Osnove diferencijalnog računa

September 15, 2008

1 Uvod

1.1 Problem brzine

- želimo izračunati brzinu tijela
- ako put koji je tijelo prešlo možemo izraziti kao funkciju vremena

$$s = s(t) \ , \tag{1}$$

  onda je prosječna brzina na intervalu $[t_0, t_1]$ kvocijent prijeđenog puta i duljine vremenskog intervala

$$\bar{v} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} \tag{2}$$

Primjer 1: vertikalni hitac

- tijelu ispaljenom vertikalno uvis mjerimo položaj u određenim vremenskim intervalima
- rezultati mjerenja navedeni su u tablici 1.1

t (s)	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.35	0.40	0.45
h (m)	0.238	0.451	0.640	0.804	0.943	1.059	1.149	1.215	1.257	1.273
t (s)	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
h (m)	1.274	1.266	1.234	1.178	1.097	0.991	0.861	0.706	0.527	0.323

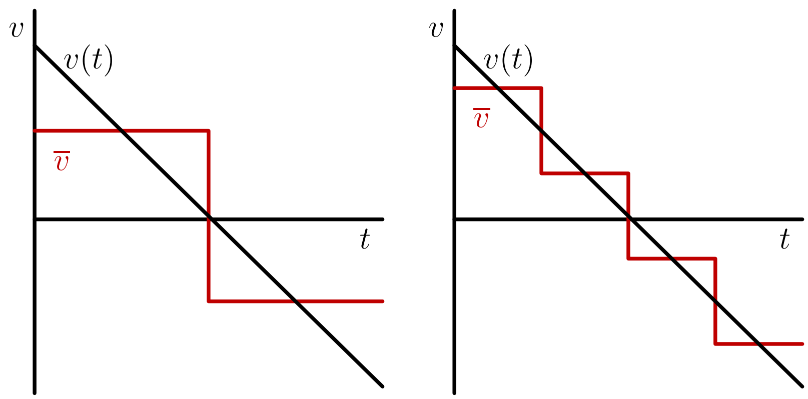
Tablica 1: Visina tijela u ovisnosti o vremenu.

- želimo izračunati prosječnu brzinu tijela na intervalu $[t_0, t_1]$

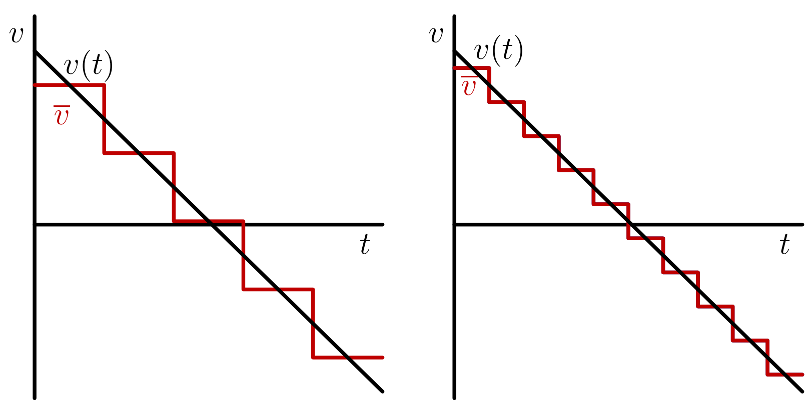
$$\overline{v}(t_0, t_1) = \frac{h_1 - h_0}{t_1 - t_0} \tag{3}$$

- na sljedeće četiri slike prikazane su srednje brzine za vrijednosti intervala $\Delta t = 0.5, 0.25, 0.20, 0.10\ s$
- srednju brzinu na slikama uspoređujemo s pravom brzinom
- tijelo se giba jednoliko ubrzano pa vrijedi

