d\vec{F}_{12} = dQ_2 \vec{v}_2 \times \vec{B}_1 = I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$$

(jer možemo preinačiti $dQ_2 v_2 = dQ_2 \frac{dl_2}{dt} = \frac{dQ_2}{dt} dl_2 = I_2 dl_2$)

Ukupna sila na duljinu L_2 drugog vodiča iznosi

$$F_{12} = I_2 L_2 B_1 = I_2 L_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$$

Sila koja djeluje na 1m duljine vodiča iznosi:

$$\boxed{\frac{F_{12}}{L_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}}$$

Naravno, ista po iznosu sila, ali suprotnoga smjera, djeluje na 1m duljine prvoga vodiča. Sile su privlačne za paralelne struje a odbojne za antiparalelne struje (provjerite primjenom vektorskog produkta!!).

Definicija ampera

Prethodna jednadžba predstavlja temelj za definiciju jedinice za mjerenje struje.

Amper (1A) je jakost stalne električne struje koja prolazeći dvama usporednim beskonačno dugačkim ravnim vodičima razmaknutim 1m u vakuumu uzrokuje među njima silu od $2\cdot 10^{-7}$ N po metru duljine vodiča.

Iz ovakve definicije slijedi da konstanta μ_0 ima iznos i dimenziju

$$2\cdot 10^{-7}\,\mathrm{N m^{-1}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{1A\cdot 1A}{1m} \Rightarrow \mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{NA^{-2}}$$

Konstanta μ_0 naziva se <u>permeabilnost</u> vakuuma.

1A je jedna od <u>temeljnih</u> jedinica u međunarodnom sustavu (SI). Jedinica za naboj 1C je <u>izvedena</u>

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Rightarrow \Delta Q = I\Delta t \Rightarrow 1C = 1As$$

Kulon (1C) je naboj koji u 1s prođe kroz poprečni presjek vodiča kojim teče struja od 1A.

Iz ovih jedinica mogu se dalje izvoditi nove jedinice. Npr.

$$E_{p2} - E_{p1} = q\left(U_2 - U_1\right) \implies U_2 - U_1 = \frac{E_{p2} - E_{p1}}{q}$$

$$1V = 1JC^{-1}$$

Razlika potencijala dviju točaka iznosi 1V ako se premještanjem naboja od 1C iz jedne točke u drugu ostvari promjena potencijalne energije od 1J.

Nadalje, razmotrimo jednadžbu kondenzatora

$$Q = CV \implies C = \frac{Q}{V}$$

$$1F = 1CV^{-1}$$

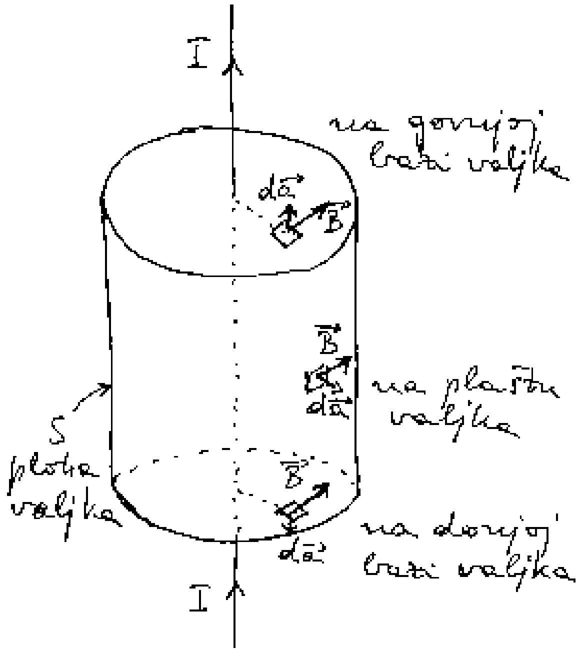
Kondenzator ima kapacitet od 1F ako se uz naboj od 1C postiže napon od 1V između njegovih obloga (ploča).

4. Integrali magnetskog polja struje

Integrale magnetskog polja koje stvara jedan naboj u gibanju radili smo u prethodnome poglavlju. Ovdje želimo obraditi slučaj stalne (vremenski nepromjenljive) struje i njenog magnetskog polja koje je stoga također stalno. Izračunajmo dva integrala:

a) Integral toka magnetskog polja kroz zatvorenu plohu S

Zamislimo zatvorenu plohu u obliku površine valjka kojemu se os simetrije poklapa s ravnim vodičem kojim teče struja I.



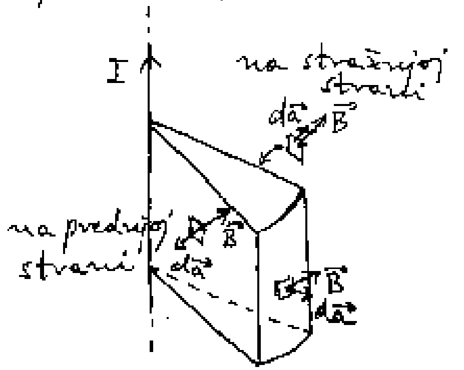
$\vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$

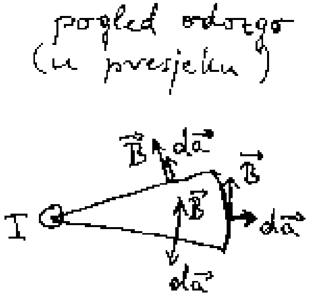
na svim dijelovima plohe

Stoga je:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

Zamislimo sada zatvorenu plohu kod koje nije na svakome dijelu $\vec{B}\cdot d\vec{a}=0$. Npr. razmotrimo isječak valjka



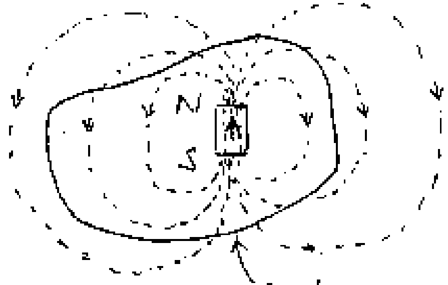


Na prednjoj strani magnetski tok ulazi u volumen ($\vec{B}\cdot d\vec{a}<0$), a na stražnjoj izlazi iz njega ($\vec{B}\cdot d\vec{a}>0$). Zbog simetrije nalazimo da su ulazni i izlazni tokovi magnetskog polja po iznosima jednaki. Stoga je ukupno

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{a}=0$$

Možemo primijetiti da je ovakav rezultat posljedica činjenice da su silnice magnetskog polja zatvorene krivulje, tj. nemaju izvore i ponore kao što to imaju silnice električnog polja.

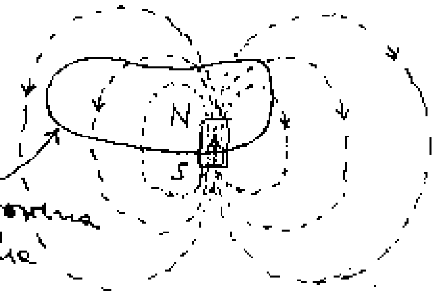
Općenito možemo zamisliti bilo koju zatvorenu plohu i bilo kakav izvor magnetskog polja (npr. permanentni magnet).



zatvorena ploha
(presjek)

Ako neka silnica magnetskog polja izlazi iz zatvorene plohe, mora na nekome drugom mjestu ući u nju.

Zatvorena ploha može i presjecati magnet tako da je sjeverni pol (N) unutar zatvorene plohe, a južni (S) je izvan nje.



zatvorena ploha

Magnetske silnice unutar magneta idu od S prema N (ulaze u zatvorenu plohu), a izvan magneta idu od N prema S, pa moraju na nekome mjestu izići da bi opet došle do S.

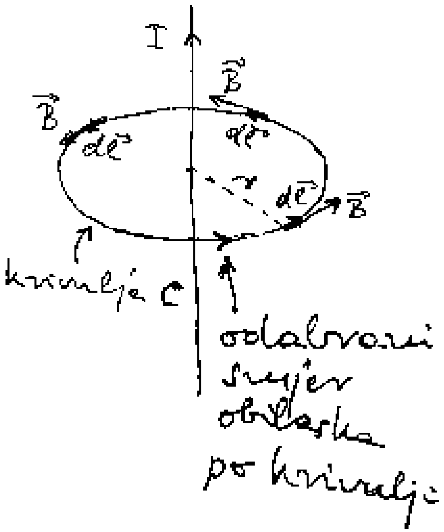
Magnetski tok koji ulazi u neku zatvorenu plohu jednak je po iznosu toku koji iz nje izlazi, tj. općenito vrijedi

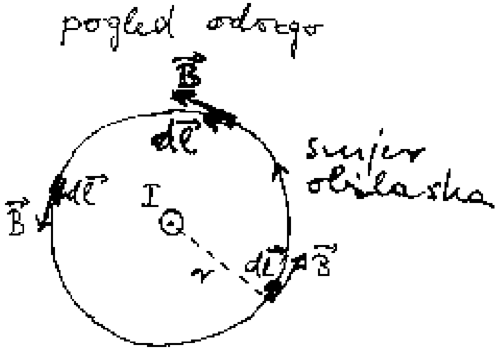
$$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0}$$ Gaussov zakon za magnetsko polje

Ovaj zakon iskazuje na matematički način da su magnetske silnice uvijek zatvorene krivulje, tj. da nema izvora i ponora silnica.

b) Integral magnetskog polja duž zatvorene krivulje C

Razmotrimo opet magnetsko polje oko ravnog vodiča kojim teče struja I. Neka zatvorena krivulja C bude kružnica oko ravnog vodiča.





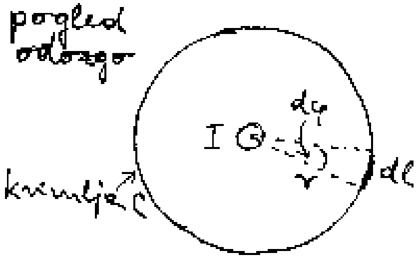
$\vec B$ je uvijek paralelno s $d\vec l$
$\vec B\cdot d\vec l = B\,dl$

$$\oint_C \vec B\cdot d\vec l = \oint_C B\,dl = B\oint_C dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}2r\pi = \mu_0 I$$

Rezultat integrala ne ovisi o radijusu odabrane kružnice C, što znači da možemo odabrati kružnicu bilo kojeg radijusa.

Izračun možemo napraviti i na drugi način

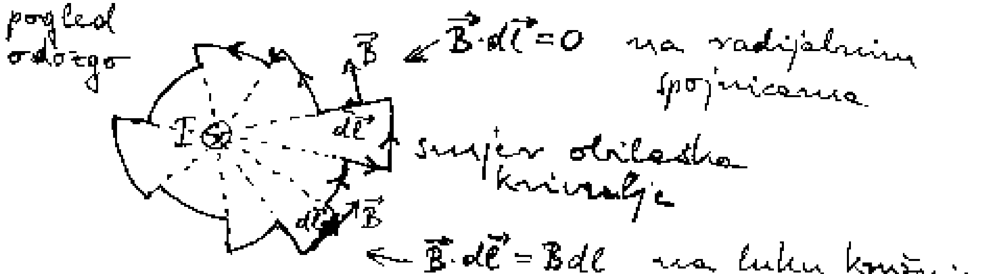
$$\oint_C B\,dl = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2r\pi}\,dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}2\pi = \mu_0 I$$



$$d\varphi = \frac{dl}{r}$$

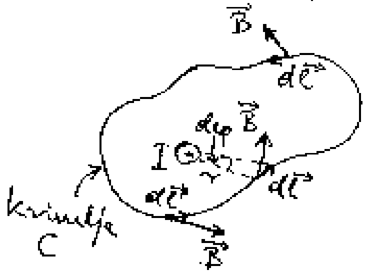
$$dl = r\,d\varphi$$

U integriranju se zbrajaju svi kutovi $d\varphi$ koji ukupno daju puni kut 2π neovisno o radijusu.
Zatvorenu krivulju možemo odabrati tako da ide djelomično po lukovima kružnica različitih radijusa i radijalnim spojnicama.



Kod integriranja važan je opet samo zbroj svih kutova $d\varphi$ koji daje puni kut 2π, tj. isti rezultat.

Odaberimo proizvoljnu zatvorenu krivulju C.



$$\vec{B}\cdot d\vec{l} = \underbrace{B\,dl\cos\theta}_{\text{projekcija } dl \text{ na } \vec{B}} = B\,dl' = B\,r\,d\varphi$$

$$dl' = r\,d\varphi$$

Smjer polja $\vec{B}$ određen je strujom I. Krivulja C je nepravilna i njen segment $d\vec{l}$ nije paralelan s poljem $\vec{B}$. Međutim, zbrajanje svih $\vec{B}\cdot d\vec{l}$ svodi se na zbrajanje svih $d\varphi$ do punog kuta 2π. Stoga općenito vrijedi

$$\boxed{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I}$$

Ampereov zakon

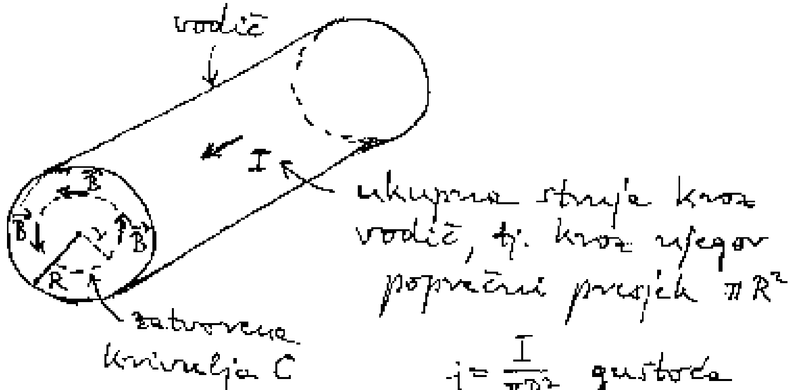
Prema principu superpozicije, ako kroz zatvorenu krivulju C prolazi nekoliko struja, svaka od njih stvara u okolini magnetsko polje. Zbroj tih polja u svakoj točki je ukupno polje $\vec{B}$. Ampereov zakon vrijedi s time da je $I=\sum_i I_i$ ukupna struja kroz krivulju C. Struje I_i mogu prolaziti kroz krivulju C u različitim smjerovima pa ih moramo zbrajati kao algebarske veličine, tj. s predznacima plus (+) i minus (−) u ovisnosti o smjeru.

Dogovorno se odlučimo za jedan smjer kao pozitivan. Postavimo ispruženi palac desne ruke u taj smjer i tada nam savijeni prsti pokazuju smjer obilaska krivulje C, tj. smjer u kojem moramo uzimati vektore $d\vec{l}$ u integralu $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l}$.

Ampereov zakon može biti koristan za izračun magnetskog polja u nekim slučajevima gdje postoji visok stupanj simetrije.

Magnetsko polje unutar vodiča kojim teče struja

Do sada smo upoznali samo magnetsko polje izvan vodiča kojim teče struja $\left(B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)$. No magnetsko polje postoji i unutar vodiča.



$j = \frac{I}{\pi R^2}$ gustoća struje

Kroz zatvorenu krivulju C radijusa r prolazi struja

$$I_r = j\pi r^2 = \frac{I}{\pi R^2}\pi r^2 = \frac{r^2}{R^2} I$$

Primijenimo Amperov zakon

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_r$$

Zbog simetrije vodiča magnetsko polje je tangencijalno na kružnicu C, pa je $\vec{B}\cdot d\vec{l} = B\,dl$

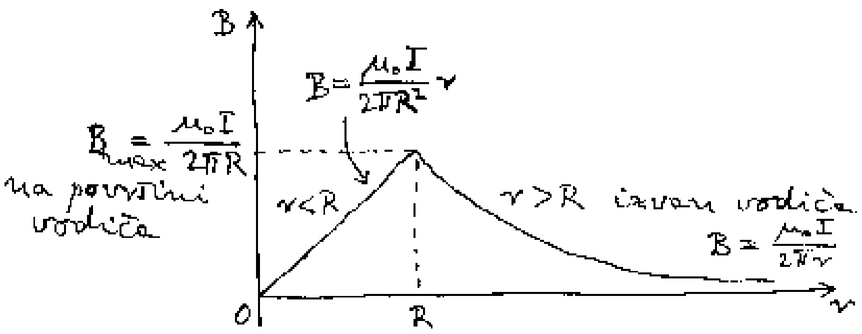
$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_C B\,dl = B\oint_C dl = B\underbrace{2\pi r}_{\text{opseg kružnice } C}$$

$$B\,2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$

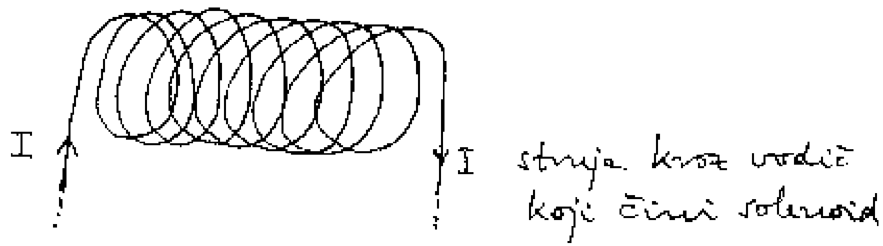
U središtu vodiča ($r=0$) magnetsko polje je nula. Ono raste s udaljenošću r od središta jer struja I_r koja prolazi kroz kružnicu radijusa r raste s r^2 a opseg kružnice raste samo linearno s r.

Možemo prikazati ovisnost magnetskog polja o r.

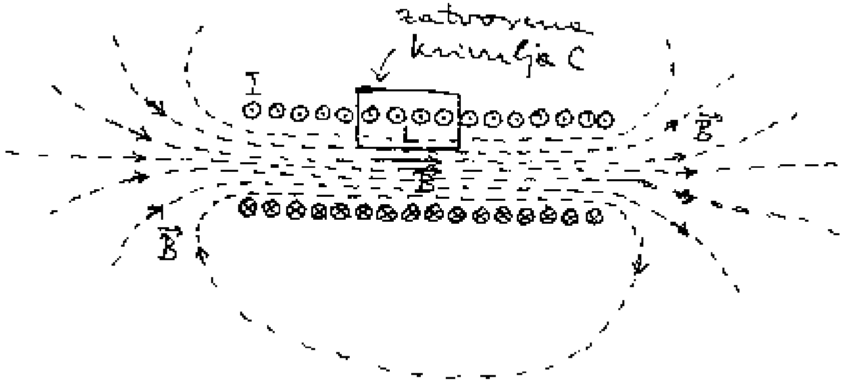


Magnetsko polje unutar solenoida

Solenoid je niz kružnih namotaja vodiča naslaganih gusto jedan do drugoga tako da tvore oblik plašta nekog valjka.



Prikažimo u uzdužnom presjeku solenoid i silnice magnetskog polja.



Sve silnice prolaze kroz solenoid. Unutar njega polje $\vec{B}$ je jako i praktički homogeno u točkama koje su daleko od krajeva solenoida. Izvan solenoida silnice se razilaze i magnetsko polje slabi. Tik izvan solenoida, dalje od njegovih krajeva magnetsko polje je zanemarivo.

Primijenimo Amperov zakon sa zatvorenom krivuljom C u obliku pravokutnika duljine L uzduž osi solenoida. Integral od $\vec{B}\cdot d\vec{l}$ daje doprinos samo na stranici duljine L unutar solenoida

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = BL = \mu_0 N I$$

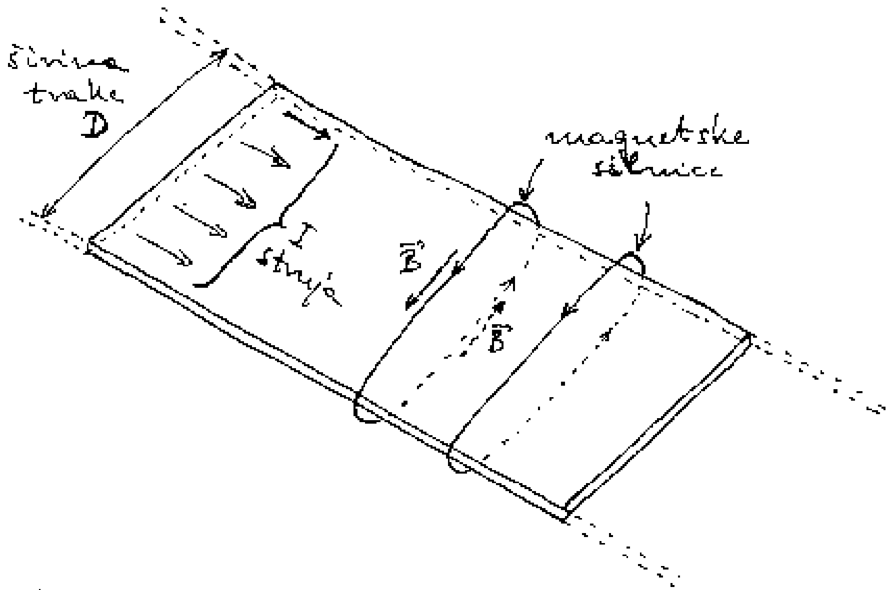
N je broj strujnih petlji koje prolaze kroz pravokutnik, tako da je NI ukupna struja. Magnetsko polje unutar solenoida iznosi

$$\boxed{B = \mu_0 \frac{N}{L} I = \mu_0 n I}$$

Veličina $n = \frac{N}{L}$ predstavlja broj zavoja po jedinici duljine solenoida. To je važan parametar za gradnju solenoida. Magnetsko polje unutar solenoida ne ovisi o radijusu solenoida niti njegovoj ukupnoj duljini. Važno je samo da ukupna duljina bude mnogo veća od radijusa. Idealan solenoid bi bio beskonačno dugačak.

