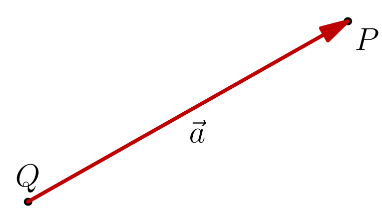
Algebra Vektora

1 Algebra vektora

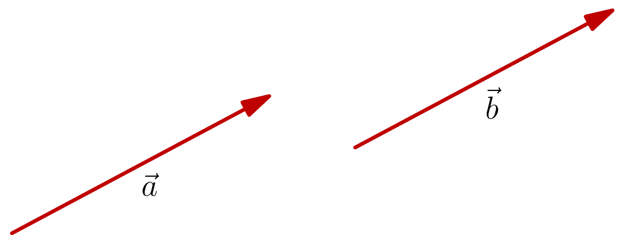
1.1 Definicija vektora

- pri rješavanju fizikalnih problema najčešće susrećemo skalarne i vektorske veličine
- za opis skalarne veličine trebamo zadati samo njezin iznos (npr. temperatura, tlak,...)
- skalarne veličine opisujemo realnim brojevima
- za opis vektorske veličine trebamo zadati njezin iznos i smjer (npr. položaj, brzina, akceleracija,...)
- vektorske veličine opisujemo usmjerenim dužinama u prostoru



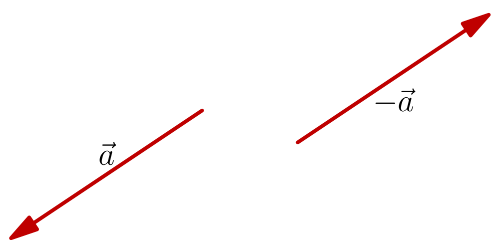
Slika 1: Vektor $\vec{a}$ s hvatištem u točki Q i krajem u točki P.

- vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su jednaki ako imaju jednaku dužinu i smjer
- pritom nije bitno gdje im se nalazi hvatište tj. početna točka vektora



Slika 2: Jednakost vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

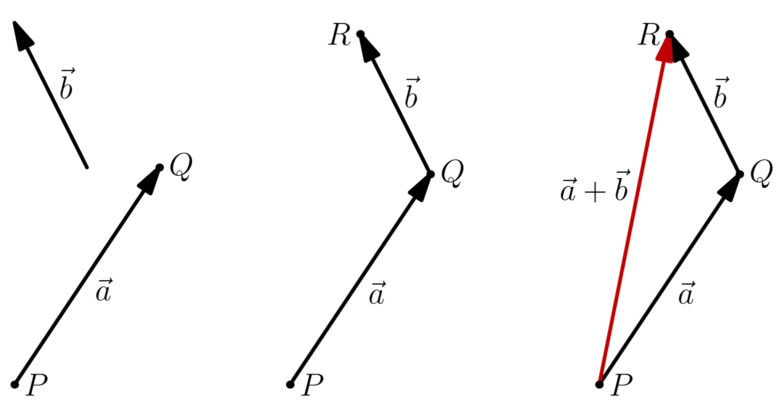
- vektor $-\vec{a}$ ima jednaku dužinu kao vektor $\vec{a}$, ali suprotan smjer



Slika 3: Vektor $\vec{a}$ i njemu suprotan vektor $-\vec{a}$.

1.2 Zbrajanje i oduzimanje vektora

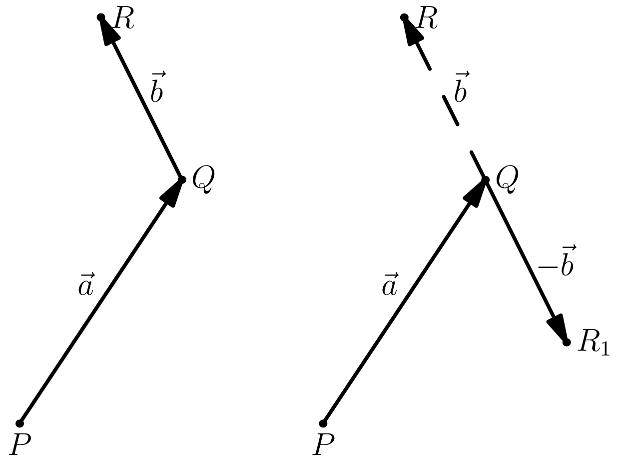
- vektor $\vec{b}$ translatiramo tako da mu se hvatište poklapa s krajem vektora $\vec{a}$
- hvatište zbroja $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ poklapa se s hvatištem vektora $\vec{a}$ (točka P), dok mu se kraj poklapa s krajem vektora $\vec{b}$ (točka R)