$$v(t) = v_0 - gt \tag{4}$$



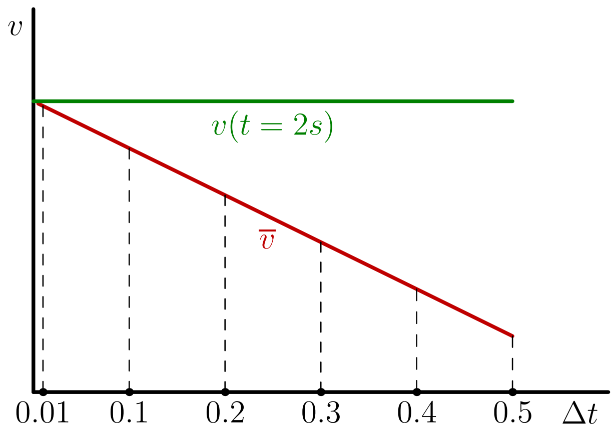
Slika 1: Prosječna brzina za intervale $\Delta t = 0.5s$ (lijevo) i $\Delta t = 0.25s$ (desno). Za usporedbu je nacrtana i prava brzina (crna linija).



Slika 2: Prosječna brzina za intervale $\Delta t = 0.2s$ (lijevo) i $\Delta t = 0.1s$ (desno). Za usporedbu je nacrtana i prava brzina (crna linija).

- sa slika je očito da se smanjivanjem intervala približavamo pravoj brzini
- na sljedećoj slici je prikazana prosječna brzina u trenutku $t_0 = 2s$ u ovisnosti o duljini intervala Δt

$$\overline{v} = \frac{s(t = 2s + \Delta t) - s(t = 2s)}{\Delta t} \tag{5}$$



Slika 3: Prosječna brzina u trenutku $t = 2s$ u ovisnosti o duljini intervala Δt. Za usporedbu je horizontalnom linijom označena i prava brzina u trenutku $t = 2s$.

- možemo zaključiti da je prava brzina granični slučaj prosječne brzine

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \tag{6}$$

- oznaka

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \tag{7}$$

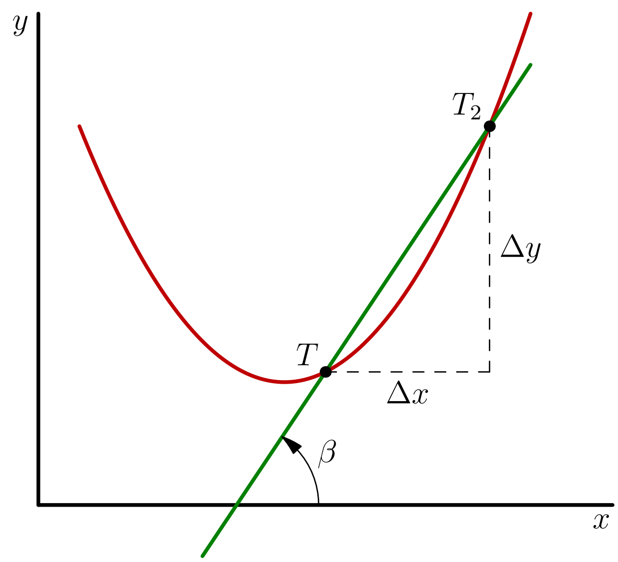
  znači da se funkcija $f(x)$ približava vrijednosti a (po volji blizu) kada se argument x približava vrijednosti x_0

- dakle, ako se vremenski interval Δt približava nuli (postaje po volji mali) onda se vrijednost omjera $\Delta s/\Delta t$ približava brzini čestice

1.2 Problem tangente

- želimo nacrtati tangentu na graf funkcije $f(x)$ u točki $T(x, y)$

- prvo crtamo sekantu tj. pravac koji siječe krivulju u točkama $T(x, f(x))$ i $T_2(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$

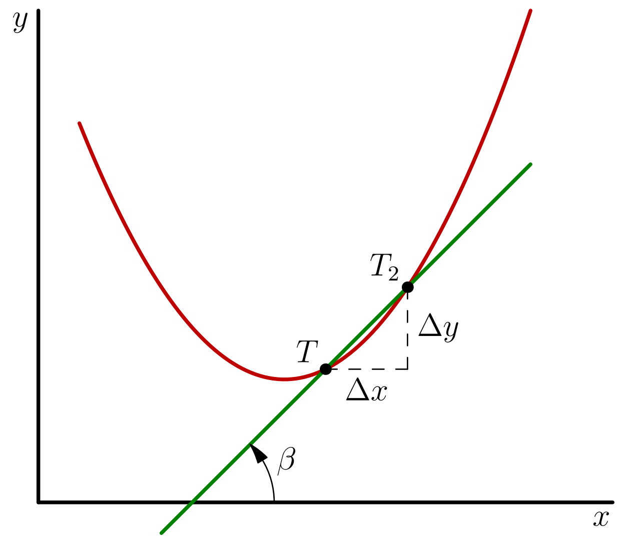


Slika 4: Sekanta koja prolazi kroz točke T i T_2.