Magnetsko polje površinske struje

Zamislimo da struja teče vodičem koji ima oblik veoma tanke ravne trake. Prikažimo isječak iz te trake i magnetsko polje oko nje.

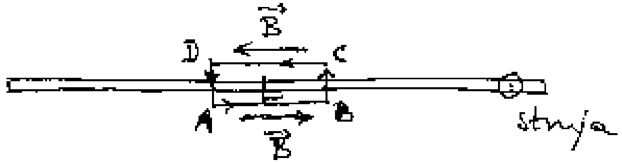


U granici veoma tankog vodiča možemo struju nazivati površinskom (ili plošnom). Ona se prostire po cijeloj širini D vodiča, pa možemo definirati površinsku gustoću struje

$$J_s = \frac{I}{D} \quad (\text{mjeri se u } Am^{-1})$$

koja izražava količinu struje koja teče po 1m poprečne širine plosnatog vodiča.

Nacrtajmo sliku s pogledom u presjeku plosnatog tankog vodiča kojim teče struja



U točkama blizu površine vodiča, a daleko od njegovih krajeva, magnetsko polje $\vec{B}$ je paralelno površini vodiča.

Primijenimo Amperov zakon na zatvorenu krivulju ABCDA

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_L$$

gdje smo s I_L označili dio struje koja prolazi kroz širinu L zatvorene krivulje, što iznosi $I_L = J_s L$. Doprinose linijskom integralu imamo samo duž $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ gdje je $\vec{B}\cdot d\vec{l} = B\,dl$, dok je duž $\overline{BC}$ i $\overline{DA}$ polje $\vec{B}$ okomito na $d\vec{l}$ pa je $\vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$. Ukupno imamo

$$2BL = \mu_0 J_s L$$

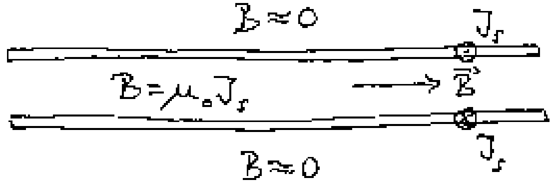
$$\boxed{B = \frac{\mu_0 J_s}{2}}$$

Dobili smo iznos magnetskog polja u ovisnosti o površinskoj (plošnoj) gustoći struje. Zbog simetrije, iznos polja B jednak je s obje strane plosnatog tankog vodiča, no smjer polja se mijenja od jedne strane na drugu.

Napomena:
Ovaj naš rezultat podsjeća na električno polje $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ sa svake strane ravninske raspodjele naboja površinske gustoće σ. Zbog suprotnih smjerova vektora $\vec{E}$ na dvjema stranama, mogli smo reći da električno polje ima promjenu (skok) od $\Delta E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ kada točku promatranja premjestimo kroz ravninu na drugu stranu.

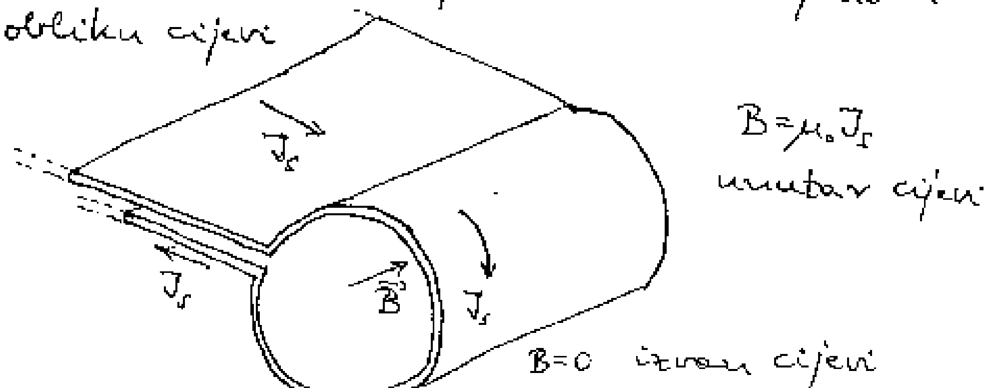
U slučaju tankog plosnatog vodiča kojim teče površinska struja J_s, magnetsko polje ima promjenu (skok) od $\Delta B = \mu_0 J_s$ kada točku promatranja premjestimo kroz ravninu vodiča na drugu stranu. Naglasimo da površinska gustoća struje mijenja tangencijalnu komponentu magnetskog polja $\vec{B}$.

Ako postavimo dva plosnata tanka vodiča u kojima teku plošne gustoće struja u suprotnim smjerovima (crtež u presjeku)



Između vodiča doprinosi dviju površinskih struja se zbrajaju $B = \frac{1}{2}\mu_0 J_s + \frac{1}{2}\mu_0 J_s = \mu_0 J_s$, a izvan vodiča se poništavaju ($B \approx 0$). Kod idealiziranih beskonačno širokih vodiča imali bismo egzaktno $B = 0$ izvan ploča, te homogeno polje $B = \mu_0 J_s$ između ploča.

Zamislimo da su ploče vodiča savijene u obliku cijevi

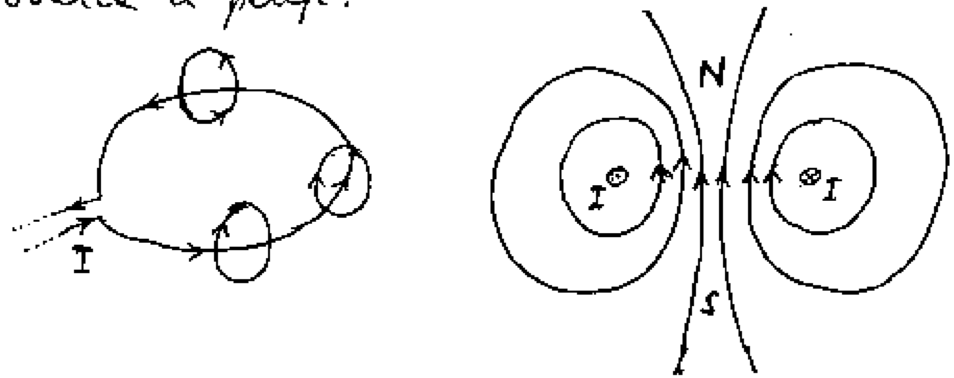


Napomena:

Dobiveni rezultat odgovara onome za solenoid ako uočimo da J_s odgovara izrazu nI (ukupna struja po jedinici duljine solenoida).

5. Magnetski dipolni moment

Razmotrimo strujnu petlju kružnog oblika. Pravilom desne ruke možemo reći smjer magnetskih silnica oko pojedinih dijelova vodiča u petlji.

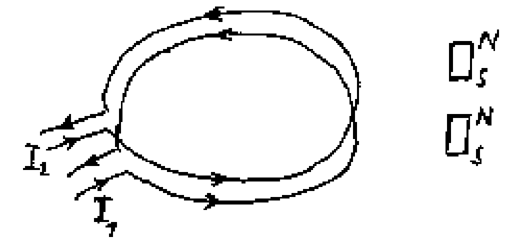


prikaz presjeka petlje

Magnetsko polje strujne petlje prolazi kroz petlju jednim smjerom a izvan petlje se vraća u krug drugim smjerom. Možemo reći da magnetsko polje strujne petlje sliči na magnetsko polje permanentnog magneta te mu možemo pripisati sjeverni (N) i južni (S) pol. To je magnetski dipol.

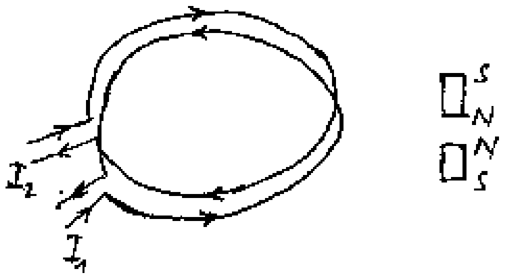
Još jedno pravilo desne ruke: Postavimo savijene prste desne ruke u smjer struje kroz petlju. Ispruženi palac pokazuje smjer sjevernog pola (N). To je ujedno smjer magnetskog polja kroz petlju.

Očekujemo da se strujne petlje međusobno privlače ili odbijaju kao i permanentni magneti.



privlače se

Možemo reći da se petlje privlače jer su polovi postavljeni u niz N-S-N-S. Također možemo reći da se petlje privlače jer su struje paralelne.



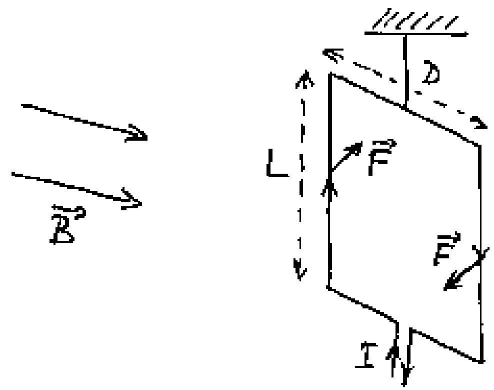
odbijaju se

Odbijanje nastaje jer su polovi u nizu S-N-N-S. Također vidimo da su struje antiparalelne.

Pokus:

privlačenje i odbijanje strujnih petlji

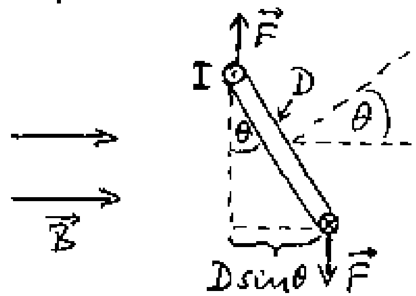
Razmotrimo ponašanje strujne petlje u homogenom magnetskom polju. Neka se strujna petlja nalazi na okviru koji je obješen tako da se može zakretati oko vertikalne osi.



$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$F = ILB$$

Sile na bočne grane petlje čine par sila koji zakreće petlju.
Nacrtajmo horizontalni presjek.



Označimo s θ kut između okomice na petlju i smjera magnetskog polja $\vec{B}$.

Moment para sila jednak je produktu Fd, gdje je d razmak između pravaca duž kojih leže sile. Ovdje je $d = D\sin\theta$.

Prema tome, iznos momenta para sila je

$$M = F D \sin\theta = I L B D \sin\theta$$

Možemo uočiti da je produkt LD jednak površini strujne petlje ($S = LD$). Da bismo dobili vektorsku relaciju za moment para sila definiramo vektor površine $\vec{S}$ koji leži okomito na površinu a smjer mu je duž ispruženog palca desne ruke dok savijeni prsti idu duž smjera struje u petlji. Tada imamo

$$\vec{M} = I \vec{S} \times \vec{B}$$

Veličinu $\vec{m} = I \vec{S}$ nazivamo <u>magnetski dipolni moment</u> strujne petlje.

Ako se magnetski dipol nalazi u magnetskom polju, na njega djeluje moment sile.

$$\boxed{\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}}$$

Dolazi do zakretanja magnetskog dipola. Tek kada se $\vec{m}$ postavi paralelno s $\vec{B}$, iščezne moment sile i nema više zakretanja.

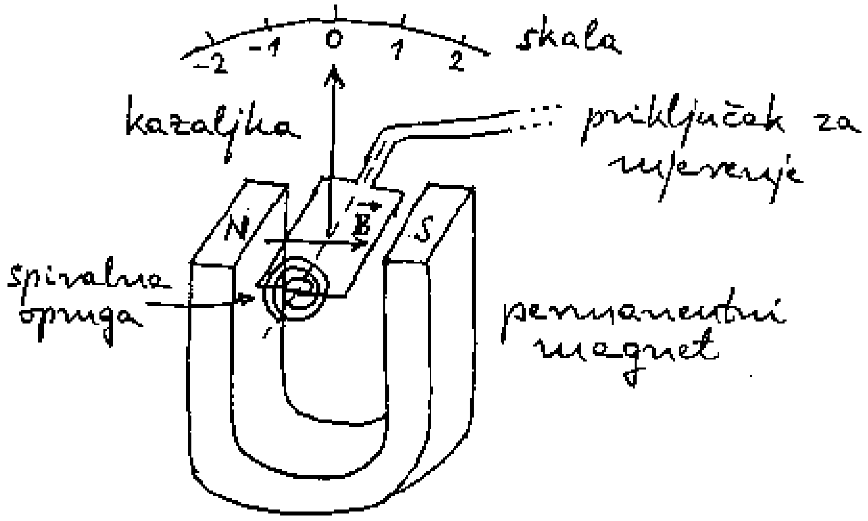
Ako je na okvir namotano N navoja vodiča kojim teče struja I, tada je $\vec{m} = N I \vec{S}$.

<u>Pokus:</u>

zakretanje okvira sa strujnom petljom u magnetskom polju

6. Elektromagnetski mjerni instrumenti

Princip galvanometra zasniva se na zakretanju strujne petlje u magnetskom polju.



Permanentni magnet stvara polje $\vec{B}$.
Kada kroz strujnu petlju poteče struja, okvir se zakreće oko osi označene crtkanom linijom. Moment sile koji zakreće okvir dan je izrazom $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$ iz prethodnog odjeljka.

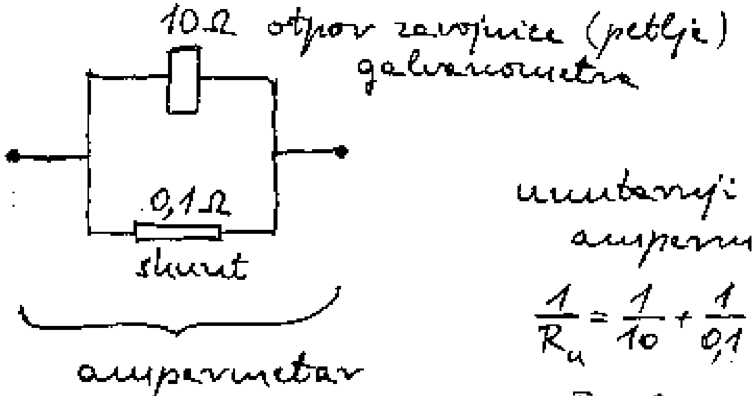
Zakretanjem okvira savija se spiralna opruga. Njena elastična deformacija uzrokuje mehanički moment sile $\vec{M}_{el}$ koji se protivi zakretanju okvira. Ravnoteža se uspostavi kada je

$$\vec{M} + \vec{M}_{el} = 0$$

Kazaljka je vezana uz okvir i zaustavi se u novom položaju.

Ampermetri i voltmetri

Galvanometar može poslužiti kao ampermetar ako mu se u paralelu stavi jako malen otpor (shunt)



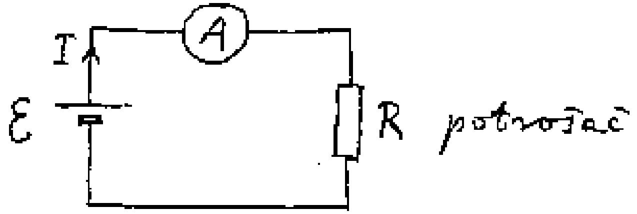
unutarnji otpor ampermetra R_u

$$\frac{1}{R_u} = \frac{1}{10} + \frac{1}{0,1} \approx \frac{1}{0,1}$$

$$R_u \approx 0,1\,\Omega$$

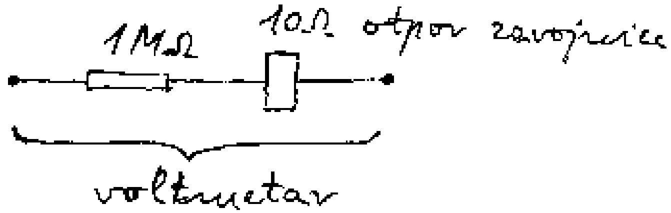
Ukupni unutarnji otpor ampermetra je jako <u>malen</u>.

Ampermetar se uključuje u strujni krug u <u>seriju</u>



Mora biti $R_u \ll R$ zato da uključivanje ampermetra ne promijeni struju u krugu.

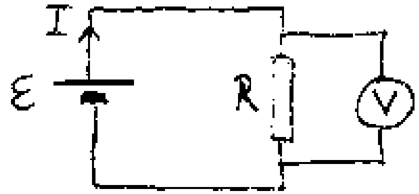
Galvanometar služi kao voltmetar ako se u seriju doda velik predotpor



Ukupni unutarnji otpor voltmetra

$$R_u = 10^6 + 10 \approx 10^6\,\Omega$$ <u>jako velik</u>

Voltmetar se uključuje u <u>paralelu</u>



Mora biti $R_u \gg R$ zato da uključivanje voltmetra ne promijeni napon na potrošaču.

7. Magnetizam u tvarima

U prethodnim odjeljcima spoznali smo da magnetsko polje stvaraju naboji u gibanju. Magnetizam u tvarima nije neko novo svojstvo prirode nego se opet temelji na gibanju naboja ali ne po makroskopskim putanjama (struje u vodičima) nego na razini atoma.

Gibanje elektrona oko jezgre atoma može dovesti do orbitalnog magnetskog momenta.

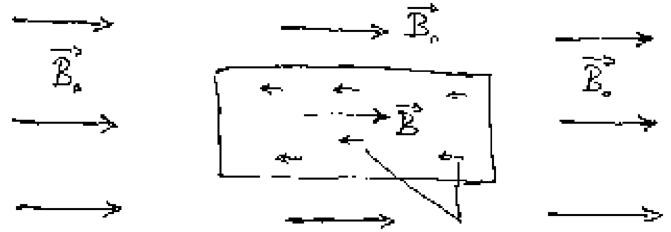
Vrtnja elektrona oko vlastite osi stvara spinski magnetski moment.

Gornji opis nastanka magnetskih momenata predstavlja naivnu sliku koja se ne smije shvatiti doslovno. Stvarna priroda magnetskih momenata atoma dana je kvantnom fizikom.

Opisat ćemo tri vrste magnetskog ponašanja koje susrećemo u raznim tvarima: dijamagnetizam, paramagnetizam i feromagnetizam.

a) Dijamagnetizam

Dijamagnetizam se javlja u svim tvarima iako ne s jednakim intenzitetom. Kada uzorak neke tvari stavimo u vanjsko magnetsko polje $\vec{B}_0$, elektroni u atomu malo promijene svoje gibanje tako da uspostave orbitalni magnetski moment u smjeru suprotnom od $\vec{B}_0$. To su inducirani magnetski momenti, tj. njih nema ako uzorak nije u magnetskom polju. (Ova je pojava analogna s induciranim električnim dipolima u dielektricima koji se nalaze u vanjskom električnom polju $\vec{E}_0$.) Vanjsko magnetsko polje nastaje od nekog permanentnog magneta ili vodiča kojim teče struja. (Izvor polja $\vec{B}_0$ ne prikazujemo.)



inducirani magnetski dipoli u atomima

Inducirani magnetski dipoli stvaraju slabo magnetsko polje u smjeru suprotnom od $\vec{B}_0$. Stoga je unutar uzorka magnetsko polje $\vec{B}$ nešto malo manje od polja $\vec{B}_0$. Odnos unutarnjeg polja prema vanjskom piše se u obliku

$$\vec{B}=\mu_r\vec{B}_0$$

gdje je μ_r relativna permeabilnost sredstva. Za dijamagnetske materijale je $\mu_r \lesssim 1$, tj.

unutarnje polje $\vec{B}$ je nešto malo manje od $\vec{B}_0$. Bizmut ima najjači dijamagnetizam. Za njega je $\mu_r = 0{,}99984$, tj. kod njega je $\vec{B}$ manji od $\vec{B}_0$ za jedva primjetan iznos (manje od jedne tisućinke). Kod ostalih tvari dijamagnetizam je još slabiji i može se utvrditi tek vrlo osjetljivim instrumentima. Dijamagnetizam je vrlo slaba magnetska pojava.

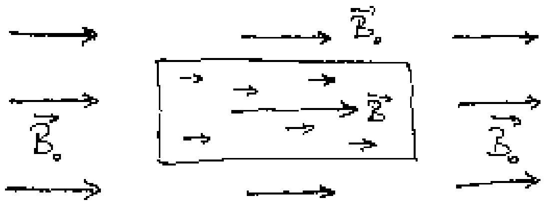
Paramagnetizam

Spinski magnetski moment elektrona nije induciran nego predstavlja njegovo permanentno svojstvo. Međutim, kod većine tvari nalazimo da se po dva elektrona sparuju s međusobno suprotnim spinskim magnetskim momentima. Stoga atomi tih tvari ne posjeduju permanentne magnetske momente, te oni mogu pokazivati samo dijamagnetsko ponašanje zbog induciranih magnetskih dipolnih momenata.