- nagib sekante možemo odrediti iz pravokutnog trokuta na sl. 4

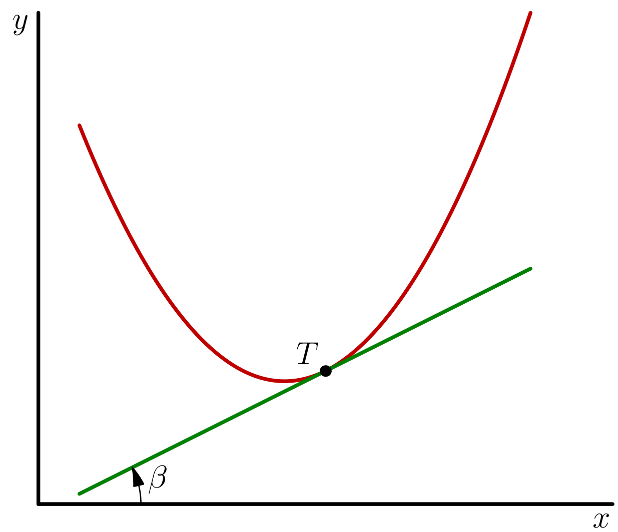
$$\tan\beta = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{8}$$

- ako točku T_2 približavamo točki T (tj. ako smanjujemo vrijednost Δx), kao na sl. 5, sekanta se približava tangenti



Slika 5: Približavanjem točke T_2 točki T sekanta se približava tangenti.

- konačno, ako $\Delta x \to 0$ sekanta prelazi u tangentu prikazanu na sl. 6



Slika 6: Tangenta na graf funkcije $f(x)$ u točki $T(x, f(x))$

- primjeri na slikama odgovaraju tangenti na graf funkcije $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$ u točki $x = 3.5$

- u tablici 1.2 navedene su vrijednosti kuta β za nekoliko razmaka točaka T i T_2

Δx	2	1	0.5	0.0
β	56^0	45^0	37^0	27^0

Tablica 2: Vrijednosti nagiba sekante za nekoliko razmaka među točkama T i T_2.

2 Pojam derivacije

2.1 Prirast funkcije

- neka su x_1 i x_2 vrijednosti argumenta x, a $y_1 = y(x_1)$ i $y_2 = y(x_2)$ odgovarajuće vrijednosti funkcije $y = f(x)$
- prirast argumenta x u intervalu $[x_1, x_2]$ definiramo kao

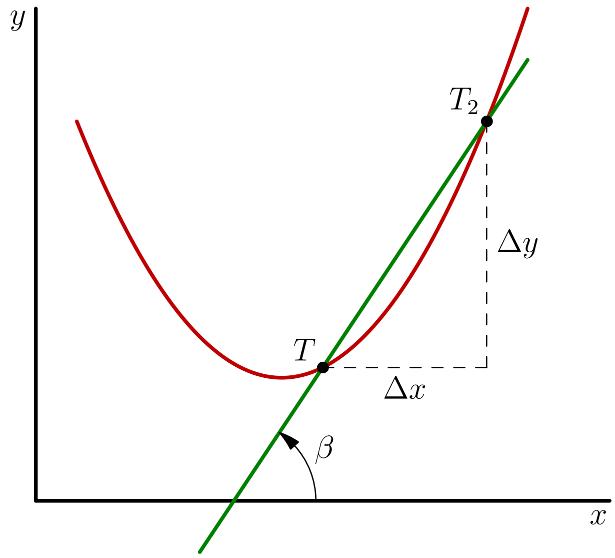
$$\Delta x = x_2 - x_1 \;, \tag{9}$$

  a prirast funkcije y kao

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \tag{10}$$

- prirast funkcije ovisi o točki x_1, prirastu argumenta Δx i samoj funkciji f
- kvocijent $\Delta y/\Delta x$ predstavlja srednju brzinu promjene funkcije y u intervalu $[x_1, x_1 + \Delta x]$
- omjer prirasta funkcije i prirasta argumenta odgovara koeficijentu smjera sekante TT_2 grafa funkcije $y = f(x)$

$$\tan\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{11}$$



Slika 7: Koefinicijent smjera sekante jednak je omjeru prirasta funkcije i prirasta argumenta.

Primjer:

- računamo prirast funkcije

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6 \tag{12}$$

  u točki $x_1 = 3$

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= \frac{1}{2}(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 6 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 6 \\ &= x\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - 3\Delta x \end{aligned} \tag{13}$$

- sada možemo izračunati prirast u bilo kojoj točki
- npr., uvrstimo $x = 3.5$ u jedn. (13)

$$\Delta f|_{x=3.5} = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}\Delta x \tag{14}$$

- promotrimo nekoliko konkretnih vrijednosti prirasta funkcije Δf i nagiba sekante β u točki $x = 3.5$

Δx	1.4	1.2	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	0.1	0.05	0.01
Δf	1.68	1.32	1.0	0.72	0.48	0.28	0.12	0.06	0.026	0.005
β	50.2^0	47.7^0	45^0	42.0^0	38.7^0	35^0	31^0	28.8^0	27.7^0	26.8^0

Tablica 3: Prirast funkcije Δf i nagibi sekanata grafa funkcije u točki $x = 3.5$ za funkciju definiranu u jedn. (12) u ovisnosti o prirastu argumenta Δx.

- ako smanjujemo prirast argumenta Δx, prirast funkcije se također smanjuje dok se nagib sekante približava vrijednosti $\beta \approx 26^0$

2.2 Derivacija funkcije

- derivaciju funkcije f u točki x definiramo kao graničnu vrijednost

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{15}$$

- za derivaciju funkcije u upotrebi su još neke oznake

$$\frac{df}{dx} \equiv f'(x) \equiv \dot{f}(x) \tag{16}$$

- oznaku $\dot{f}$ obično koristimo u mehanici

Primjer: derivacija funkcije $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$

- prirast ove funkcije smo već izračunali u prošlom odjeljku

$$\Delta f = x\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - 3\Delta x \tag{17}$$

- podijelimo prirast funkcije s prirastom argumenta

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{2}\Delta x + x - 3 \tag{18}$$

- konačno, odredimo graničnu vrijednost

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{2}\Delta x + x - 3\right) = x - 3 \tag{19}$$

- derivacija funkcije $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$ glasi

$$\frac{df}{dx} = x - 3 \tag{20}$$

- nagib tangente u točki $x = 3.5$

$$\tan\beta = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=3.5} = (x-3)|_{x=3.5} = 0.5 \Longrightarrow \beta = 26.56^0 \tag{21}$$

- nagibi sekanata navedeni u tablici 2.1 približavaju se upravo gornjoj vrijednosti $\beta = 26.56^0$
- prve primjene derivacija koje susrećemo u fizici su brzina i akceleracija čestice
- brzina odgovara derivaciji puta po vremenu

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \tag{22}$$

- akceleracija odgovara derivaciji brzine po vremenu

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \tag{23}$$

3 Osnovna pravila deriviranja

3.1 Suma i razlika funkcija

- derivacija sume jednaka je sumi derivacija

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \tag{24}$$

- označimo sumu funkcija f i g s h

$$h(x) = f(x) + g(x) \tag{25}$$

- prirast funkcije $h(x)$

$$\begin{aligned}\Delta h &= (f+g)(x+\Delta x) - (f+g)(x) \\ &= f(x+\Delta x) - f(x) + g(x+\Delta x) - g(x) \\ &= \Delta f + \Delta g \end{aligned} \tag{26}$$

- kvocijent prirasta
$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \tag{27}$$
- tražimo graničnu vrijednost
$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned} \tag{28}$$
- analognim postupkom bi pokazali da je derivacija razlike funkcija jednaka razlici derivacija
$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) \tag{29}$$