Kod nekih tvari (npr. elementi prijelaznih metala) svi elektroni u atomu nisu u parovima sa suprotnim spinskim magnetskim momentima. Takvi atomi posjeduju permanentne magnetske dipolne momente. Ako se ti atomi nalaze u kemijskom spoju s atomima koji nemaju permanentne magnetske dipolne momente (dijamagnetski atomi), imamo uzorak u kojem permanentni magnetski dipoli nisu jako blizu jedan drugome, pa međusobna interakcija nije velika. Tada imamo pojavu paramagnetizma.

U odsutnosti vanjskog magnetskog polja permanentni magnetski dipoli orijentirani su nasumično na sve strane tako da uzorak kao cjelina ne pokazuje magnetska svojstva. Ako se postavi vanjsko magnetsko polje $\vec{B}_0$, dolazi do djelomične orijentacije dipola u smjeru magnetskog polja. Stupanj orijentiranosti ovisi o temperaturi uzorka. Na niskim temperaturama gotovo svi dipolni momenti usmjereni su duž polja $\vec{B}_0$. Na višim temperaturama toplinsko gibanje uvodi veći nered. Smanjuje se broj dipolnih momenata usmjerenih duž polja $\vec{B}_0$ a raste broj onih koji su usmjereni suprotno od polja $\vec{B}_0$. S porastom temperature sve se više izjednačuju ti brojevi, tj. dobivamo podjednako dipolnih momenata u oba smjera a to znači da uzorak u cjelini gubi magnetsko svojstvo.

Za magnetsko ponašanje paramagnetskog uzorka na nekoj temperaturi važna je razlika u broju dipolnih momenata usmjerenih duž polja $\vec{B}_0$ i onih u suprotnom smjeru, te ih prikazujemo simbolički na slici.



Djelomično orijentirani permanentni magnetski dipoli stvaraju neko magnetsko polje u smjeru polja $\vec{B}_0$. Kada se ovo pribroji polju $\vec{B}_0$ dobivamo unutar paramagnetskog uzorka polje $\vec{B}$ koje je veće od polja $\vec{B}_0$.

Možemo opet pisati

$$\vec{B}=\mu_r\vec{B}_0$$

ali za paramagnetske tvari je $\mu_r>1$ i ovisi o temperaturi uzorka

$$\mu_r = 1+\frac{C}{T}$$

gdje je C neka konstanta koja ovisi o dotičnoj tvari a T je apsolutna temperatura mjerena u kelvinovim stupnjevima. Ovaj izraz za μ_r je aproksimacija koja ne vrijedi na jako niskim temperaturama.

Za $FeCl_3$ na sobnoj temperaturi je $\mu_r = 1{,}0003$.

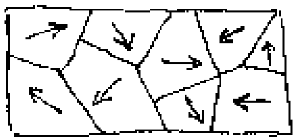
Paramagnetizam je također slaba magnetska pojava.

Feromagnetizam

Ako se atomi s permanentnim magnetskim dipolnim momentima nalaze blizu jedan drugome, može doći do jakog međudjelovanja dipola. To se događa npr. u metalima željeza, nikla, kroma i njihovim legurama.

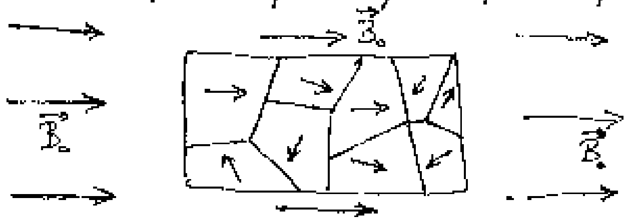
Na visokim temperaturama toplinsko gibanje nadjača međudjelovanje dipola pa se oni ponašaju kao kod paramagnetskih tvari. Međutim, ako uzorak ohladimo ispod neke kritične temperature T_c (npr. za željezo je T_c = 1042 K), prevlada međudjelovanje magnetskih dipola i oni se spontano urede tako da su svi usmjereni u istom smjeru. To je prijelaz iz paramagnetske u feromagnetsku fazu.

Ipak, cijeli uzorak ne poprimi samo jednu usmjerenost dipola. Spontano uređivanje dipola nastaje istodobno i neovisno na mnogo mjesta u uzorku i širi se na okolne dipole. Tako nastane u uzorku mnoštvo domena koje obično imaju mikrometarsku (ili manju) dimenziju. Unutar jedne domene, svi dipoli imaju isti smjer ali su usmjerenja raznih domena nasumična tako da uzorak u cjelini nema svojstvo permanentnog magneta. Simbolički se domene mogu prikazati skicom.

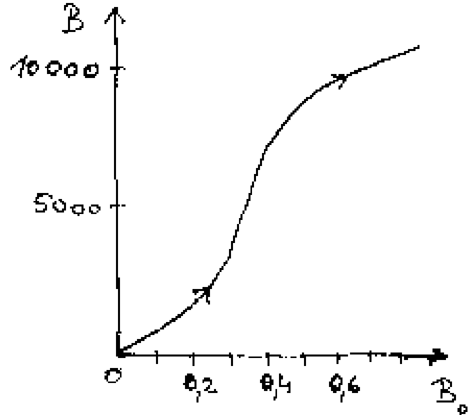


magnetske domene u feromagnetskom uzorku

Ako feromagnetski uzorak stavimo u vanjsko magnetsko polje $\vec{B}_0$, dolazi do djelomičnog zakretanja svih magnetskih dipola jedne domene prema smjeru polja $\vec{B}_0$. Također se događa da domene koje već imaju usmjerenost dipola duž polja $\vec{B}_0$ rastu na račun susjednih domena. Naime, dipoli uz granicu između dviju domena mogu promijeniti svoju orijentaciju tako da se od jedne domene priključe orijentaciji dipola u drugoj domeni. (Atomi koji nose magnetske dipole nisu promijenili svoje položaje u uzorku. Samo se orijentacija dipola promijenila.)



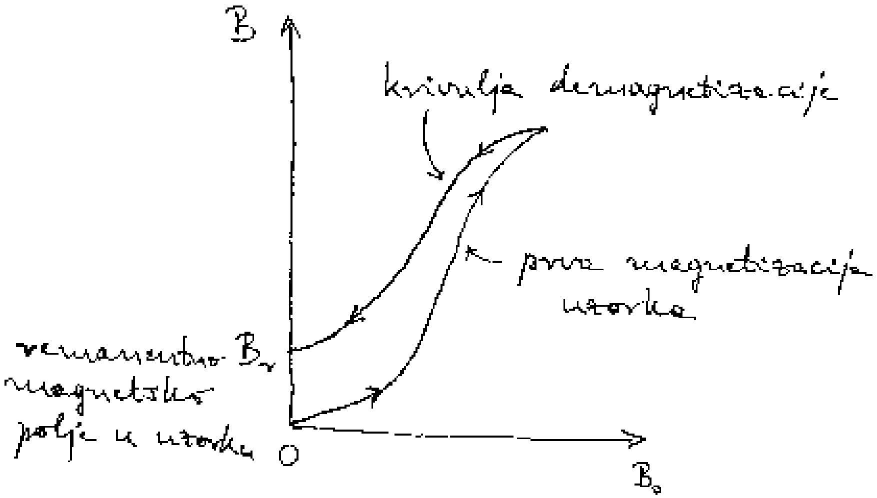
U uzorku nastane prevladavajuća usmjerenost dipola duž polja $\vec{B}_0$, pa je polje $\vec{B}$ unutar uzorka veće od $\vec{B}_0$. Odnos unutarnjeg i vanjskog polja ne možemo opisati linearnom relacijom $\vec{B}=\mu_r\vec{B}_0$ gdje bi μ_r bila konstanta. Ako povećavamo vanjsko polje $\vec{B}_0$, povećava se globalna orijentacija dipola u uzorku. Kod dovoljno velikog polja $\vec{B}_0$ postiže se gotovo potpuna usmjerenost svih dipola duž polja $\vec{B}_0$. To je zasićenje (saturacija) u postupku magnetiziranja uzorka.



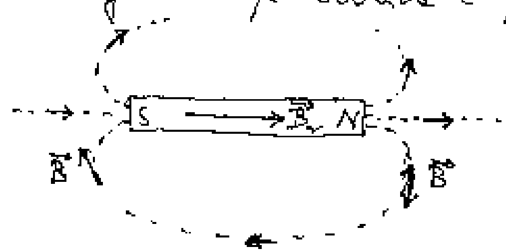
Krivulja prve magnetizacije feromagnetskog uzorka

Zbog velikog broja magnetskih dipolnih momenata i njihove usmjerenosti, polje B unutar uzorka može biti nekoliko tisuća puta (ili čak preko 10000 puta) veće od polja B_0. Feromagnetizam je vrlo jaka magnetska pojava.

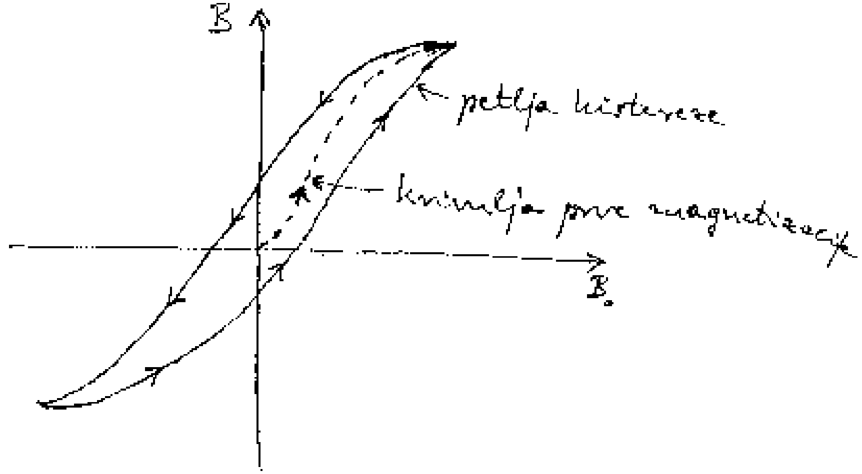
Nakon što smo vanjsko magnetsko polje doveli do neke vrijednosti, možemo ga početi smanjivati. Usmjerenost magnetskih momenata brojnih domena duž polja $\vec{B}_0$ počne se smanjivati. Drugim riječima, red koji je bio uspostavljen počinje se razgrađivati. Međutim, ta razgradnja zaostaje tako da čak i kada polje $\vec{B}_0$ smanjimo na nulu, ostane neka globalna usmjerenost magnetskih momenata, te polje $\vec{B}$ u uzorku ne padne na nulu. To je *remanentno magnetsko polje* $\vec{B}_r$. Stoga je uzorak postao *permanentan* magnet.



Napomena:
U ovome prikazu gledamo samo magnetsko polje u uzorku, no uzorak se ponaša kao permanentan magnet koji stvara i polje oko sebe.



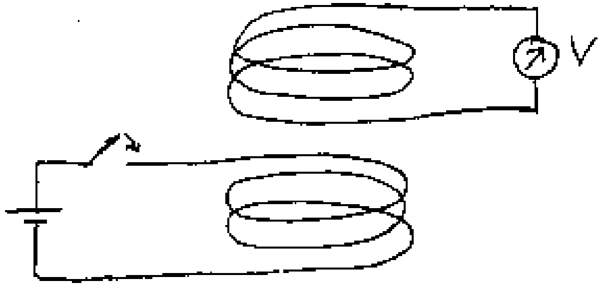
Ako zatim postavimo magnetsko polje $\vec{B}_0$ u suprotan smjer i povećavamo njegov iznos, dolazi do razgradnje usmjerenosti dipola, pa polje $\vec{B}$ u uzorku pada na nulu. Daljnjim povećavanjem polja $\vec{B}_0$ usmjeravaju se dipoli u tom smjeru. Ako polje uzastopno mijenjamo od $+\vec{B}_0$ do $-\vec{B}_0$ i natrag dobivamo petlju *histereze*.



9. ELEKTROMAGNETSKA INDUKCIJA

1. Faradayevo otkriće

M. Faraday (engl. fizičar) otkrio je 1831. g. da promjenljivo magnetsko polje može uzrokovati pojavu napona u strujnoj petlji koja se nalazi u takvome polju.



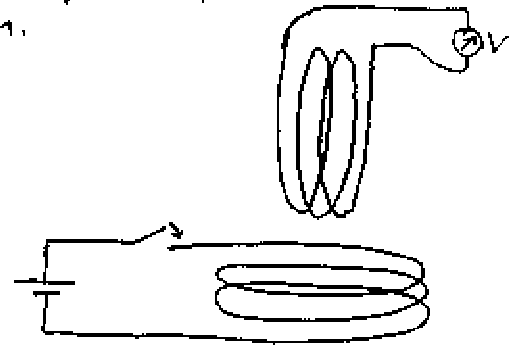
Spajanjem prekidača poteče struja kroz donju zavojnicu i ona stvori magnetsko polje.
Gornja zavojnica nije priključena na vanjski izvor napona!! Ipak, napon se u njoj pojavi ali samo kratkotrajno kada se spoji prekidač u donjem krugu, tj. za vrijeme dok nastaje magnetsko polje.

Kada se prekidač opet otvori, prekine se struja u donjem krugu pa iščezne magnetsko polje. U gornjoj zavojnici se ponovo pojavi kratkotrajan napon ali suprotnog predznaka.

Pokus:

Faradayevo otkriće

Ako zavojnice postavimo u međusobno okomit položaj, ne javlja se inducirani napon.



Pokus:

zavojnice u okomitom položaju

Vratimo se na prijašnji položaj paralelnih zavojnica. Neka kroz jednu zavojnicu teče stalna struja tako da ona stvara stalno magnetsko polje.
Dok zavojnice miruju jedna prema drugoj, nema induciranog napona u drugoj zavojnici. Međutim, kada jednu od njih pomičemo bliže ili dalje od druge, javlja se inducirani napon.

Pokus:

pomicanje jedne zavojnice

Ako to radimo sa zavojnicama u okomitom položaju, nema induciranog napona.

Pokus:

porivanje okomitih zavojnica

Možemo pokušati rotirati jednu od zavojnica tako da se promijeni međusobni položaj iz paralelnog u okomiti ili obrnuto. Za vrijeme rotacije javlja se inducirani napon.

Pokus:

rotacija jedne od zavojnica

Umjesto zavojnica kojom teče stalna struja možemo upotrijebiti permanentni magnet i ponoviti gornje pokuse približavanja i udaljavanja ili rotacije.

Pokus:

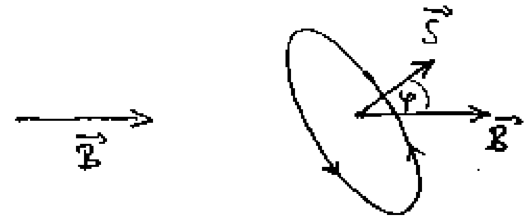
promjena međusobnog položaja permanentnog magneta i zavojnice

2. Faradayev zakon indukcije

U svrhu objašnjenja opisanih pokusa indukcije Faraday je razmatrao magnetski tok kroz zavojnicu.

Magnetski tok kroz neku površinu definira se kao skalarni produkt

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS\cos\varphi$$



Vektor površine $\vec{S}$ je po iznosu jednak samoj površini. Na zatvorenoj krivulji koja omeđuje površinu proizvoljno se odabere smjer obilaska koji se smatra pozitivnim. Ako postavimo savijene prste desne ruke u pozitivan smjer obilaska onda ispruženi palac pokazuje smjer vektora $\vec{S}$.

Zamislimo vodljivu žicu u obliku petlje u homogenom magnetskom polju. Magnetski tok kroz petlju može se promijeniti bilo tako da se mijenja iznos polja B ili tako da se petlja zakreće pa se mijenja kut φ.

Svi prikazani pokusi indukcije mogu se svesti na promjenu magnetskog toka kroz zavojnicu.

Kod promjene magnetskog toka kroz petlju inducira se u njoj elektromotorna sila

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}}$$

To je glasoviti <u>Faradayev zakon indukcije</u>.

Inducirana elektromotorna sila postoji samo dok se magnetski tok mijenja. Čim magnetski tok poprimi stalnu vrijednost, elektromotorna sila iščezne.

Predznak elektromotorne sile govori o njenom odnosu prema pozitivnom smjeru obilaska petlje. Ako magnetski tok kroz petlju raste ($d\Phi_B > 0$), inducirana elektromotorna sila je negativna ($\mathcal{E} < 0$), tj. ona uzrokuje struju koja teče u negativnom smjeru obilaska petlje.

Vrijedi i obrat, ako magnetski tok pada ($d\Phi_B < 0$), dobivamo pozitivnu elektromotornu silu ($\mathcal{E} > 0$) koja uzrokuje struju u pozitivnom smjeru obilaska petlje.

<u>Napomena</u>:
Drugačiji odabir pozitivnog smjera obilaska petlje ne mijenja fizikalnu realnost. Naime promjenom smjera vektora površine ($\vec{S} \to -\vec{S}$) promijeni se i predznak za tok ($d\Phi_B \to -d\Phi_B$) i elektromotorne sile ($\mathcal{E} \to -\mathcal{E}$), no ona se odnosi na novi pozitivni smjer obilaska.

Ako umjesto jedne petlje imamo zavojnicu s N zavoja, onda u svakom zavoju imamo induciranu elektromotornu silu $\mathcal{E}$. Možemo reći da su zavoji spojeni u seriju pa se elektromotorne sile zbrajaju i daju ukupnu elektromotornu silu

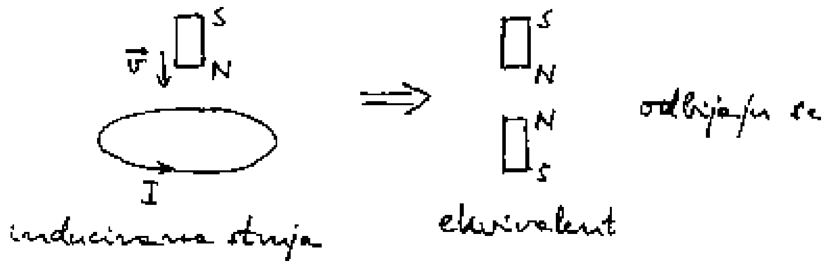
$$\mathcal{E}_{uk} = N\mathcal{E}$$

<u>Lenzovo pravilo</u>

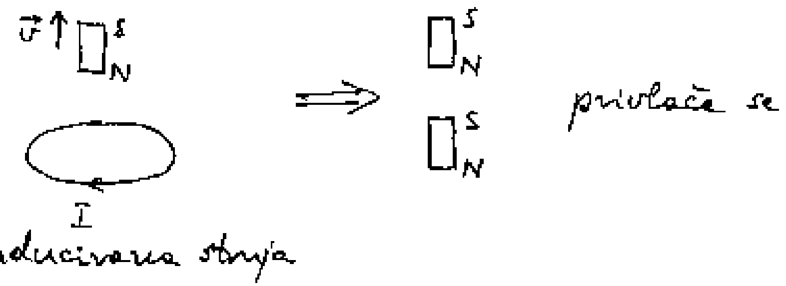
H.F. Lenz (njem. fizičar, 19. st.) je uočio da struja koja poteče kroz petlju zbog inducirane elektromotorne sile $\mathcal{E}$ također stvara magnetski tok kroz tu istu petlju.

U skladu s predznakom inducirane elektromotorne sile, <u>Lenzovo pravilo</u> kaže da magnetski tok koji nastaje od inducirane struje nastoji poništiti promjenu vanjskog magnetskog toka koja uzrokuje indukciju.

Neka se magnet približava vodljivom prstenu.



Ako se magnet udaljava od vodljivog prstena



Pokus:

razni prikazi Lenzova pravila
- magnet i vodljivi prsten na njihalu
- propadanje magneta kroz vodljivi prsten
- propadanje magneta kroz vodljivu cijev

Sila zaustavljanja relativnog gibanja ovisi o jakosti inducirane struje a ona ovisi o otporu same strujne petlje

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Pokus:

promjena otpora vodljivog prstena

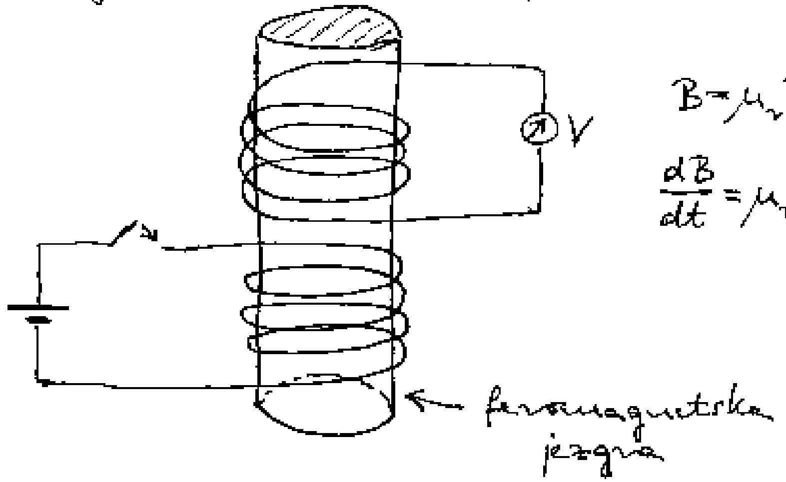
Ako je prsten prekinut ($R = \infty$), njime ne teče struja pa nema sile zaustavljanja.

Pokus:

prsten s prorezom

Učinak feromagnetske jezgre

Ako u Faradayevom pokusu stavimo zavojnice oko stupa (jezgre) od feromagnetskog materijala (npr. željeza), poveća se magnetsko polje pa time i magnetski tok kroz zavojnicu.



$$B = \mu_r B_0$$

$$\frac{dB}{dt} = \mu_r \frac{dB_0}{dt}$$

Inducirana elektromotorna sila ovisi o promjeni magnetskog toka

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(BS)}{dt} = -\mu_r \frac{d(B_0 S)}{dt}$$

Inducirana elektromotorna sila se poveća za faktor μ_r (može biti velik broj) u odnosu na slučaj kada nema feromagnetske jezgre.

3. Priroda inducirane elektromotorne sile

Elektromotornu silu nekog izvora (npr. baterije) definirali smo kao

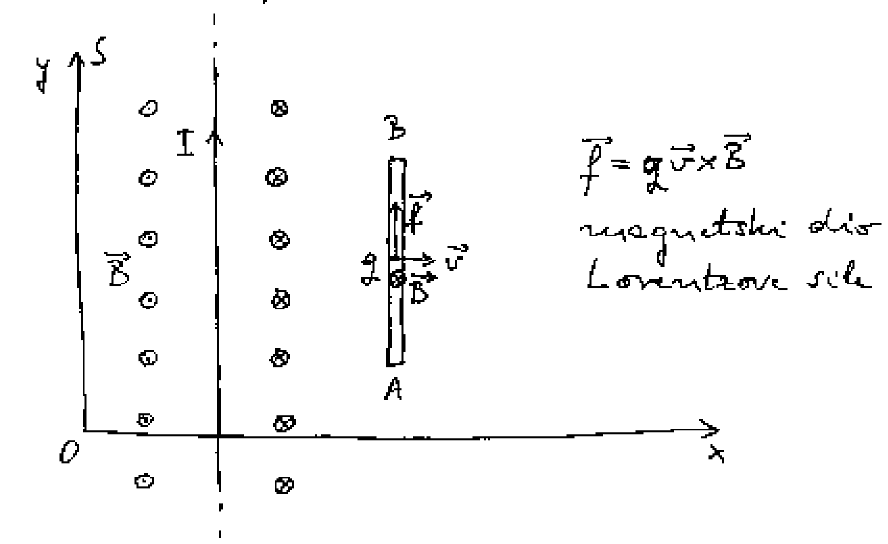
$$\mathcal{E} = \frac{1}{q}\int_A^B \vec{f}\cdot d\vec{l}$$

Sila $\vec{f}$ djeluje na naboj q samo unutar izvora elektromotorne sile. Zato se na polovima izvora gomilaju naboji suprotnih predznaka te nastaje razlika potencijala $U_B - U_A$. Na izvor možemo priključiti vanjski otpor R i njime teče struja, no u njemu nema sile $\vec{f}$.

Kod elektromagnetske indukcije moramo identificirati vodiče koji čine dio izvora, te sile $\vec{f}$ koja u njima djeluje na neki naboj q. Elektromagnetska indukcija se može ostvariti na tri načina koja smo eksperimentalno pokazivali: a) gibanjem vodiča u stalnom magnetskom polju (izvor polja miruje); b) gibanjem izvora magnetskog polja dok vodič miruje; c) vremenskom promjenom magnetskog polja izvora koji miruje (promjena jakosti struje) a vodič također miruje. Možemo razmotriti redom sva tri slučaja.

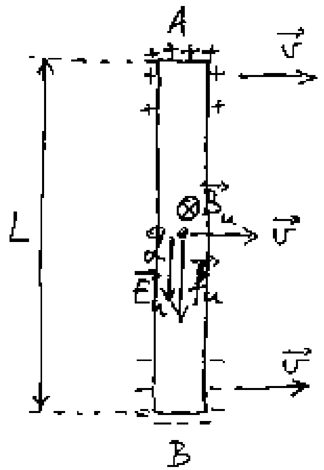
a) Gibanje vodiča u stalnom magnetskom polju

Razmotrimo jednostavan slučaj u kojemu kao izvor magnetskog polja služi dugačak ravan vodič kojim teče stalna struja I. Obavimo promatranje u referentnom sustavu S u kojemu taj vodič miruje tako da u prostoru oko njega imamo stalno magnetsko polje koje opada s udaljenošću od vodiča ($B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$). Neka se u tome polju giba drugi ravan vodič konačne duljine L.



Svi naboji koji se nalaze u vodiču $\overline{AB}$ gibaju se zajedno s cijelim vodičem brzinom $\vec{v}$ duž osi x. Obratimo pažnju na jedan od tih naboja q. Zbog njegova gibanja u magnetskom polju, djeluje na njega sila $\vec{f}=q\vec{v}\times\vec{B}$. Ako se radi o pozitivnom naboju ($q>0$) sila $\vec{f}$ ima smjer prema kraju B (kao na slici).

U vodiču su naboji pokretljivi te se za tren stvori višak pozitivnih naboja na kraju B, a negativnih na drugome kraju A. Ovi naboji stvaraju unutarnju silu $\vec{f}_u$ kojom se uspostavi ravnoteža u djelovanju na promatrani naboj q. Korisno je razmotriti uvećanu sliku sa simbolički prikazanim nabojima na krajevima A i B



$$\vec{f}_u=q\left(\vec{E}_u+\vec{v}\times\vec{B}_u\right)$$

Razdvojeni naboji stvaraju električno polje $\vec{E}_u$ u smjeru od A prema B. Budući da se ti naboji gibaju brzinom $\vec{v}$ kao i cijeli vodič duž osi x (gledano u sustavu S), oni stvaraju i neko magnetsko polje $\vec{B}_u$, te je ukupna sila kojom djeluju na promatrani naboj q dana izrazom $\vec{f}_u=q\left(\vec{E}_u+\vec{v}\times\vec{B}_u\right)$.

Ravnoteža se uspostavi kada je dosegnuto

$$\vec{f}+\vec{f}_u=0$$

te nema daljnjeg razdvajanja naboja prema krajevima A i B.

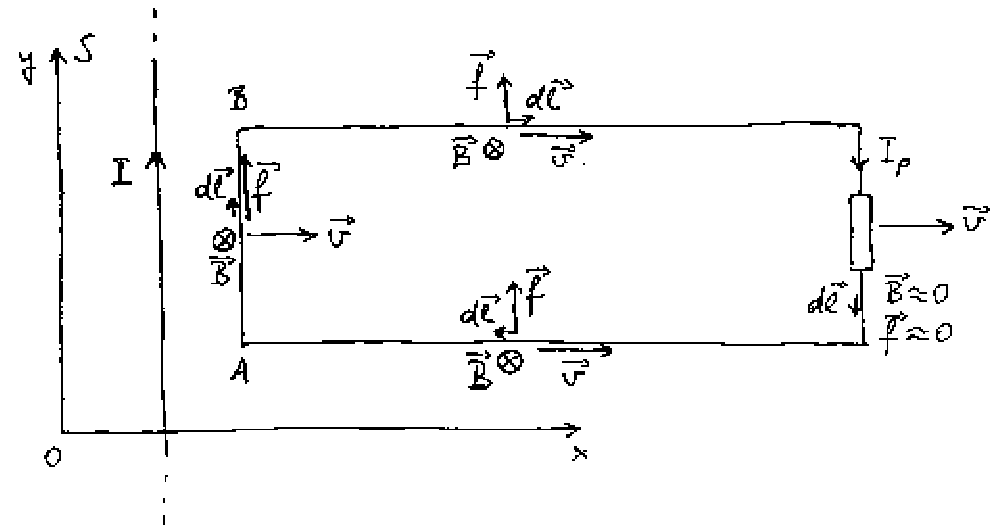
Krajevi A i B sa nagomilanim nabojima suprotnih predznaka predstavljaju polove izvora elektromotorne sile koju možemo lako izračunati

$$\mathcal{E}=\frac{1}{q}\int_A^B\vec{f}\cdot d\vec{\ell}=\frac{1}{q}f\int_A^B d\ell=vBL$$

gdje je B iznos magnetskog polja koje nastaje od struje I, a L je duljina vodiča koji se nalazi u polju B i giba se brzinom v.

Ovo je bio opis izvora elektromotorne sile na koji nije priključen vanjski potrošač pa njime ne teče struja.

Pokušajmo sada priključiti vanjski potrošač. Želimo da sila $\vec{f}$ djeluje samo unutar izvora elektromotorne sile, a ne i u vanjskom dijelu strujnog kruga s potrošačem. Problem nije tako jednostavan kao kod galvanskog članka gdje je sila $\vec{f}$ lokalizirana između elektroda gdje se odvijaju kemijske reakcije. Ovdje se sila $\vec{f}$ može pojaviti u bilo kojemu dijelu prostora gdje magnetsko polje nije nula. Ipak, uzmimo u obzir da polje pada s udaljenošću od vodiča kojim teče struja I $\left(B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\right)$, pa možemo postaviti potrošač daleko od njega, tj. tamo gdje je magnetsko polje praktički jednako nuli.



U sustavu S dugačak ravan vodič, kojim teče struja I, miruje. Cijeli strujni krug s potrošačem giba se brzinom $\vec{v}$, međutim jedino na dijelu od A do B sila $\vec{f}$ ima smjer kao $d\vec{l}$, pa se na tome dijelu stvara elektromotorna sila. Ona uzrokuje struju I_p kroz potrošač. Prema II. Kirchoffom pravilu imamo

$$\mathcal{E} - I_p R = 0 \quad \Longrightarrow \quad I_p = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Napomena:
Ovdje smo pretpostavili idealizaciju po kojoj je otpor žica od A do B i spojnih žica do potrošača zanemarivo malen prema R.

Integral u izrazu za induciranu elektromotornu silu možemo formalno protegnuti na cijelu strujnu petlju, tj. uzeti integral po zatvorenoj krivulji:

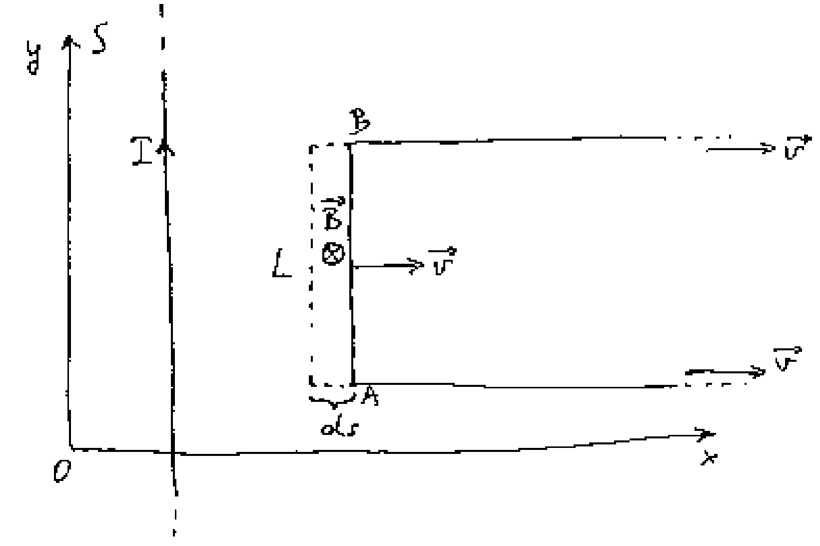
$$\mathcal{E} = \frac{1}{q}\int_A^B \vec{f}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{q}\oint \vec{f}\cdot d\vec{l}$$

Ova jednakost je ispravna jer doprinos

integralu po zatvorenoj krivulji (petlji) nastaje samo na dijelu od A do B, dok na ostalim dijelovima petlje doprinos iščezava. Kasnije ćemo vidjeti da je korisno uzimati integral po zatvorenoj petlji kao izraz koji vrijedi za sve slučajeve.

Povežimo sada dobivenu vrijednost za elektromotornu silu $\mathcal{E} = \frac{1}{q}\oint \vec{F}\cdot d\vec{l} = vBL$ s izrazom koji je utvrđen kao Faradayev zakon $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$.

U tu svrhu razmotrimo pomak petlje u vremenskom intervalu dt.



Vodič $\overline{AB}$ pomakne se za $ds = v\,dt$, te prebriše površinu $dS = L\,ds$.

Magnetski tok koji prolazi kroz površinu dS više ne prolazi kroz zatvorenu petlju. To znači da se tok kroz petlju promijenio za

$$d\Phi_B = -B\,dS$$

Predznak minus znači smanjenje toka kroz petlju. Iz Faradayeva zakona slijedi

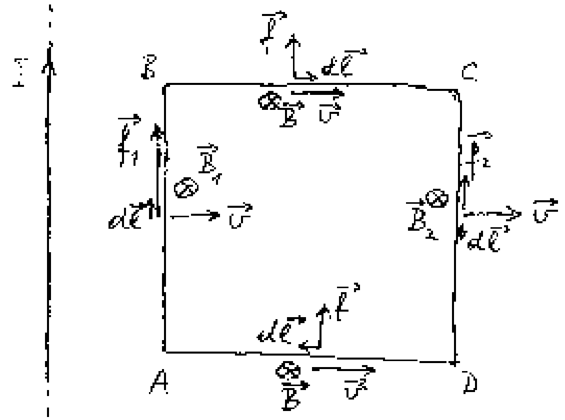
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{-B\,dS}{dt} = B\frac{L\,ds}{dt} = BLv$$

Dobili smo istu vrijednost kao i kod izračuna integrala za elektromotornu silu.

<u>Napomena:</u>

Na drugom kraju petlje gdje se nalazi otpornik magnetsko polje iščezava pa je promjena toka nula.

Razmotrimo sada slučaj koji susrećemo u nekim pokusima iz elektromagnetske indukcije. Cijela petlja se nalazi u prostoru u kojem imamo nezanemarivo magnetsko polje.



Integral po zatvorenoj krivulji provodimo tako da idemo npr. od točke A do B, pa od B do C, od C do D i konačno od D do A.

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q}\oint \vec{f}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{q}\int_A^B \vec{f}_1\cdot d\vec{l} + \underbrace{\frac{1}{q}\int_B^C \vec{f}\cdot dl}_{0} + \frac{1}{q}\int_C^D \vec{f}_2\cdot d\vec{l} + \underbrace{\frac{1}{q}\int_D^A \vec{f}\cdot d\vec{l}}_{0}$$

Vektor $d\vec{l}$ uvijek ima smjer duž kojega obilazimo petlju. U prvome integralu od A do B sila $\vec{f}_1$ je paralelna vektoru $d\vec{l}$, pa je $\vec{f}_1\cdot d\vec{l} = f_1\, dl$. Iznos sile $f_1 = qvB_1$ je konstantan na tom putu jer polja $\vec{B}_1$ ima istu vrijednost u svim točkama te dužine.

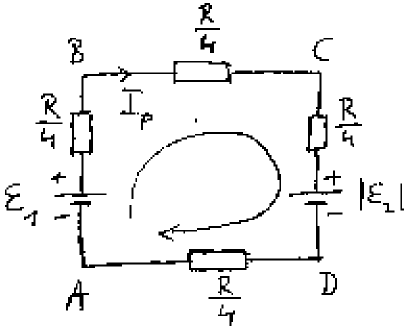
$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{q}\int_A^B \vec{f}_1\cdot d\vec{l} = \frac{1}{q} f_1 \int_A^B dl = \frac{1}{\cancel{q}}\cancel{q}vB_1 L = vB_1 L$$

Na putu od B do C imamo $\vec{f}\cdot d\vec{l} = 0$. Od C do D sila $\vec{f}_2$ je antiparalelna vektoru $d\vec{l}$, pa je $\vec{f}_2\cdot d\vec{l} = -f_2\, dl$. Iznos sile $f_2 = qvB_2$ je manji od f_1 jer je $B_2 < B_1$ zbog veće udaljenosti od ravnog vodiča kojim teče struja I.

$$\mathcal{E}_2 = \frac{1}{q}\int_C^D \vec{f}_2\cdot d\vec{l} = -\frac{1}{q} f_2 \int_C^D dl = -vB_2 L$$

Na putu od D do A imamo opet $\vec{f}\cdot d\vec{l} = 0$, pa na tome dijelu nemamo doprinosa elektromotornoj sili.

U ovome primjeru nema vanjskog potrošača. Jedini potrošač je otpor same žice od koje je načinjena petlja ABCDA. Neka je taj otpor R, te uzmimo, radi jednostavnosti, da je otpor svake od četiri grane jednak $\frac{R}{4}$. Možemo prikazati ekvivalentan strujni krug.



$$V_{AB} = \mathcal{E}_1 - \frac{R}{4}I_p$$

$$V_{BC} = -\frac{R}{4}I_p$$

$$V_{CD} = -\frac{R}{4}I_p - |\mathcal{E}_2|$$

$$V_{DA} = -\frac{R}{4}I_p$$

Primjenom II. Kirchhoffova zakona imamo

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DA} = 0$$

$$\mathcal{E}_1 - \frac{R}{4}I_p - \frac{R}{4}I_p - \frac{R}{4}I_p - |\mathcal{E}_2| - \frac{R}{4}I_p = 0$$

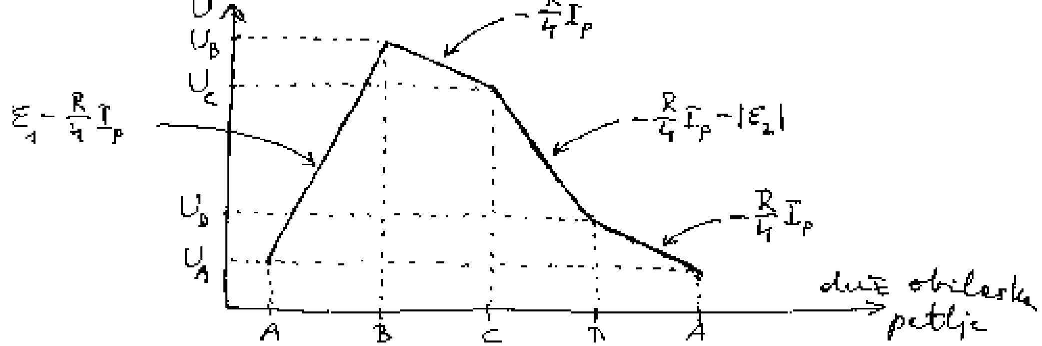
$$\mathcal{E}_1 - |\mathcal{E}_2| - RI_p = 0$$

Ukupna elektromotorna sila u petlji iznosi $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 - |\mathcal{E}_2|$, pa je

$$\mathcal{E} - RI_p = 0 \implies I_p = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

U shemi ekvivalentnog kruga koji je poslužio za primjenu II. Kirchhoffova zakona simbolički su prikazani koncentrirani otpori i elektromotorne sile dok su spojne žice idealizirani vodiči bez otpora. Elektromotorne sile $\mathcal{E}_1$ i $|\mathcal{E}_2|$ spojene su serijski u suprotnosti jedna prema drugoj, no zbog $\mathcal{E}_1 > |\mathcal{E}_2|$ struja u petlji I_p teče onako kako određuje $\mathcal{E}_1$.

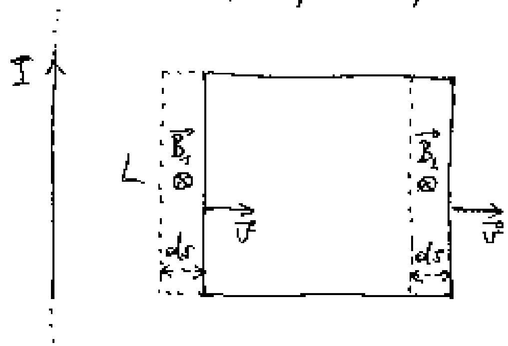
U stvarnosti, elektromotorne sile i otpori nisu koncentrirani nego distribuirani duž petlje. U žici od A do B imamo kontinuirani porast potencijala zbog $\vec{f}_1 d\vec{l}$, ali i kontinuirani pad potencijala zbog struje I_p i otpora dijela žice. Od točke B do C imamo samo kontinuirani pad potencijala zbog struje I_p i otpora žice. Od točke C do D potencijal kontinuirano pada i zbog struje I_p koja teče kroz otpornu žicu i zbog $\vec{f}_2 d\vec{l} = -f_2 dl$. U grani od D do A potencijal kontinuirano pada samo zbog struje I_p i otpora žice.



Povežimo još izračunatu elektromotornu silu u petlji

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = vB_1L - vB_2L = vL(B_1 - B_2)$$

s izrazom iz Faradayeva zakona. U intervalu vremena dt petlja se pomakne za $ds = v\,dt$.



$dS = L\,ds$ prebrisana površina

Magnetski tok kroz petlju se smanji za $B_1 dS$, a poveća za $B_2 dS$. Ukupna promjena toka iznosi

$$d\Phi_B = -B_1 dS + B_2 dS$$

Prema Faradayevu zakonu imamo

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = (B_1 - B_2)L\frac{ds}{dt} = (B_1 - B_2)Lv$$

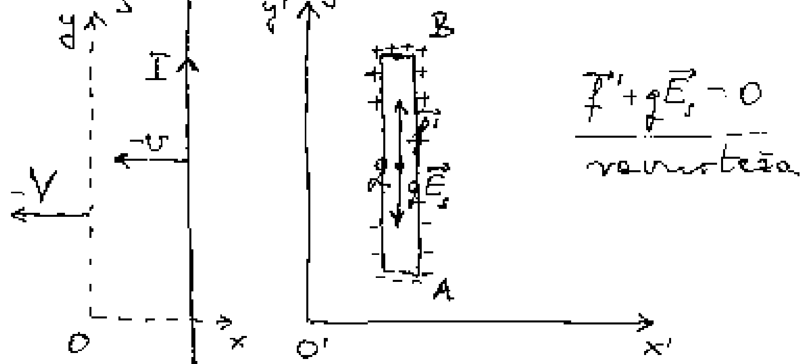
što je jednako gornjem rezultatu dobivenom putem integriranja.