3.2 Produkt funkcija

- promatramo produkt funkcija
$$h(x) = f(x)g(x) \tag{30}$$
- promjena argumenta Δx vodi na
$$h + \Delta h = (f + \Delta f)(g + \Delta g) = fg + (\Delta f)g + f(\Delta g) + (\Delta f)(\Delta g) \tag{31}$$
- prirast produkta funkcija
$$\begin{aligned} \Delta h &= fg + (\Delta f)g + f(\Delta g) + (\Delta f)(\Delta g) - fg \\ &= (\Delta f)g + f(\Delta g) + (\Delta f)(\Delta g) \end{aligned} \tag{32}$$
- kvocijent prirasta
$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = f\frac{\Delta g}{\Delta x} + g\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta g \tag{33}$$
- tražimo graničnu vrijednost
$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} \\ &= f \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} + g \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta g \\ &= f(x)g'(x) + f'(x)g(x) + f'(x) \cdot 0 \end{aligned} \tag{34}$$
- derivacija produkta iznosi
$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \tag{35}$$

3.3 Kvocijent funkcija

- promatramo kvocijent funkcija

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \tag{36}$$

- promjena argumenta Δx vodi na

$$h + \Delta h = \frac{f + \Delta f}{g + \Delta g} \tag{37}$$

- prirast kvocijenta funkcija

$$\begin{aligned}\Delta h &= \frac{f + \Delta f}{g + \Delta g} - \frac{f}{g} = \frac{(f + \Delta f)g - f(g + \Delta g)}{(g + \Delta g)g} \\ &= \frac{fg + (\Delta f)g - fg - f(\Delta g)}{g^2 + (\Delta g)g} \\ &= \frac{g(\Delta f) - f(\Delta g)}{g^2 + (\Delta g)g}\end{aligned} \tag{38}$$

- omjer prirasta Δh i prirasta argumenta Δx

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{g\frac{\Delta f}{\Delta x} - f\frac{\Delta g}{\Delta x}}{g^2 + (\Delta g)g} \tag{39}$$

- granična vrijednost prirasta kvocijenta funkcija

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{gf' - fg'}{g^2} \tag{40}$$

3.4 Kompozicija funkcija

- postupak deriviranja kompozicija funkcija ćemo samo objasniti bez dokaza
- pretpostavimo da su zadane dvije funkcije $f(x)$ i $g(x)$, kao i njihova kompozicija

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \tag{41}$$

- složenu funkciju $h(x)$ deriviramo u tri koraka
- prvo deriviramo funkciju $g(y)$ i u nju uvrstimo funkciju $f(x)$
- zatim deriviramo funkciju $f(x)$
- na kraju pomnožimo rezultate prvog i drugog koraka

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \tag{42}$$

4 Derivacije elementarnih funkcija

- izravno računanje derivacija elementarnih funkcija pokazat ćemo na jednostavnom primjeru cjelobrojnih potencija
- postupak za ostale elementarne funkcije je vrlo sličan
- u praksi koristimo tablicu derivacija elementarnih funkcija koja je navedena na kraju poglavlja
- tražimo derivaciju funkcije $g(x) = x^n$
- prirast funkcije $g(x)$

$$\Delta g = g(x + \Delta x) - g(x) = (x + \Delta x)^n - x^n \tag{43}$$

- iskoristimo binomni teorem

$$(x + \Delta x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} (\Delta x)^k \tag{44}$$

- član $k = 0$ u sumi (44) se poništi s članom x^n u jedn. (43) i preostaje

$$\Delta g = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} (\Delta x)^k \tag{45}$$

- omjer prirasta funkcije x^n i prirasta argumenta

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} (\Delta x)^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} (\Delta x)^{k-1} \tag{46}$$

- da bi izračunali derivaciju, potrebna nam je granična vrijednost izraza (46)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} (\Delta x)^{k-1} \tag{47}$$

- svi članovi $(\Delta x)^{k-1}$ iščezavaju osim člana s nultom potencijom

$$(\Delta x)^{k-1} \to 0 \quad \text{osim za} \quad k = 1 \tag{48}$$

- derivacija funkcije x^n

$$\frac{dg}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \binom{n}{1} x^{n-1} \tag{49}$$