Faradayev zakon se odnosi na cjelovitu petlju i ne razlikuje zbivanja u pojedinim dijelovima petlje. On kaže da je ukupna inducirana elektromotorna sila u petlji jednaka $\mathcal{E}$.

Napomena:
U ovome prikazu nismo uzeli u obzir pojam samoindukcije u petlji. Tu ćemo pojam uvesti i obraditi kasnije u ovome poglavlju. Za sada možemo reći da je prikaz s elektromotornom silom $\mathcal{E}$ i otporom R u petlji, te strujom $I_p = \frac{\mathcal{E}}{R}$ zadovoljavajući dok je struja konstantna.
U slučaju vremenski promjenljive struje valja uzeti u obzir i učinak samoindukcije.

b) Gibanje izvora magnetskog polja dok vodič miruje

Ponovimo razmatranje vodiča duljine L koji se giba relativno prema ravnom dugačkom vodiču kojim teče struja I, no sada se postavimo u sustav S' u kojemu vodič duljine L miruje.



$V = v$: vodič kojim teče struja I giba se istom brzinom kao sustav S

U sustavu S, koji smo prije razmatrali, djelovala je na naboj q sila $\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B}$, gdje je $\vec{B}$ magnetsko polje koje u sustavu S nastaje od vodiča kojim teče struja I. Taj vodič u sustavu S miruje i ne stvara električno polje ($\vec{E} = 0$).

Relativistička transformacija sile iz sustava S u sustav S' daje (čestica na koju sila djeluje miruje u sustavu S') poznato pravilo

$$f' = \gamma f \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Priroda sile $\vec{f}'$ mora biti Lorentzova

$$\vec{f}' = q(\vec{E}' + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\vec{v}'}} \times \vec{B}') = q\vec{E}'$$

gdje sve veličine moramo uzeti u sustavu S'. Budući da naboj miruje u sustavu S' ($\vec{v}' = 0$), Lorentzova sila se u tome sustavu svodi samo na električni dio.

Možemo postaviti pitanje otkud električno polje $\vec{E}'$? Odgovor je jednostavan ako se prisjetimo općih transformacija za elektromagnetsko polje iz sustava S u S'.

Izvor polja je ravan čisti ravan vodič kojim teče struja I. U sustavu S, imamo $\vec{E}=0$ i magnetsko polje $\vec{B}$ koje ima komponentu B_z (prema odabranom smjeru struje na slici imamo $B_z<0$, tj. magnetsko polje ima smjer duž negativne osi z). U sustavu S' opaža se polje

$$E'_y = \gamma\,(\underbrace{E_y}_{0} - VB_z) = -\gamma V B_z$$

Zbog $B_z<0$ dobivamo $E'_y>0$, tj. električno polje $\vec{E}'$ ima smjer duž pozitivne osi y'. Razmatrajući odnose na slici lako uočavamo da gornju relaciju možemo zapisati u vektorskom obliku

$$\vec{E}' = \gamma\,\vec{v}\times\vec{B}$$

gdje smo uočili da je $\vec{v}=\vec{V}$ (brzina naboja u sustavu S je ujedno brzina sustava S' prema S).

Prema tome, uistinu vrijedi odnos

$$\vec{F}' = q\vec{E}' = \gamma q\,\vec{v}\times\vec{B} = \gamma\vec{F} \quad ✓$$

U sustavu S' opaža se električno polje $\vec{E}'$ tako da inducirana elektromotorna sila u tom sustavu ima iznos

$$\mathcal{E}' = \frac{1}{q}\int_A^B \vec{F}'\cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}'\cdot d\vec{l}$$

U vodiču koji miruje, a giba se izvor magnetskog polja (mijenja se u vremenu magnetsko polje), induciranu elektromotornu silu računamo pomoću električnog polja $\vec{E}'$. To polje nazivamo induciranim električnim poljem. Ono se bitno razlikuje od elektrostatičkog polja. Naime, elektrostatičko polje ima svoje izvore (pozitivni naboji) i ponore (negativni naboji). Ono je konzervativno $\oint \vec{E}_s\cdot d\vec{l}=0$ i može poslužiti za izračun razlike potencijala $dU=-\vec{E}_s\cdot d\vec{l}$. Nasuprot tome, silnice induciranog električnog polja $\vec{E}'$ nemaju svoje izvore i ponore. Kasnije ćemo vidjeti da $\oint \vec{E}'\cdot d\vec{l}\neq 0$, tj. inducirano električno polje nije konzervativno te ne može poslužiti za izračun razlike potencijala.

Radi potpunosti analize, osvrnimo se još i na transformaciju sile $\vec{f}_u$ kojom razdvojeni naboji na krajevima A i B djeluju na promatrani naboj q. Transformacijom iz sustava S u sustav S' dobivamo također

$$f_u' = \gamma f_u$$

Međutim, cijeli vodič s razdvojenim nabojima na krajevima A i B miruje u sustavu S'. Stoga ti naboji u sustavu S' stvaraju samo elektrostatičko polje $\vec{E}_s$, pa je

$$\vec{f}_u' = q\vec{E}_s$$

Ovaj rezultat je sukladan općem pravilu o transformaciji elektromagnetskog polja. Naime, ako smo u sustavu S imali polja $\vec{E}_u$ i $\vec{B}_u$, onda u sustavu S' imamo električno polje E_s

$$E_s = \gamma\left(E_u - vB_u\right) \qquad \text{(v. poglavlje 7.)}$$

Ovdje podrazumijevamo da E_u i E_s predstavljaju komponente duž osi y, a B_u duž osi z.
Dobivamo: $f_u' = qE_s = q\gamma(E_u - vB_u) = \gamma f_u$ ✓

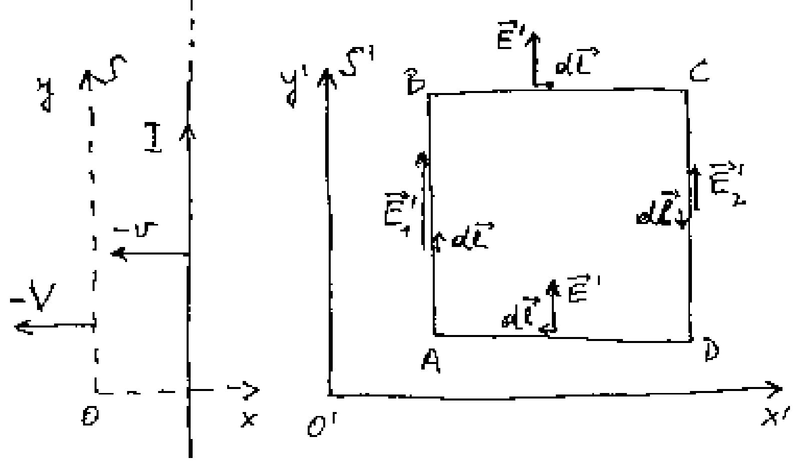
Polje $\vec{E}_s$ ima uistinu sva obilježja elektrostatičkog polja, tj. ima izvore i ponore (naboji na krajevima A i B koji miruju), te se pomoću njega može računati razlika potencijala

$$dU = -\vec{E}_s\, d\vec{l} \implies U_B - U_A = \int_A^B dU = E_s \int_A^B dl = E_s L$$

Ovdje smo uzeli u obzir da je polje $\vec{E}_s$ usmjereno od B prema A, dok $d\vec{l}$ uzimamo u smjeru integriranja od A do B, pa je $\vec{E}_s d\vec{l} = -E_s dl$.

<u>Elektromagnetska indukcija u petlji</u>

Razmotrimo primjer s petljom ABCD, no sada gledano u sustavu S' u kojem petlja <u>miruje</u>.



$\underline{\underline{V = v}}$

Ovdje je prikazano samo inducirano električno polje $\vec{E}'$ u raznim granama petlje. O polju $\vec{E}_s$ ćemo raspraviti kasnije.

Transformacije elektromagnetskog polja iz sustava S u sustav S' daju

$$\vec{E}_1' = \gamma \vec{v} \times \vec{B}_1$$
$$\vec{E}_2' = \gamma \vec{v} \times \vec{B}_2$$

gdje je $\vec{B}_1$ magnetsko polje u točkama na grani $\overline{AB}$ koje se opaža u sustavu S, a $\vec{B}_2$ vrijedi na isti način za granu $\overline{CD}$.

Na naboj q djeluje sila $\vec{F}' = q\vec{E}'$, pa je inducirana elektromotorna sila

$$\mathcal{E}' = \frac{1}{q} \oint \vec{F}' \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}' \cdot d\vec{l}$$

Možemo izračunati integral induciranog električnog polja po zatvorenoj krivulji

$$\oint \vec{E}' \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}' \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{E}' \cdot d\vec{l} = E_1' L - E_2' L = (E_1' - E_2') L$$

Koristeći se jednadžbama za transformaciju polja $E_1' = \gamma v B_1$ i $E_2' = \gamma v B_2$, možemo pisati

$$\mathcal{E}' = (E_1' - E_2') L = \gamma v (B_1 - B_2) L = \gamma \mathcal{E}$$

gdje je $\mathcal{E}$ elektromotorna sila koju smo izveli kod opažanja u sustavu S. Zbog $\gamma > 1$ nalazimo da je $\mathcal{E}' > \mathcal{E}$. Ovaj rezultat vrijedi općenito. Inducirana elektromotorna sila ima najveću vrijednost u sustavu u kojem zatvorena krivulja miruje. U svim drugim sustavima u kojima se krivulja giba, nalazimo umanjenu induciranu elektromotornu silu $\mathcal{E} = \frac{1}{\gamma}\mathcal{E}'$.

Ranije smo utvrdili da u sustavu S vrijedi Faradayev zakon indukcije u obliku $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$. Moramo provjeriti što se događa u sustavu S'. Prisjetimo se Lorentzove transformacije za vrijeme

$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2} x'\right) \implies dt = \gamma \, dt'$$

gdje smo uvažili činjenicu da krivulja miruje u sustavu S', pa se za bilo koju točku na krivulji x' ne mijenja u vremenu. Stoga nalazimo da vrijedi odnos

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{d\Phi_B}{dt'}$$

gdje se $\frac{d\Phi_B}{dt'}$ mjeri u sustavu S' u kojem zatvorena petlja miruje.

Povezujući gornje jednadžbe nalazimo

$$\mathcal{E}' = -\frac{d\Phi_B}{dt'}$$

Ovo je izuzetno važan rezultat. Faradayev zakon indukcije ima isti oblik u sustavu S' kao i u sustavu S. Općenito, Faradayev zakon indukcije ima isti oblik u svim inercijalnim sustavima. Valja samo pripaziti da se sve veličine, kako one s lijeve tako i s desne strane znaka jednakosti, izraze u istome referentnom sustavu.

Faradayev zakon indukcije možemo pisati i pomoću linijskog integrala induciranog električnog polja

$$\boxed{\oint_C \vec{E}'\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt'}}$$

u sustavu u kojemu zatvorena krivulja C miruje

Linijski integral induciranog električnog polja po zatvorenoj krivulji nije nula ako se magnetski tok kroz petlju mijenja u vremenu.

Pored induciranog električnog polja, može u istome prostoru postojati i neko elektrostatičko polje $\vec{E}_s$ koje nastaje zbog mirujućih pozitivnih i negativnih naboja. Elektrostatičko polje je konzervativno, tj. za njega vrijedi

$$\oint_C \vec{E}_s\cdot d\vec{l} = 0$$

gdje linijski integral može biti izračunat po bilo kojoj zatvorenoj krivulji C.

Možemo sada uvesti <u>ukupno</u> električno polje u svakoj točki prostora

$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}_s$$

te izračunati linijski integral ukupnog polja po odabranoj zatvorenoj krivulji C

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \oint_C (\vec{E}' + \vec{E}_s)\cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{E}'\cdot d\vec{l} + \underbrace{\oint_C \vec{E}_s\cdot d\vec{l}}_{0}$$

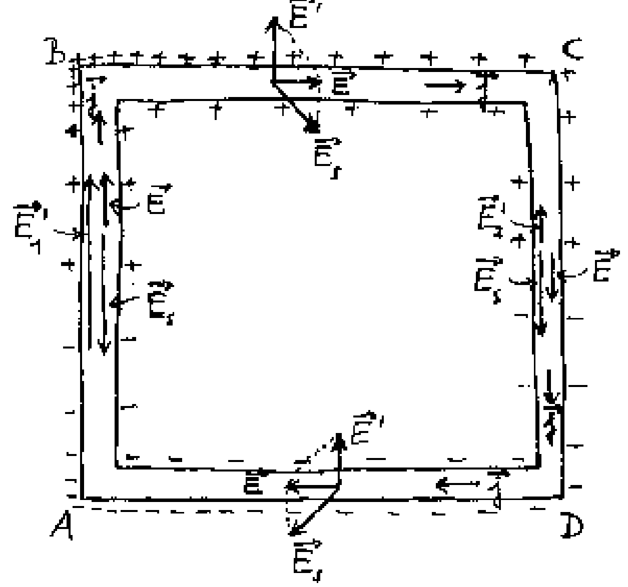
Doprinos daje samo integral induciranog električnog polja, koji nam je poznat

$$\boxed{\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}}$$

u sustavu u kojemu zatvorena krivulja C miruje

<u>Napomena:</u>
Nije nužno pisati dt' jer navedeni sustav ne moramo nužno označavati kao S'.

Radi boljeg razumijevanja polja $\vec{E}'$, $\vec{E}_s$ i $\vec{E}$ u petlji, prikažimo ih zajedno na uvećanoj slici gdje vodič koji čini petlju ima neku debljinu.



Ohmov zakon daje:

$\vec{j} = \sigma \vec{E}$

$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}_s$

ukupno polje

Inducirano električno polje djeluje svugdje silom $\vec{F}' = q\vec{E}'$ na naboje u vodiču tako da dolazi do razdvajanja naboja. Najveća gustoća pozitivnih naboja stvori se na površini oko točke B, a ~~neg~~ negativnih naboja oko točke A.

Površinski naboji stvaraju elektrostatičko polje $\vec{E}_s$. Ti se naboji raspodijele upravo tako da ukupno polje $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}_s$ ima isti iznos u svakoj grani, te da je usmjereno duž vodiča u istome smjeru obilaska petlje. To je neophodno da bi gustoća struja $\vec{j}$ bila jednaka u svim granama, tj. da bi struja u petlji I_p bila ista. (Pretpostavili smo da je petlja načinjena od vodiča jednolikog poprečnog presjeka.)

Duž grane AB površinska gustoća naboja se najbrže mijenja, te nastaje najveće polje $\vec{E}_s$. Ono je usmjereno točno duž vodiča jer su naboji na površini jednako raspoređeni s unutarnje i vanjske strane petlje. Po iznosu je $\vec{E}_s$ manje od induciranog polja $\vec{E}_1'$ tako da ukupno polje $\vec{E}$ ima smjer od A prema B.

U grani BC inducirano polje $\vec{E}'$ je okomito na vodič. Sila $q\vec{E}'$ potisne više pozitivnih naboja na površinu vodiča s vanjske strane petlje nego s unutarnje strane. Ova nejednaka raspodjela naboja stvara elektrostatičko polje koje ima komponentu suprotnu polju $\vec{E}'$. Pored toga, gustoća pozitivnog naboja se smanjuje od B prema C, tako da polje $\vec{E}_s$ ima i komponentu u tome smjeru.

Od C prema D površinska gustoća naboja se mijenja nešto manje nego u grani BA, ali više nego u grani BC. Naboji su jednako raspoređeni na površini vodiča CD s unutarnje i vanjske strane petlje, tako da $\vec{E}_s$ ima smjer duž vodiča. Po iznosu je $\vec{E}_s$ veće od induciranog polja $\vec{E}_2'$, pa ukupno polje $\vec{E}$ ima smjer od C prema D.

U grani AD nalazimo raspodjelu naboja na površini vodiča koja odgovara onoj u grani BC, ali s negativnim predznakom. Elektrostatičko polje $\vec{E}_s$ ima komponentu okomitu na vodič, koja točno kompenzira inducirano polje $\vec{E}'$, te još komponentu duž vodiča. Potonja predstavlja ukupno polje $\vec{E}$.

Napomena:

Na slici su prikazana samo polja unutar vodiča, a ne izvan njega. Svaki vektor koji prikazuje neko polje odnosi se na polje u točki u kojoj je početak vektora.

Za računanje razlike potencijala između točaka duž petlje mora se uzimati samo elektrostatičko polje $\vec{E}_s$, tj. $dU = -\vec{E}_s \cdot d\vec{l}$. Integral po cijeloj petlji od A preko B, C i D opet do A daje nulu

$$\oint \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = 0$$

tj. vraćanjem u istu točku ne dobiva se razlika potencijala.

Inducirano polje $\vec{E}'$ daje u integraciji po petlji

$$\oint \vec{E}' \cdot d\vec{l} = \mathcal{E} \neq 0$$

Stoga se $\vec{E}' \cdot d\vec{l}$ ne smije povezivati s promjenom potencijala. Isto vrijedi i za $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ jer ukupno polje $\vec{E}$ nastaje od elektrostatičkog i induciranog polja ($\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}'$).

Korisno je još razumjeti kako nastaju i kolike su razlike potencijala između uzastopnih točaka A, B, C i D u petlji. Krenimo od točke A i izračunajmo promjenu potencijala od A do B

$$U_B - U_A = -\int_A^B \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}_1' \cdot d\vec{l} - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E}_1 - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Ovdje smo upotrijebili izraz za ukupno polje

$$\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_1' \quad \Longrightarrow \quad \vec{E}_s = -\vec{E}_1' + \vec{E}$$

Također smo uveli oznaku $\mathcal{E}_1$ za induciranu elektromotornu silu u grani AB. Ukupno polje $\vec{E}$ je ono koje uzrokuje gustoću struje $\vec{j}$ u skladu s mikroskopskim oblikom Ohmova zakona

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{1}{\sigma} j = \rho \frac{I_p}{S}$$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B E\, dl = I_p \rho \frac{1}{S} \int_A^B dl = I_p \rho \frac{L}{S} = I_p \frac{R}{4}$$

Ovdje smo označili otpornost vodiča s ρ, duljina vodiča od A do B je L, a S je poprečni presjek vodiča. Otpor svake grane petlje je $\frac{R}{4}$, gdje je R ukupni otpor cijele petlje.

Prema tome je razlika potencijala točaka A i B

$$U_B - U_A = \mathcal{E}_1 - \frac{R}{4} I_p$$

Idući od A prema B elektromotorna sila povećava energiju naboja, no ujedno se dio te energije troši (pretvara u toplinu) u otporu tog dijela vodiča, tako da samo razlika ide u povećanje potencijalne energije naboja, odnosno povećava potencijal od U_A do U_B.

U grani BC imamo razliku potencijala

$$U_C - U_B = -\int_B^C \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = \int_B^C \underbrace{\vec{E}' \cdot d\vec{l}}_{0} - \int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{R}{4} I_p$$

Budući da je $\vec{E}'$ okomito na $d\vec{l}$, prvi integral iščezava, tj. nema inducirane elektromotorne sile u grani BC. Drugi integral je isti kao u grani AB. Prema tome, u grani BC potencijalna električna energija naboja se troši (pretvara u toplinu) u otporu tog dijela vodiča, pa imamo pad potencijala od B prema C.

Od C do D imamo inducirano električno polje $\vec{E}_2'$, no $d\vec{l}$ je u suprotnom smjeru od njega

$$U_D - U_C = -\int_C^D \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = \int_C^D \vec{E}_2' \cdot d\vec{l} - \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E}_2 - \frac{R}{4} I_p = -|\mathcal{E}_2| - \frac{R}{4} I_p$$

Inducirana elektromotorna sila od C do D je negativna ($\mathcal{E}_2 = -|\mathcal{E}_2|$) jer polje $\vec{E}_2'$ djeluje na naboj u suprotnome smjeru od njegova pomaka $d\vec{l}$, te mu oduzima energiju. Dio potencijalne energije naboja troši se i pretvaranjem u toplinu u otporu vodiča. Zbog oba učinka, smanjuje se potencijal od U_C do U_D.

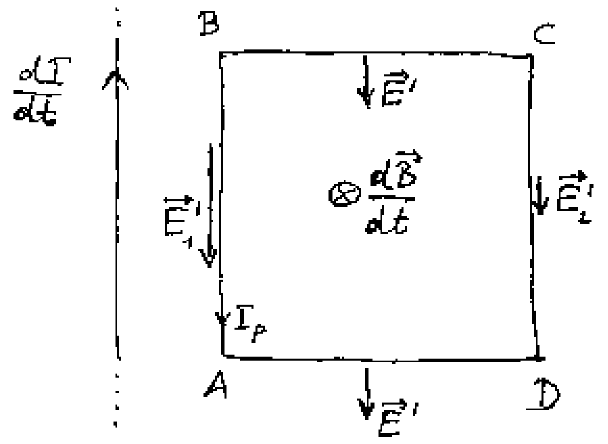
U grani DA imamo analogno kao i u BC

$$U_A - U_D = -\int_D^A \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = \int_D^A \underbrace{\vec{E}' \cdot d\vec{l}}_{0} - \int_D^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{R}{4} I_p$$

Dobivene razlike potencijala u granama identične su onima koje smo već izveli za petlju ABCD razmatranjem u sustavu Oxyz u kojemu je izvor magnetskog polja (struja I) mirovao a petlja se gibala brzinom $\vec{v}$. Graf, koji prikazuje promjenu potencijala duž petlje, tom smo prilikom već prikazali.

c) <u>Vremenska promjena magnetskog polja izvora koji miruje a vodič također miruje</u>

Vremensku promjenu magnetskog polja dobivamo ako mijenjamo struju u izvoru polja (ravan vodič).

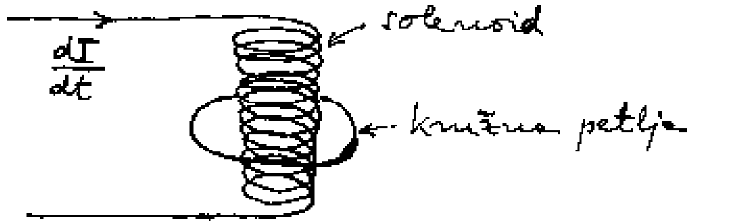


Ravan vodič i petlja ABCD miruju jedan prema drugome. Ako je struja I u ravnome vodiču stalna, nema induciranog električnog polja, pa ni elektromotorne sile. Međutim, ako se struja u ravnome vodiču mijenja u vremenu, pojavljuje se inducirano električno polje $\vec{E}'$. Inducirana elektromotorna sila je takva da je zadovoljeno Lenzovo pravilo, tj. struja I_p koja poteče u petlji ima takav smjer da tok magnetskog polja kojeg ona stvara nastoji poništiti promjenu toka koja nastaje uslijed promjene struje u ravnome vodiču.

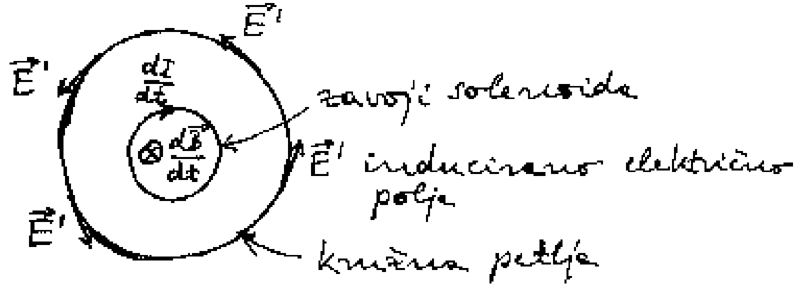
Priroda nastanka induciranog polja $\vec{E}'$ je drukčija od one koju smo imali u slučaju kada se izvor magnetskog polja (ravan vodič) gibao stalnom brzinom $-\vec{v}$. U ovome slučaju inducirano električno polje nastaje zbog <u>akceleracije</u> naboja koja je vezana uz promjenu struje $\frac{dI}{dt}$. (Stalna struja I nastaje gibanjem naboja stalnom brzinom $\vec{v}$ duž vodiča! Stoga promjena struje $\frac{dI}{dt}$ može nastati jedino ako se brzina naboja mijenja. $\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{a}$!)

Složenijim razmatranjem može se pokazati da se kod akceleracije naboja javlja inducirano električno polje koje ima suprotan smjer od akceleracije. Ovdje to ne ćemo izvoditi.

Razmotrimo još jedan primjer koji se često javlja u praksi. Neka je izvor magnetskog polja solenoid kojim teče struja. Vodič u kojem želimo detektirati elektromagnetsku indukciju je kružna petlja oko solenoida.



Ako kroz solenoid teče stalna struja I, unutar njega se stvara homogeno magnetsko polje $B=\mu_0\frac{N}{L}I$, gdje je N broj zavoja a L je duljina solenoida (aproksimacija za gotovo idealan solenoid). Ako se struja mijenja, nastaje promjenljivo magnetsko polje $\frac{dB}{dt}=\mu_0\frac{N}{L}\frac{dI}{dt}$, a time i promjenljiv magnetski tok kroz solenoid $\frac{d\Phi_B}{dt}=\frac{d}{dt}(BS)=\frac{dB}{dt}S$, gdje je S površina unutar zavoja solenoida. Prikažimo to u pogledu odozgo.



U svakoj točki kružne petlje javlja se inducirano električno polje $\vec{E}'$ koje je tangencijalno na kružnicu. Integral po zatvorenoj petlji daje induciranu elektromotornu silu

$$\oint \vec{E}'\cdot d\vec{l} = \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

<u>Napomena</u>:

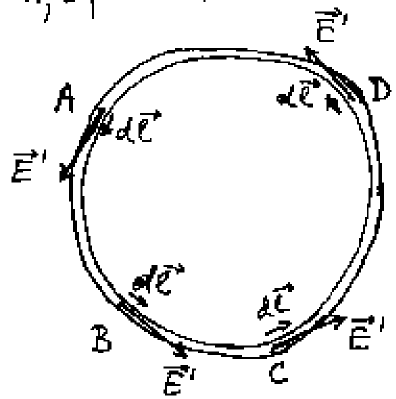
Očito je da se silnica <u>induciranog</u> električnog polja poklapa s kružnom petljom, a to znači da <u>nema izvora i ponora</u>.
Tu opet vidimo bitnu razliku između induciranog polja i elektrostatičkog polja

Neka vodič koji čini kružnu petlju ima ukupni otpor R. Možemo razmotriti pitanje potencijala duž petlje. Formalno je uvijek ispravno pisati za ukupno električno polje $\vec{E}$

$$\vec{E} = \underbrace{\vec{E}_s}_{=0} + \vec{E}' \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\vec{E}_s}_{=0} = -\vec{E}' + \vec{E}$$

Elektrostatičko polje $\vec{E}_s$ iščezava u ovom slučaju jer sila $\vec{f} = q\vec{E}'$ tjera naboje uvijek u krug pa ne može doći na jednom mjestu do viška pozitivnih, a na drugom mjestu do viška negativnih naboja. Ako nema razdvajanja pozitivnih i negativnih naboja, nema ni elektrostatičkog polja.

Označimo proizvoljno neke točke na kružnoj petlji s A, B, C i D.



Razliku potencijala između dviju točaka računamo na isti način kao i prije, npr.

$$U_B - U_A = -\int_A^B \underbrace{\vec{E}_s}_{=0}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}'\cdot d\vec{l} - \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \mathcal{E}_{AB} - IR_{AB}$$

Razlika potencijala je nula jer je $\vec{E}_s = 0$, tj. nema elektrostatičkog polja koje jedino može dati razliku potencijala. S $\mathcal{E}_{AB}$ smo označili elektromotornu silu koja se inducira od A do B, a s R_{AB} otpor tog dijela vodiča.

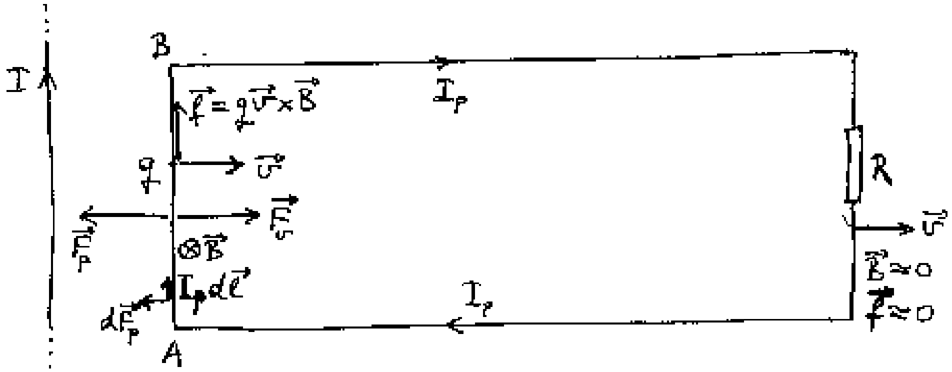
$$0 = \mathcal{E}_{AB} - IR_{AB}$$

U ovom primjeru elektromagnetska indukcija nastaje jednako u svakom djeliću petlje, no istodobno se električna energija i troši pretvaranjem u toplinu u tom istom djeliću petlje. Cijela petlja je izvor elektromotorne sile, no ujedno i potrošač.

Potencijal je konstantan duž cijele petlje!

4. Trošenje snage

Ako kod elektromagnetske indukcije nastane struja I_p u petlji u kojoj je ukupni otpor R, onda se troši električna snaga $P=I_p^2R$ koja se pretvara u toplinu. Ova snaga mora doći iz nekog vanjskog izvora, tj. mora djelovati vanjska sila i vršiti rad. Razmotrimo ovo pitanje na jednostavnom primjeru.



Elektromotorna sila nastaje samo na dijelu AB

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q}\int_A^B \vec f\cdot d\vec l = \frac{1}{q} f\int_A^B dl = vBL$$

Ovdje smo uvrstili $f=qvB$ za iznos sile $\vec f$, a duljina vodiča od A do B je L.

Prema drugom Kirchoffovom pravilu imamo

$$\mathcal{E} - I_pR = 0 \quad\Longrightarrow\quad I_p = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Ako se strujni element $I_p d\vec l$ nalazi u magnetskom polju $\vec B$, na njega djeluje sila $d\vec F_p = I_p d\vec l\times\vec B$.

Ukupna sila na vodič AB iznosi

$$F_p = \int_A^B dF_p = I_pB\int_A^B dl = I_pBL$$

Ovaj rezultat možemo također izraziti riječima da struja I privlači struju I_p silom F_p. (Paralelne struje se privlače!)

Da bi se vodič AB gibao konstantnom brzinom $\vec v$, mora zbroj svih sila koje na njega djeluju biti jednak nuli (I. Newtonov zakon). Stoga mora neki vanjski izvor djelovati silom $\vec F_v$ tako da bude

$$\vec F_p + \vec F_v = 0 \quad\Longrightarrow\quad \vec F_v = -\vec F_p$$

Kada se u intervalu vremena dt vodič AB pomakne za $d\vec s=\vec v\,dt$, vanjska sila izvrši rad

$$dW = \vec F_v\cdot d\vec s = \vec F_v\cdot\vec v\,dt = F_v v\,dt$$

Sila $\vec F_v$ je u istome smjeru kao i brzina $\vec v$, pa je $\vec F_v\cdot\vec v = F_v v$. Po iznosu su sile $\vec F_v$ i $\vec F_p$ jednake, tj. $F_v=F_p=I_pBL$. Stoga je snaga koju daje vanjski izvor

$$P = \frac{dW}{dt} = F_v v = I_p\underbrace{BLv}_{\mathcal{E}} = I_p\mathcal{E} = I_p^2R$$

Snaga koju daje vanjski izvor upravo je jednaka onoj koja se troši na toplinu u potrošaču.

5. Samoinduktivnost

Razmotrimo zavojnicu koja nije smještena u neko vanjsko magnetsko polje ali je uključena u neki strujni krug, tj. puštamo kroz nju struju I iz nekog izvora. Time nastaje vlastiti magnetski tok kroz zavojnicu

$$\Phi = L\,I$$

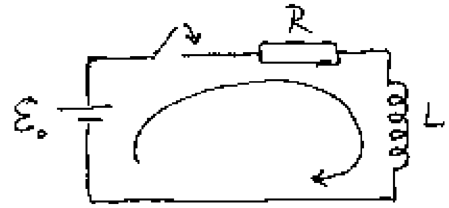
Koeficijent proporcionalnosti između toka i struje naziva se <u>induktivitet (L) zavojnice</u>. Induktivitet dane zavojnice ovisi o njenoj građi (radijus, duljina i broj zavoja). Jedinica za mjerenje je 1 henri (1H).

Ako je struja vremenski promjenljiva $I(t)$, onda je i tok promjenljiv $\Phi(t)$, pa se javlja inducirani napon između krajeva zavojnice koji se protivi toj promjeni (Lenzovo pravilo).

$$\boxed{\mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}}$$

To je pojava samoindukcije u zavojnici.

RL krug



Spojimo prekidač u $t=0$. Poteče struja I.

Primijenimo II. Kirchoffovo pravilo

$$\mathcal{E}_0 - RI + \mathcal{E}_L = 0$$

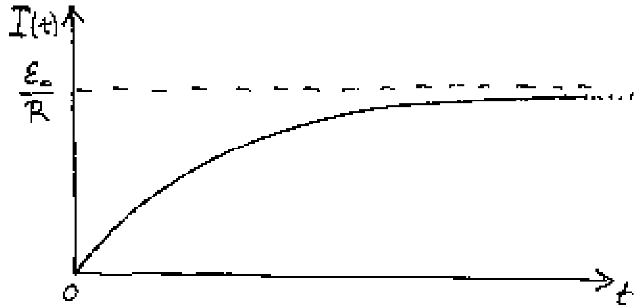
Uvrstimo $\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt}$ i sredimo jednadžbu

$$L\frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0$$

Rješenje ove diferencijalne jednadžbe glasi

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$$

gdje je $\tau_L = \frac{L}{R}$ induktivna vremenska konstanta. (Provjerite ispravnost rješenja uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu.)



Ako želimo otvoriti prekidač javlja se problem. Struja bi morala trenutno biti prekinuta, tj. pasti od vrijednosti $\frac{\mathcal{E}_0}{R}$ na nulu. No skokovita promjena struje znači matematički $\frac{dI}{dt} \to \infty$ pa bi se pojavio inducirani napon $\mathcal{E}_L \to \infty$ na krajevima zavojnice.

U realnosti se dogodi da se na krajevima prekidača pojavi toliko velik napon da može skočiti iskra u zraku. Ta iskra je zapravo prijenos naboja između krajeva prekidača, odnosno nastavak struje u strujnom krugu.

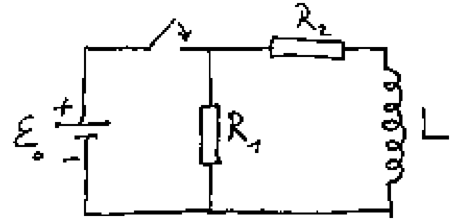
Drugim riječima, samoinduktivnost zavojnice ne dopušta trenutni pad struje pa protjera nešto struje makar i u obliku iskre.

Pokus:

iskapčanje zavojnice uz iskru

OPREZ: Iskapčanje struje u krugu u kojemu se nalazi zavojnica velikog induktiviteta L može biti jako opasno!!

Ako želimo izbjeći iskru, možemo ostvariti sljedeći strujni krug.



Nakon spajanja prekidača, raste struja kroz zavojnicu preko otpornika R_2. Nakon iskapčanja struja nastavi kroz R_1 i R_2 kao serijski spojenim otporima i pada na nulu po konstanti $\tau_{12} = \frac{L}{R_1+R_2}$.

Učinak feromagnetske jezgre

Ako zavojnicu stavimo oko neke jezgre od feromagnetskog materijala, poveća se magnetsko polje za faktor μ_r, a time i tok magnetskog polja

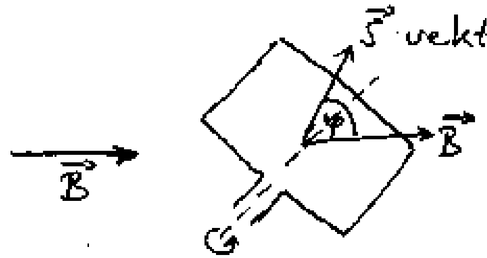
$$B = \mu_r B_0 \implies \Phi = BS = \mu_r B_0 S = \mu_r \Phi_0$$

Ako smo kod zavojnice bez jezgre imali za danu struju I tok $\Phi_0 = L_0 I$, sa feromagnetskom jezgrom dobivamo $\Phi = \mu_r \Phi_0 = \mu_r L_0 I$. Induktivitet zavojnice postaje

$$L = \mu_r L_0$$

6. Generator izmjeničnog napona

Razmotrimo rotaciju strujne petlje u homogenom magnetskom polju.



Kutna brzina rotacije je definirana kao kod rotacije tijela u mehanici

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Kod stalne kutne brzine imamo $\varphi = \omega t$, tj. kut φ jednoliko raste.

Magnetski tok kroz petlju se mijenja u vremenu zbog rotacije

$$\Phi_B(t) = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS\cos\varphi = BS\cos\omega t$$

U trenutku kada je $\vec{S}$ paralelno $\vec{B}$, tok je maksimalan i pozitivan ($\Phi_B = BS$).
Za $\vec{S}$ okomito na $\vec{B}$ tok je nula ($\Phi_B = 0$) a u trenutku antiparalelne orijentacije tok je maksimalno negativan ($\Phi_B = -BS$).

Promjenljivi magnetski tok kroz petlju inducira u njoj elektromotornu silu

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \omega BS\sin\omega t = \mathcal{E}_0\sin\omega t$$

To je princip rada svih generatora izmjeničnog napona (npr. u elektranama).

Ako je na strujnu petlju priključen neki potrošač otpora R, kroz petlju teče izmjenična struja

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\sin\omega t = I_0\sin\omega t$$

Postoji li sila zaustavljanja rotacije petlje?

Ako kroz petlju teče struja I, onda ona predstavlja magnetski dipolni moment

$$\vec{m} = I\vec{S}$$

Budući da se petlja nalazi u magnetskom polju $\vec{B}$, na nju djeluje moment sile

$$\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B}$$

Ovaj moment sile nastoji zaustaviti rotaciju petlje. Da bi se rotacija održala konstantnom kutnom brzinom potrebno je vanjskim (mehaničkim) momentom sile svladavati gornji moment sile koji nastaje zbog inducirane struje.

Vanjski (mehanički) moment sile vrši rad kod zakretanja petlje za kut $d\varphi$

$$dW = M d\varphi$$

Snaga koju troši mehanički izvor za rotaciju petlje iznosi

$$P = \frac{dW}{dt} = M\frac{d\varphi}{dt} = M\omega$$

Za iznos momenta sile imamo

$$M = mB\sin\varphi = ISB\sin\omega t$$

Uzimajući u obzir prethodno izvedeni izraz za elektromotornu silu $\mathcal{E} = \omega BS\sin\omega t$, dobivamo

$$P = I\mathcal{E}$$

Ovaj rezultat kaže da je snaga P koju troši mehanički izvor za rotaciju petlje upravo jednaka električnoj snazi $I\mathcal{E}$ u strujnom krugu.

Ako je u strujnom krugu potrošač otpora R, onda je $\mathcal{E} = IR$ pa se snaga $I\mathcal{E} = I^2R$ pretvara u toplinu.

Kada bi strujni krug bio prekinut $(R=\infty)$ ne bi bilo struje $(I=0)$, pa ne bi bilo ni dipolnog momenta $\vec{m}$ niti momenta sile $\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B}$ koje zaustavlja rotaciju petlje. Petlja bi se mogla slobodno rotirati (zanemarujemo trenje).

Vodena energija u hidroelektranama koristi se tek neznatnim dijelom za svladavanje trenja u osovini kod rotacije petlje u generatoru. Glavnina energije je potrebna za prisilnu rotaciju petlje kada se u električnoj mreži uključe potrošači pa teče struja u krugu.

Potrošači se uključuju u paralelu pa time ukupni otpor pada a struja raste. Time se povećava moment sile $\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B}$ koji zaustavlja rotaciju petlje. Zato je potrebno pustiti veću količinu vode na turbine u hidroelektrani da bi se stvorio veći mehanički moment sile koji može održati konstantnu rotaciju petlje u generatoru.

Povećana potrošnja električne energije $I\mathcal{E}$ u električnoj mreži moguća je na temelju povećane potrošnje mehaničke energije u elektrani.

Frekvencija izmjeničnog napona

Period jednog okretaja petlje T dan je izrazom

$$\omega T = 2\pi \quad\Rightarrow\quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

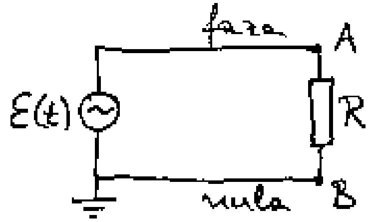
Frekvencija se definira izrazom

$$f = \frac{1}{T} \qquad (\text{jedinica } 1\,\mathrm{Hz} = 1\,\mathrm{s}^{-1})$$

U Europi elektrane daju struju sa $f = 50\,\mathrm{Hz}$ a u Americi je $f = 60\,\mathrm{Hz}$.

Uzemljenje

U gradskoj mreži upotrebljava se uzemljenje jedne od priključnica na izvor elektromotorne sile.



Potencijal u točki A se mijenja u vremenu dok je potencijal točke B trajno nula.

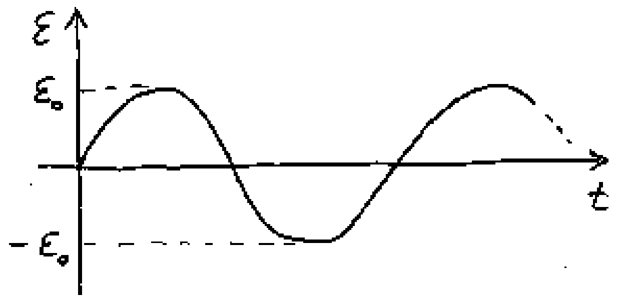
$$U_A = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$$

$$U_B = 0$$

Uobičajeni su nazivi "faza" i "nula".