- binomni koeficijent

$$\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n \tag{50}$$

- konačno, derivacija cjelobrojne potencije

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \tag{51}$$

- odavde odmah sljedi da derivacija konstante iščezava jer je u tom slučaju $n = 1$

$$\frac{dc}{dx} = 0 \ , \quad c = \text{konst.} \tag{52}$$

%item nešto složnijim postupkom bi dokazali da

- derivacije elementarnih funkcija možemo sažeti u sljedećoj tablici

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^c	cx^{c-1}
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
arccot$x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Tablica 4: Derivacije elementarnih funkcija.

5 Primjeri

5.1 Derivacija produkta funkcija: $h(x) = x \sin x$

- računamo derivaciju funkcije $h(x) = x \sin x$
- radi se o produktu dvije funkcije $f(x) = x$ i $g(x) = \sin x$

- derivacija produkta dvije funkcije

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = \frac{df}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg}{dx} \tag{53}$$

- deriviramo funkcije f i g

$$\frac{df}{dx} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{dg}{dx} = \cos x \tag{54}$$

i uvrstimo ih u jedn. (53)

$$\frac{d}{dx}\left[x \sin x\right] = \sin x + x \cos x \tag{55}$$

5.2 Derivacija kvocijenta funkcija

- računamo derivaciju funkcije $h(x) = \frac{\sin x}{x}$
- radi se o kvocijentu dviju funkcija $f(x) = \sin x$ i $g(x) = x$
- derivacija kvocijenta dviju funkcija

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{gf' - fg'}{g^2} \tag{56}$$

- deriviramo funkcije f i g

$$\frac{df}{dx} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{dg}{dx} = \cos x \tag{57}$$

i uvrstimo ih u jedn. (56)

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\sin x}{x}\right] = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \tag{58}$$

5.3 Derivacija kompozicije funkcija: $h(x) = \cos^3 x$

- računamo derivaciju kompozicije funkcija

$$g(x) = \cos x \quad \text{i} \quad f(y) = y^3 \Longrightarrow f(g(x)) = (\cos x)^3 \tag{59}$$

- derivacija kompozicije $h = f \circ g$

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{60}$$

- deriviramo funkciju $f(y)$
$$f'(y) = \left(y^3\right)' = 3y^2 \tag{61}$$
i uvrstimo $y = g(x)$ tj. $y = \cos x$
$$f'(g(x)) = 3\cos^2 x \tag{62}$$
- još moramo izračunati derivaciju funkcije $g(x)$
$$g'(x) = -\sin x \tag{63}$$
- derivacija kompozcije $h(x)$
$$\frac{d}{dx}\left[\cos^3 x\right] = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 3\cos^2 x \cdot (-\sin x) = -3\cos^2 x \sin x \tag{64}$$

6 Zadaci za vježbu

Izračunajte derivacije sljedećih funkcija

- $f(x) = -2x$
- $f(x) = 5x^2$
- $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x + 1$
- $f(x) = 1/x$
- $f(x) = x^2 \cos x$
- $f(x) = e^x \ln x$
- $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
- $f(x) = \sin x^2$
- $f(x) = (\cos x)^3$

Rješenja:

- $f'(x) = -2 \Longrightarrow f'(1) = -2$
- $f'(x) = 10x \Longrightarrow f'(1) = 10$

- $f'(x) = 9x^2 - 8x + 2 \Longrightarrow f'(1) = 3$
- $f'(x) = -1/x^2 \Longrightarrow f'(1) = -1$
- $f'(x) = 2x\cos x - x^2 \sin x \Longrightarrow f'(1) = 1.982$
- $f'(x) = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} \Longrightarrow f'(1) = e(1 + \ln 1) = e = 2.718$
- $f'(x) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \Longrightarrow f'(1) = \cos 1 - \sin 1 = 0.982$
- $f'(x) = 2x\cos x^2 \Longrightarrow f'(1) = 1.9997$
- $f'(x) = -3\cos^2 x \sin x \Longrightarrow f'(1) = -0.052$