Vršna i efektivna vrijednost napona

Napon izvora mijenja se sinusoidalno od $+\mathcal{E}_0$ do $-\mathcal{E}_0$. Iznos maksimalnog napona $\mathcal{E}_0$ naziva se vršna vrijednost.



Isto tako možemo analizirati struju

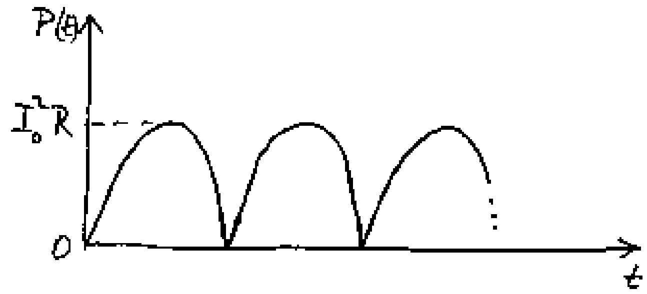
$$I(t) = I_0 \sin \omega t$$

Maksimalna vrijednost struje u nekom trenutku je I_0 i naziva se vršna vrijednost struje.

Pogledajmo sada snagu koja se troši na potrošaču.

$$P(t) = \mathcal{E}(t) I(t) = I^2(t) R = I_0^2 R \sin^2 \omega t$$

Snaga se također mijenja u vremenu ali uvijek ima pozitivnu vrijednost.



Ako gledamo učinak snage kroz vremenski interval koji je mnogo duži od perioda jednog titraja, onda nam je važna srednja vrijednost

$$\overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{P} = \frac{1}{2} I_0^2 R = I_{ef}^2 R \quad \text{srednja vrijednost snage}$$

Ovdje smo uveli pojam <u>efektivne vrijednosti</u> struje

$$I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, I_0$$

Možemo reći da izmjenična struja kojoj je vršna vrijednost I_0 proizvodi u potrošaču isti toplinski učinak kao da njime teče stalna (istosmjerna) struja vrijednosti I_{ef}.

Snagu možemo ekvivalentno izraziti i putem napona

$$P(t) = \mathcal{E}(t)\, I(t) = \frac{\mathcal{E}^2(t)}{R} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\sin^2\omega t$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{E}_0^2}{R} = \frac{\mathcal{E}_{ef}^2}{R}$$

Ovdje smo uveli pojam efektivne vrijednosti izmjeničnog napona

$$\mathcal{E}_{ef} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, \mathcal{E}_0$$

U Europi se za široku potrošnju električne energije u gradskoj mreži postavlja efektivni napon

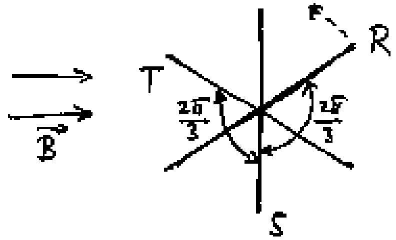
$$\mathcal{E}_{ef} = 220\,V$$

To znači da je vršna vrijednost tog napona $\mathcal{E}_0 = \sqrt{2}\,\mathcal{E}_{ef} = 310\,V$.

U Americi se upotrebljava $\mathcal{E}_{ef} = 110\,V$.

Trofazne struje

Generatori u elektranama imaju tri zavojnice pod kutom od $\frac{2\pi}{3}$ radijana (120°).



tri ravne crte predstavljaju projekcije zavojnica

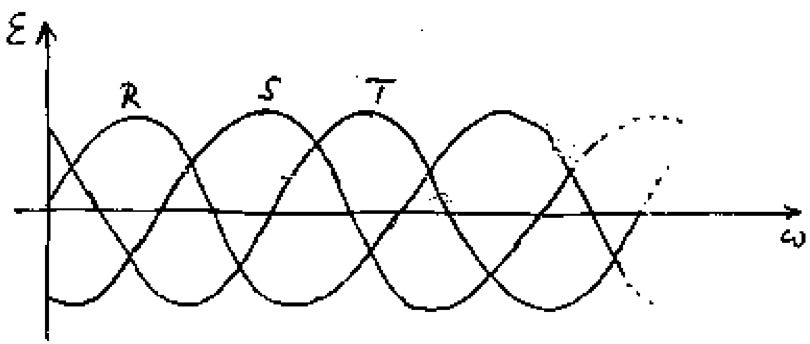
Ravnine zavojnica su okomite na ravninu crteža. Crtkana strelica prikazuje smjer vrtnje svih zavojnica.

Inducirani naponi imaju jednake vršne vrijednosti $\mathcal{E}_0$ ali kasne u vremenu jedan za drugim. Obično se nazivaju R, S i T faze.

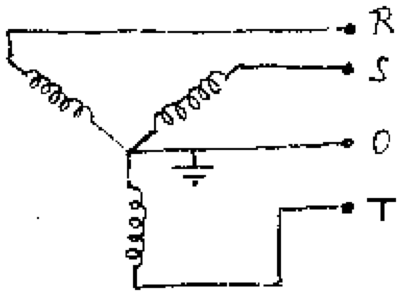
$$\mathcal{E}_R = \mathcal{E}_0 \sin\omega t$$

$$\mathcal{E}_S = \mathcal{E}_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\mathcal{E}_T = \mathcal{E}_0 \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$



Po jedna priključnica iz svake zavojnice spoji se na žarulju a ostale daju potencijale pojedinih faza.



shematski prikaz

Efektivni napon svake faze u gradskoj mreži prema nuli iznosi 220V, a između dvije faza 380V.

Elektromotori

Elektromotor je građen u principu isto kao i generator no funkcija mu je obrnuta.

U elektromotor puštamo iz vanjskog izvora struju kroz zavojnicu i time nastaje magnetski moment petlje $\vec{m} = I\vec{S}$. U magnetskom polju dolazi do momenta sile $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$ koji zakreće okvir sa strujnom petljom. Njegova rotacija se putem osovine može prenijeti na okolinu kao pogon za koristan mehanički rad.

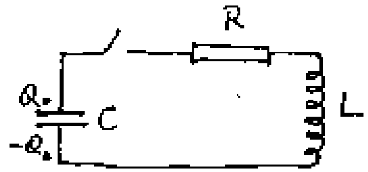
U analogiji s generatorima, elektromotori također mogu biti građeni kao jednofazni ili kao trofazni.

10. KRUGOVI IZMJENIČNE STRUJE

10.1. Slobodno titranje u RLC krugu

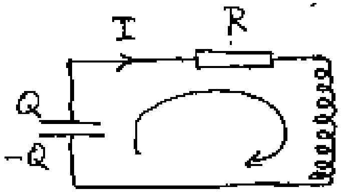
Neka je u $t=0$ kondenzator nabijen nabojem Q_0.

$\underline{\underline{t=0}}$



Ako u $t=0$ zatvorimo prekidač, poteče struja I na račun smanjenja naboja Q na kondenzatoru. U nekom trenutku imamo

$\underline{\underline{t>0}}$



$$I=-\frac{dQ}{dt}$$

II. Kirchoffov zakon daje

$$\frac{Q}{C}-IR-L\frac{dI}{dt}=0$$

Nakon uvrštavanja izraza za struju i sređivanja jednadžbe nalazimo

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{LC}Q=0$$

Rješenje ove diferencijalne jednadžbe ima oblik

$$Q(t)=Ae^{\alpha t}$$

gdje su A i α neke konstante. Provjerimo rješenje tako da ga uvrstimo u dif. jedn.

$$\alpha^2Ae^{\alpha t}+\frac{R}{L}\alpha Ae^{\alpha t}+\frac{1}{LC}Ae^{\alpha t}=0$$

Ova je jednadžba zadovoljena u svakom (bilo kojem) trenutku t ako konstanta α zadovoljava uvjet

$$\alpha^2+\frac{R}{L}\alpha+\frac{1}{LC}=0$$

Iz ovog uvjeta slijede dva rješenja za α

$$\alpha_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

Slijedom ovog nalaza, moramo dopustiti da je opće rješenje za naboj na kondenzatoru

$$Q(t)=A_1e^{\alpha_1 t}+A_2e^{\alpha_2 t}$$

Ograničimo se na slučaj slabog gušenja

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$$

$$\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \sqrt{-\left[\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2\right]} = i\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = i\omega_g$$

$\sqrt{-1} = i$ imaginarna jedinica

$\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \omega_g$ frekvencija gušenog titranja

$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ frekvencija titranja bez gušenja (idealizirano za $R=0$)

$$Q(t) = A_1 e^{-\frac{R}{2L}t + i\omega_g t} + A_2 e^{-\frac{R}{2L}t - i\omega_g t}$$
$$= e^{-\frac{R}{2L}t}\left(A_1 e^{i\omega_g t} + A_2 e^{-i\omega_g t}\right)$$
$$= e^{-\frac{R}{2L}t}\left[(A_1 + A_2)\cos\omega_g t + i(A_1 - A_2)\sin\omega_g t\right]$$

Naboj mora biti realna veličina, što znači da imaginarni član mora iščezavati, a to se postiže za $A_1 = A_2$. Kao rješenje dobivamo

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\cos\omega_g t$$

Naboj na kondenzatoru titra frekvencijom ω_g, a amplituda se smanjuje tijekom vremena.

Ako pratimo napon na kondenzatoru, možemo pisati

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} = V_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\cos\omega_g t$$

$V_0 = \frac{Q_0}{C}$ početni napon na kondenzatoru

Za struju u krugu dobivamo

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{R}{2L}Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\cos\omega_g t + \omega_g Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\omega_g t$$

U idealiziranom slučaju bez gušenja (tj. za $R=0$) struja bi kasnila točno za četvrtinu titraja za naponom na kondenzatoru. Za neko slabo gušenje taj je odnos približno zadovoljen.

Ako pratimo energiju, možemo reći da se električna energija u kondenzatoru $\frac{Q^2}{2C}$ naizmjenično pretvara u magnetsku energiju u zavojnici $\frac{1}{2}LI^2$ i obrnuto.

Ako je u početnom trenutku energija u sustavu bila $E_0 = \frac{Q_0^2}{2C}$, onda se nakon svakog titraja ona smanjuje kao

$$E(t) = E_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

U otporniku se troši snaga

$$P(t) = \frac{dE(t)}{dt} = -\frac{R}{L} E_0 e^{-\frac{R}{L}t} = -\frac{R}{L} E(t)$$

Negativan predznak označava gubitak snage.

Za titrajni krug se obično uvodi veličina <u>faktor dobrote</u> Q (ova Q <u>nije</u> naboj)

$$Q = \omega_0 \frac{\text{energija u krugu}}{|\text{snaga koja se gubi}|} = \omega_0 \frac{E(t)}{|P(t)|}$$

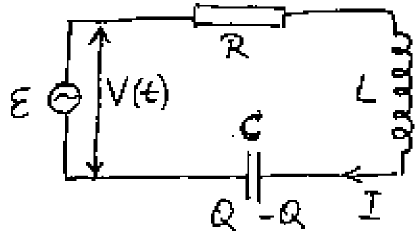
$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

Za maleni otpor ($R \ll \omega_0 L$) imamo titrajni krug s velikim Q-faktorom (quality factor).

10.2. Prisilne oscilacije

Neka je u RLC krugu uključen izvor izmjenične elektromotorne sile tako da se na njegovim stezaljkama javlja napon

$$V(t) = V_0 \cos\omega t$$



$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

Frekvencija ω je određena izvorom napona. Ona ne mora biti jednaka frekvenciji $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ koja je zadana elementima ugrađenim u krug (vlastita frekvencija).

II. Kirchoffov zakon za petlju daje

$$V(t) - IR - L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

Smjer struje (trenutni) na shemi je odabran tako da smanjuje naboj na kondenzatoru, tako da je $I = -\frac{dQ}{dt}$. Deriviranjem diferencijalne jednadžbe dobivamo

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = -\frac{\omega}{L} V_0 \sin\omega t$$

Struja će titrati prema nametnutoj frekvenciji ω, ali općenito može imati neki fazni pomak φ u odnosu prema naponu

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Konstante I_0 i φ u ovome pretpostavljenom rješenju možemo odrediti uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu

$$-\omega^2 I_0 \cos(\omega t+\varphi) - \frac{R}{L}\omega I_0 \sin(\omega t+\varphi) + \frac{1}{LC} I_0 \cos(\omega t+\varphi) = -\frac{\omega}{L} V_0 \sin\omega t$$

Možemo sada primijeniti trigonometrijske izraze za sinus i kosinus zbroja dvaju kutova, te grupirati članove uz $\sin\omega t$ i $\cos\omega t$, tako da dobivamo

$$\left[-\omega^2\cos\varphi - \frac{R}{L}\omega\sin\varphi + \frac{1}{LC}\cos\varphi\right] I_0 \cos\omega t +$$

$$+\left[\omega^2\sin\varphi - \frac{R}{L}\omega\cos\varphi - \frac{1}{LC}\sin\varphi\right] I_0 \sin\omega t = -\frac{\omega}{L} V_0 \sin\omega t$$

Da bi lijeva strana jednadžbe bila uvijek jednaka desnoj, mora iščezavati zagrada u prvome članu, budući da na desnoj strani nema člana s $\cos\omega t$.

Imamo, dakle, uvjet

$$-\omega^2\cos\varphi - \frac{R}{L}\omega\sin\varphi + \frac{1}{LC}\cos\varphi = 0$$

Iz ovog izraza dobivamo

$$R\sin\varphi = \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)\cos\varphi$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}$$

Dakle, fazni pomak φ struje prema naponu ovisi o frekvenciji ω na kojoj radi izvor elektromotorne sile (napona) u RLC krugu. Uočimo odmah da je za $\frac{1}{\omega C} = \omega L$ struja u fazi s naponom jer je $\varphi = 0$.

Izjednačavajući koeficijente uz $\sin\omega t$ s obje strane prethodne jednadžbe, nalazimo drugi uvjet

$$\left[\omega^2\sin\varphi - \frac{R}{L}\omega\cos\varphi - \frac{1}{LC}\sin\varphi\right]I_0 = -\frac{\omega}{L}V_0$$

$$\left[\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)\sin\varphi + R\cos\varphi\right]I_0 = V_0$$

Primjenjujući poznate trigonometrijske formule $\sin\varphi = \frac{tg\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}$

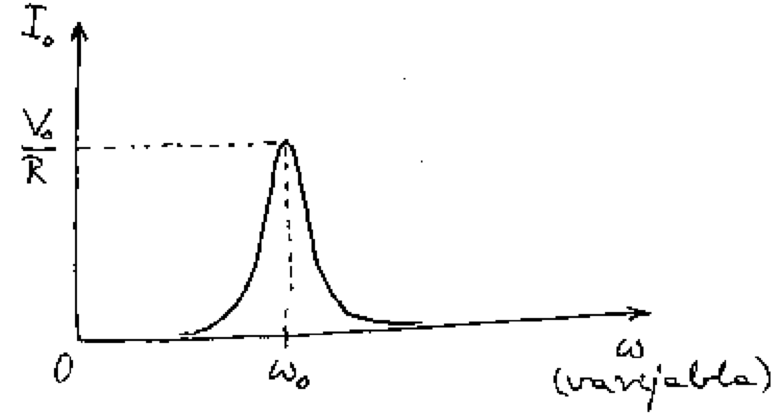
dobivamo nakon sređivanja

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2}}$$

Za danu vršnu vrijednost napona V_0, vršna vrijednost struje I_0 je maksimalna ako je frekvencija ω izvora napona takva da je ispunjen uvjet

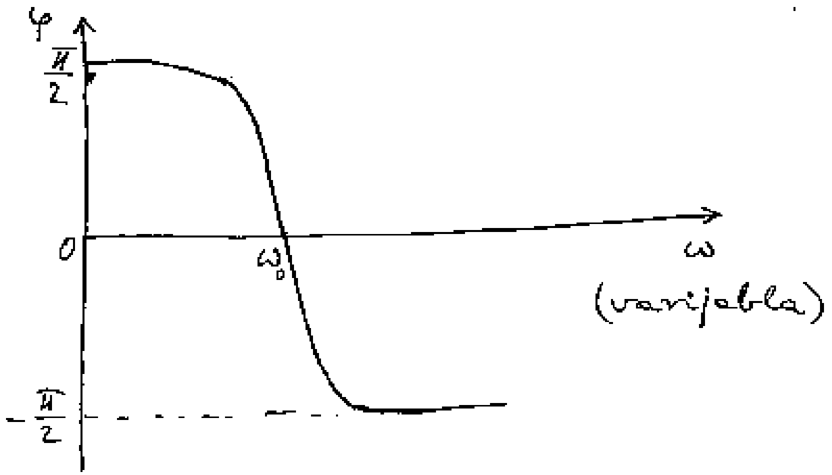
$$\frac{1}{\omega C}-\omega L = 0 \implies \omega^2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

ω_0 rezonantna frekvencija



Ako eksperimentalno mijenjamo frekvenciju izvora napona, uočit ćemo da se mijenja struja I_0, te da struja postiže maksimum kada je $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Analizirajući pritom fazni pomak struje prema naponu, dobivamo ovisnost



za $\omega \to 0 \Rightarrow tg\varphi \approx \frac{\frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{1}{\omega RC} \to \infty$, $\varphi \to \frac{\pi}{2}$

za $\omega = \omega_0 \Rightarrow tg\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

za $\omega \to \infty \Rightarrow tg\varphi \approx \frac{-\omega L}{R} \to -\infty$, $\varphi \to -\frac{\pi}{2}$

Veličine R, $\frac{1}{\omega C}$ i ωL imaju istu dimenziju (mjere se u omima).

Veličina $Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}$ naziva se <u>impedancija</u> RLC kruga.

Za $\omega \ll \omega_0$ imamo $Z \approx \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \approx \frac{1}{\omega C}$ impedancija ima dominantno kapacitivan doprinos, a struja vodi ispred napona za $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$.

U rezonanciji $\omega = \omega_0$ imamo $Z = R$, a struja je u fazi s naponom ($\varphi = 0$).

Za $\omega \gg \omega_0$ impedancija ima dominantno induktivan doprinos $Z \approx \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \approx \omega L$, a struja kasni za naponom za $\varphi \approx -\frac{\pi}{2}$.

<u>Širina rezonancije</u>

Vidjeli smo da je struja maksimalna kada se postigne rezonancija, tj. za $\omega = \omega_0 \Rightarrow I_{om} = \frac{V_0}{R}$

Snaga koja se troši u RLC krugu iznosi u rezonanciji $P_{om} = I_{om}^2 R$.

Pitamo se na kojoj će frekvenciji $\omega > \omega_0$ snaga pasti na polovicu svoje maksimalne vrijednosti, tj. $P_0 = \frac{1}{2} P_{om}$

Očito je da tada struja padne na iznos $I_0 = \frac{I_{om}}{\sqrt{2}}$, a to se postiže za

$$\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 = R^2 \implies \frac{1}{LC} - \omega^2 = \frac{R}{L}\omega$$

Zgodno nam je ovdje iskoristiti oznaku $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, pa dobivamo za razliku kvadrata

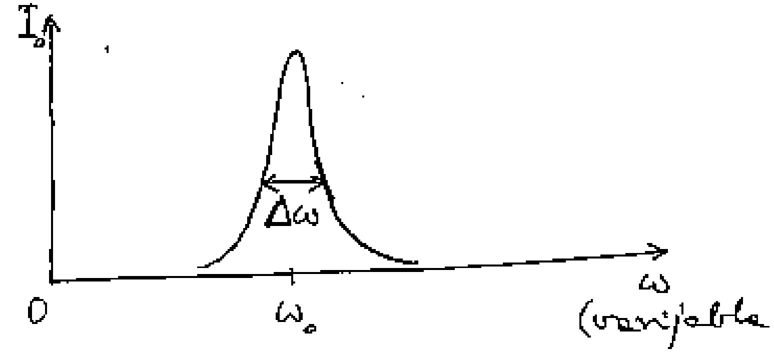
$$(\omega_0 - \omega)\underbrace{(\omega_0 + \omega)}_{\approx 2\omega_0} = \frac{R}{L}\omega$$

$\omega \approx \omega_0$ u blizini rezonancije

$$\omega_0 - \omega \approx \frac{R}{2L}$$

Opadanje amplitude se zbiva s obje strane rezonantne frekvencije, pa je širina rezonancije (na pola maksimalne snage)

$$\Delta\omega = \frac{R}{L}$$

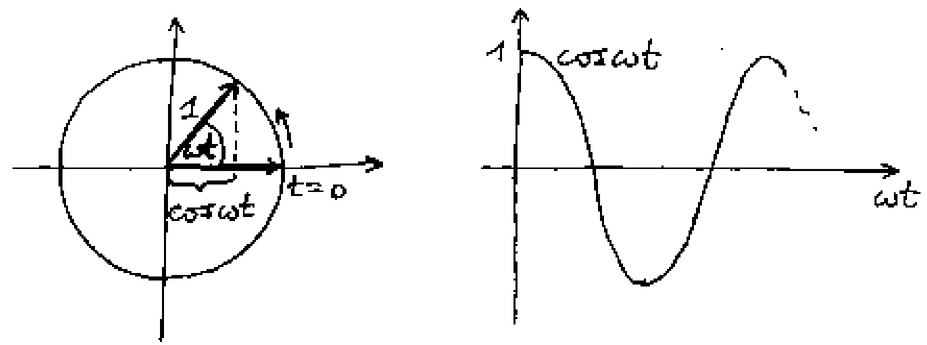


Širinu rezonancije možemo zgodno povezati s Q-faktorom RLC kruga

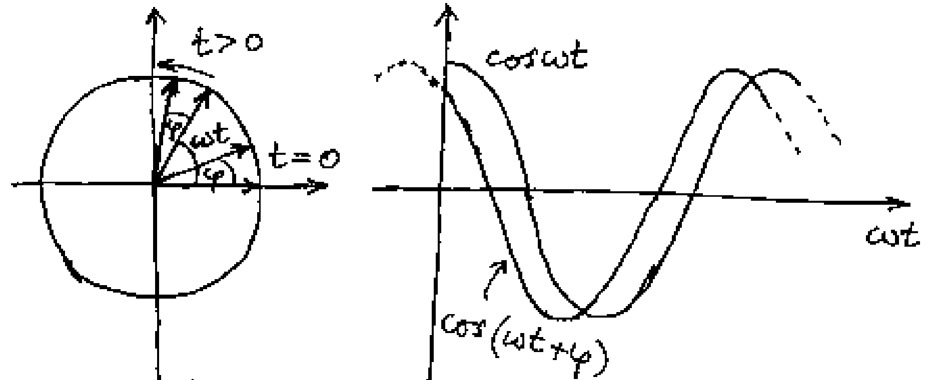
$$\left.\begin{aligned} Q &= \frac{\omega_0 L}{R} \\ \Delta\omega &= \frac{R}{L} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \gg 1$$

10.3. Metoda rotirajućih vektora

Vremenski promjenljivu funkciju $\cos\omega t$ možemo dobiti kao projekciju jediničnog vektora koji rotira kutnom brzinom ω



Ako pored funkcije $\cos\omega t$ želimo prikazati još funkciju $\cos(\omega t+\varphi)$, onda uvodimo dva rotirajuća vektora



φ ostaje konstantan tijekom rotacije

$\varphi>0$ rani pred funkcijom $\cos\omega t$

Zamislimo sada napon i struju

$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

kao da su to projekcije nekakvih rotirajućih vektora.

Prepišimo jednadžbu koju smo bili dobili nakon uvrštavanja $I(t)$ u temeljnu diferencijalnu jednadžbu za RLC krug u kojem je izvor izmjeničnog napona

$$-\omega^2 I_0 \cos(\omega t+\varphi) - \frac{R}{L}\omega I_0 \sin(\omega t+\varphi) + \frac{1}{LC} I_0 \cos(\omega t+\varphi) = -\frac{\omega}{L} V_0 \sin \omega t$$

U jednadžbi imamo sinusne funkcije koje možemo pretvoriti u kosinuse putem poznatih trigonometrijskih pravila

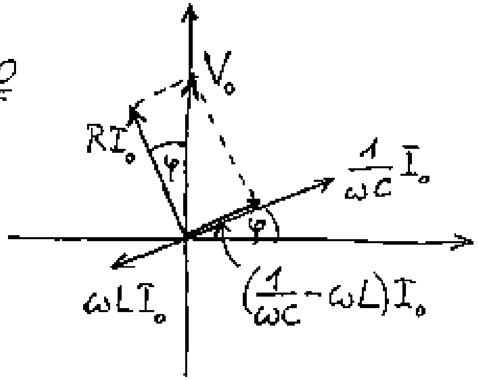
$$\sin \omega t = -\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(\omega t+\varphi) = -\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

Sada možemo sve članove u gornjoj jednadžbi smatrati projekcijama nekih rotirajućih vektora.

$$-\omega L I_0 \cos(\omega t+\varphi) + R I_0 \cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\omega C} I_0 \cos(\omega t+\varphi) = V_0 \cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

Stanje vektora u trenutku $t=0$



Za $t>0$ svi vektori rotiraju kutnom brzinom ω. Relativan odnos između vektora ostaje neizmijenjen.

Možemo reći da svaki vektor u ovome dijagramu predstavlja neki napon:

$V_R = R I_0$ vršna vrijednost napona na otporniku R

$V_L = \omega L I_0$ vršna vrijednost napona na zavojnici induktiviteta L

$V_C = \frac{1}{\omega C} I_0$ vršna vrijednost napona na kondenzatoru kapaciteta C

V_0 napon na izvoru (ukupni napon)

Naponi na pojedinim elementima u krugu zbrajaju se uz uvažavanje relativnih faza, te se dobija ukupni napon na RLC sklopu.

U rezonanciji je $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ $(\omega = \omega_0)$, pa su naponi na zavojnici i kondenzatoru jednaki po iznosu, ali u protufazi. Tada je $V_0 = R I_0 = V_R$, $\varphi = 0$.

Za $\omega \ll \omega_0$, napon na zavojnici V_L postaje zanemariv, a dominira napon na kondenzatoru $V_C \approx V_0$, $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$.

S druge strane, za $\omega \gg \omega_0$ dominira $V_L \approx V_0$, dok je V_C zanemariv. Tada je $\varphi \approx -\frac{\pi}{2}$.

U oba slučaja daleko od rezonancije, struja I_0 se jako smanji, tako da je i $V_R = R I_0$ zanemariv.

Napomenimo da je V_0 zadan izvorom napona, te je stoga nepromjenljiv.

U općenitom slučaju kakav je prikazan na dijagramu vektora, možemo lako uočiti pravokutni trokut iz kojega slijede izravno

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}$$

Dakle, prikaz napona pomoću vektorskog dijagrama omogućuje jednostavnije određivanje faznog pomaka φ.

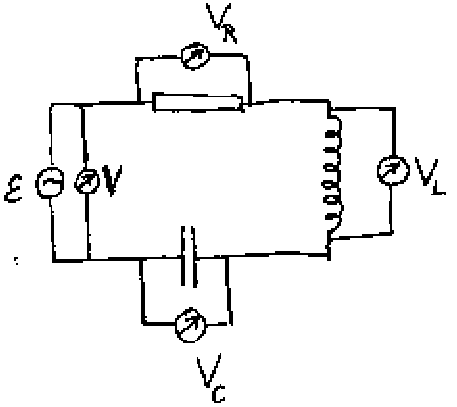
Također iz pravokutnog trokuta slijedi prema Pitagorinom poučku

$$V_0^2 = R^2 I_0^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 I_0^2$$

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}}$$

Dobili smo isti izraz kao i ranije, ali na mnogo jednostavniji način.

Može se zamisliti eksperimentalno mjerenje pojedinih napona u RLC krugu.



Ako se priključe obični voltmetri za izmjeničnu struju, oni će pokazivati efektivne vrijednosti pojedinih napona. Fazni odnosi napona ne mogu se vidjeti pomoću običnih voltmetara.

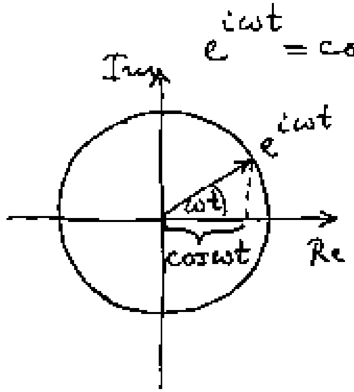
Za promatranje napona u vremenu služi osciloskop. Obično se mogu pratiti istodobno dva naponska signala (dva kanala na osciloskopu), te uočiti razliku faza među njima.

Napomena:
Treba paziti da zajednička točka bude uzemljena.

10.4. Metoda kompleksnih brojeva

Umjesto jediničnog vektora koji rotira u realnoj ravnini, možemo razmotriti kompleksan broj

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$$



$$\mathrm{Re}\left[e^{i\omega t}\right] = \cos\omega t$$

$$\left|e^{i\omega t}\right| = 1$$

modul kompleksnog broja

Kompleksan broj $e^{i\omega t}$ prikazan je jediničnim vektorom koji rotira brzinom ω u kompleksnoj ravnini.

Napomena:
Vektor u kompleksnoj ravnini nema smisao smjera u realnom prostoru. To je samo spojnica ishodišta s odgovarajućom točkom u kompleksnoj ravnini.

Možemo sada prikazati napone i struju u RLC krugu kao kompleksne brojeve (stavljamo oznaku ~ iznad simbola za danu veličinu)

$$\tilde{V}(t) = V_0 e^{i\omega t} \qquad V_0 \text{ realna veličina}$$

Pri tome smatramo da je fizikalna veličina samo realni dio kompleksne veličine, tj.

$$V(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{V}(t)\right] = V_0 \cos\omega t$$

Za struju uvodimo kompleksnu veličinu

$$\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0 e^{i\omega t} \qquad \tilde{I}_0 \text{ kompleksna amplituda}$$

Zadatak nam je odrediti $\tilde{I}_0$ ako je zadan napon V_0 izvora na koji je spojen RLC krug. U tu svrhu vratimo se na izvornu jednadžbu koju nam daje II. Kirchoffov zakon

$$V - IR - L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

Deriviranjem po vremenu i uvažavanjem odnosa $I = -\frac{dQ}{dt}$ dobivamo nakon sređivanja

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = \frac{1}{L}\frac{dV}{dt}$$

Ako u toj jednadžbi postavimo napon i struju kao kompleksne veličine $\tilde{V}(t)$ i $\tilde{I}(t)$, možemo izvesti naznačene derivacije

$$-\omega^2\tilde{I}_0 e^{i\omega t} + i\omega\frac{R}{L}\tilde{I}_0 e^{i\omega t} + \frac{1}{LC}\tilde{I}_0 e^{i\omega t} = \frac{i\omega}{L}V_0 e^{i\omega t}$$

$$\left(R + i\omega L - i\frac{1}{\omega C}\right)\tilde{I}_0 = V_0$$

$$\tilde{I}_0 = \frac{V_0}{R + i\omega L - i\frac{1}{\omega C}}$$

Dobili smo rješenje za $\tilde{I}_0$. Možemo sada uvesti <u>kompleksnu impedanciju</u> RLC kruga

$$\tilde{Z} = R + i\omega L - i\frac{1}{\omega C} = R - i\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)$$

Ovaj kompleksni broj možemo napisati u obliku

$$\tilde{Z} = |\tilde{Z}|e^{-i\varphi} \qquad |\tilde{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}$$

Vidimo da je modul $|\tilde{Z}|$ jednak prethodno dobivenom izrazu za realnu impedanciju Z.

Koristeći se ovim izrazima, nalazimo

$$\tilde{I}_0 = \frac{V_0}{|\tilde{Z}|e^{-i\varphi}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2}}\, e^{i\varphi} = I_0 e^{i\varphi}$$

gdje je I_0 vršna vrijednost struje koju smo ranije utvrdili u realnom prikazu. Uzimajući u obzir ovaj rezultat za kompleksnu amplitudu $\tilde{I}_0$, možemo pisati:

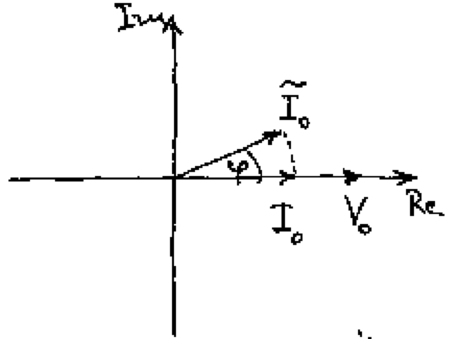
$$\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0 e^{i\omega t} = I_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} = I_0 e^{i(\omega t+\varphi)}$$

Razumije se, struja kao fizikalna veličina je realni dio kompleksne veličine

$$I(t) = Re\left[\tilde{I}(t)\right] = I_0 \cos(\omega t+\varphi)$$

To je upravo onaj izraz koji smo imali kod prvotnog razmatranja napona i struje kao realnih veličina.

<u>Grafički prikaz u kompleksnoj ravnini</u>



$$\underline{\tilde{I}_0 = I_0 e^{i\varphi}}$$

Množenje I_0 s $e^{i\varphi}$ svodi se na zakretanje vektora za kut φ.

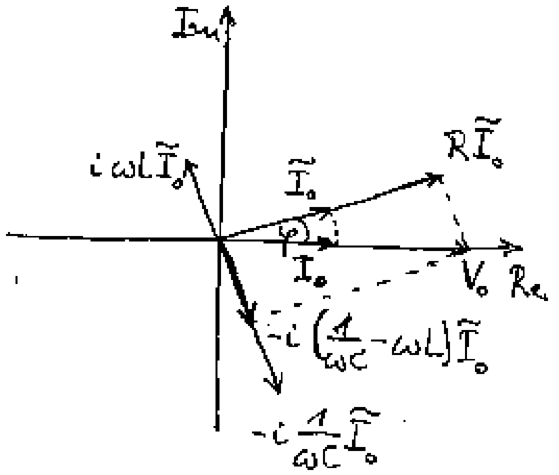
Uočimo da vrijedi <u>pravilo</u>:

Množenje nekog (kompleksnog) broja $\tilde{A}$ s imaginarnom jedinicom "i", svodi se na zakretanje vektora za kut $\frac{\pi}{2}$ jer vrijedi

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} = \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + i\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} = i \quad \Rightarrow \quad \underline{i\tilde{A} = \tilde{A}e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

Razumije se, množenje (kompleksnog) broja $\tilde{A}$ s "$-i$" predstavlja zakretanje vektora za kut $-\frac{\pi}{2}$ jer je $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Ovo pravilo možemo shvatiti kao formalnu zamjenu $i \to -i$ u svim članovima jednadžbe.

Možemo sada prikazati sve napone u kompleksnoj ravnini



Iz jednadžbe koju smo prethodno izveli

$$\left(R+i\omega L-i\frac{1}{\omega C}\right)\tilde{I}_0=V_0$$

možemo jasno razlučiti pojedine napone kao kompleksne brojeve, te njihov zbroj

$$R\tilde{I}_0+i\omega L\tilde{I}_0-i\frac{1}{\omega C}\tilde{I}_0=V_0$$

Na dijagramu uočavamo primjenu pravila množenja s "i", odnosno "-i".

11. MAXWELLOVE JEDNADŽBE

James Clark Maxwell je u drugoj polovici 19. st. prvi uspio matematički obraditi sva eksperimentalna opažanja iz elektriciteta i magnetizma i načiniti jedinstvenu teoriju elektromagnetizma koja počiva na četiri jednadžbe:

a) Gaussov zakon za električno polje

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

gdje Q predstavlja cjelokupni naboj koji se nalazi unutar zatvorene plohe S.

b) Gaussov zakon za magnetsko polje

$$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0}$$

Bit je ovog zakona da utvrdi kako magnetsko polje nema izvora i ponora, tako da su silnice uvijek neke zatvorene krivulje.

c) Faradayev zakon indukcije

$$\boxed{\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}}$$

Linijski integral po zatvorenoj krivulji C predstavlja induciranu elektromotornu silu. S desne strane računa se vremenska promjena magnetskog toka kroz površinu koja je omeđena zatvorenom krivuljom C.
Sve veličine se uzimaju u referentnom sustavu u kojemu krivulja C miruje.

d) Poopćeni Amperov zakon

Za magnetsko polje naboja u gibanju utvrdili smo da vrijedi

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Ovdje se uzima vremenska promjena električnog toka kroz površinu koja je omeđena zatvorenom krivuljom C.
Za magnetsko polje stalne struje smo utvrdili Amperov zakon

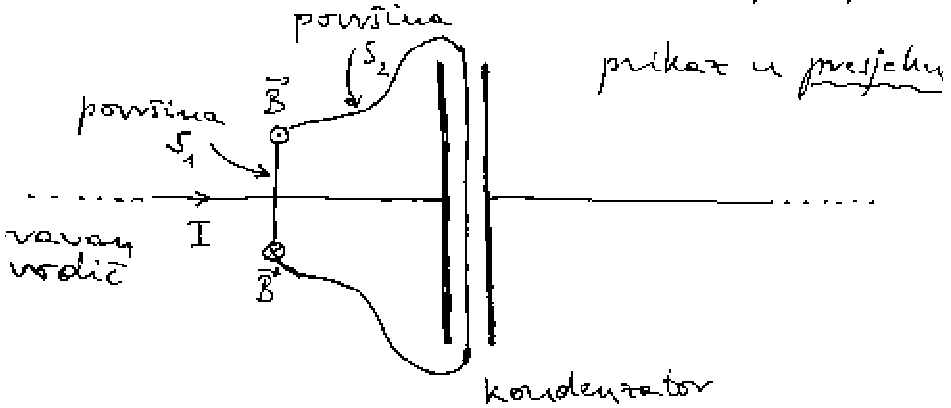
$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

gdje je I ukupna struja koja prolazi kroz površinu koja je omeđena zatvorenom krivuljom C.

Možemo pokazati da u svakom slučaju vrijedi poopćeni Amperov zakon

$$\boxed{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\left(I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}\right)}$$

Kroz odabranu površinu koja je omeđena zatvorenom krivuljom C može prolaziti neka struja I s time da nema promjene električnog toka, ili pak nema struje koja bi prolazila kroz odabranu površinu no postoji odgovarajuća promjena električnog toka kroz tu površinu. Možemo ovu tvrdnju ilustrirati na jednom zgodnom primjeru.



Linijski integral magnetskog polja računamo po kružnici koja obilazi ravan vodič daleko od ploča kondenzatora. Ta kružnica omeđuje površinu S_1 (krug) kroz koju prolazi struja I, ali tu nema promjene električnog toka. No, jednako je ispravno odabrati površinu S_2 jer je ona također omeđena istom kružnicom po kojoj računamo linijski integral magnetskog polja. Rezultat mora biti neizmijenjen. Kroz površinu S_2 očito ne prolazi nikakva struja, ali postoji vremenska promjena električnog toka jer se kondenzator nabija pa raste električno polje između ploča kondenzatora. Ovu pojavu možemo detaljnije razraditi. Neka je u nekom trenutku naboj na lijevoj ploči kondenzatora jednak Q. Uzmemo li zatvorenu plohu koja bi se sastojala od S_1 i S_2 zajedno, možemo primijeniti Gaussov zakon za električno polje

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Ako nema električnog polja u točkama na površini S_1, onda se Φ_E ostvaruje samo kroz površinu S_2, uglavnom na dijelu koji se nalazi između ploča kondenzatora.

Budući da vodičem teče struja I, ulazi dodatni naboj u volumen omeđen zatvorenom plohom (S_1 i S_2 zajedno). Vremenska promjena naboja je upravo $\frac{dQ}{dt} = I$. Stoga je lako izračunati član s vremenskom promjenom električnog toka

$$\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \cancel{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\cancel{\varepsilon_0}} \frac{dQ}{dt}\right) = I$$

Dakle, kroz površinu S_2 ne teče struja, ali izračun veličine $\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ kroz tu površinu daje upravo vrijednost I koju bismo dobili ako gledamo što prolazi kroz površinu S_1.

Napomena:

U prethodnom razmatranju smo radi jednostavnosti pretpostavili da je površina S_1 dovoljno daleko od kondenzatora, tako da na njoj nema električnog polja koje bi dolazilo od naboja na kondenzatoru. U općenitom slučaju, može proleziti neki električni tok i kroz površinu S_1. Gaussov zakon za zatvorenu površinu (S_1 i S_2 zajedno) vrijedi egzaktno

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{a} + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Ovdje se element površine $d\vec{a}$ uzima uvijek iz zatvorenog volumena prema van. No, za potrebe računanja toka u poopćenom Amperovu zakonu, valja uzeti $d\vec{a}$ u istome smjeru na obje površine. Ovdje se radi o promjeni smjera $d\vec{a}$ na površini S_1, pa gornja jednadžba glasi

$$-\Phi_{E(S_1)} + \Phi_{E(S_2)} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Deriviranjem po vremenu dobivamo

$$-\frac{d\Phi_{E(S_1)}}{dt} + \frac{d\Phi_{E(S_2)}}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{dQ}{dt}$$

Uvažavajući da je $I = \frac{dQ}{dt}$ struja koja prolazi kroz površinu S_1 (ali ne i kroz površinu S_2), možemo pisati

$$\varepsilon_0 \frac{d\Phi_{E(S_2)}}{dt} = I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_{E(S_1)}}{dt}$$

Kroz površinu S_1 prolazi neka struja i postoji neka vremenska promjena električnog toka. Uzevši ta dva člana zajedno, dobiva se točno ista vrijednost kao što je daje sama vremenska promjena električnog toka kroz površinu S_2 kroz koju ne teče struja. Dakle, poopćeni Amperov zakon vrijedi egzaktno, bez obzira na oblik površine koja se uzima za računanje. Važno je samo da je ta površina omeđena zatvorenom krivuljom C po kojoj se računa linijski integral magnetskog polja.

Do poopćenja Amperova zakona dodavanjem člana $\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ došao je J.C. Maxwell teorijskim razmatranjem tražeći konzistentnost cijele elektromagnetske teorije. Bilo je to veliko otkriće.

Četiri Maxwellove jednadžbe opisuju potpuno svojstva električnog i magnetskog polja.