Slika 4: Zbrajanje vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

- oduzimanje vektora svodimo na zbrajanje vektora

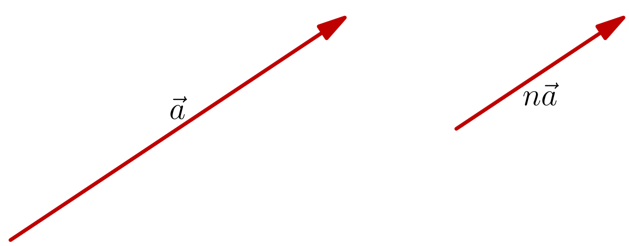
- vektor $-\vec{b}$ translatiramo tako da mu se hvatište poklapa s krajem vektora $\vec{a}$
- hvatište razlike $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ poklapa se s hvatištem vektora $\vec{a}$ (točka P), dok mu se kraj poklapa s krajem vektora $-\vec{b}$ (točka R_1)



Slika 5: Postupak oduzimanja vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

1.3 Množenje vektora skalarom

- ako je skalar n pozitivan, vektori $\vec{b}$ i $\vec{a}$ imaju jednak smjer, a ako je skalar n negativan suprotan
- duljina vektora $\vec{b}$ je u oba slučaja $|n|$ puta veća od duljine vektora $\vec{a}$



Slika 6: Množenje vektora $\vec{a}$ skalarom n.

- ako vektor $\vec{a}$ podijelimo s njegovom dužinom ($|\vec{a}|$), kao rezultat ćemo dobiti vektor jedinične dužine
- takav vektor zovemo jedinični vektor

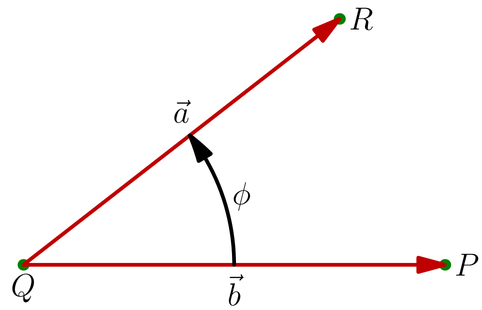
$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \tag{1}$$

- kod zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom vrijede sljedeća pravila
  - komutativnost zbrajanja: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
  - komutativnost množenja skalarom: $n\vec{a}=\vec{a}n$
  - distributivnost: $n(\vec{a}+\vec{b})=n\vec{a}+n\vec{b}$

2 Skalarni produkt vektora

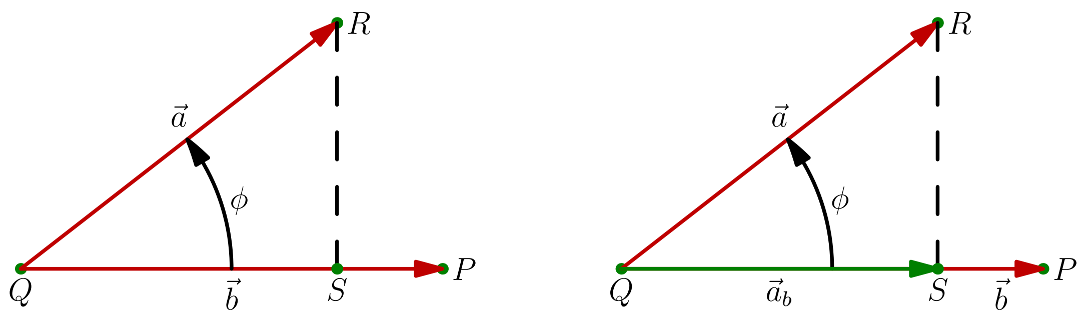
2.1 Definicija skalarnog produkta vektora

- prvo uvodimo pojam projekcije vektora $\vec{a}$ na $\vec{b}$
- promatramo dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ koji zatvaraju kut ϕ



Slika 7: Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ koji zatvaraju kut ϕ.

- povučemo okomicu iz točke R na vektor $\vec{b}$
- vektor s hvatištem u točki Q i krajem u točki S zovemo projekcija vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$ (označimo ga s $\vec{a}_b$)



Slika 8: Projekcija vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$.

- iz pravokutnog trokuta na slici slijedi

$$\cos\phi = \frac{|\vec{a}_b|}{|\vec{a}|} \Longrightarrow |\vec{a}_b| = |\vec{a}|\cos\phi \tag{2}$$

- skalarni produkt vektora definiramo kao produkt duljine projekcije $\vec{a}_b$ i duljine vektora $\vec{b}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}_b||\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi \tag{3}$$

- kao oznaku za skalarni produkt obično koristimo $\cdot$ između vektora
- rezultat skalarnog množenja vektora je skalar
- skalarni produkt vektora je komutativan

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi \tag{4}$$

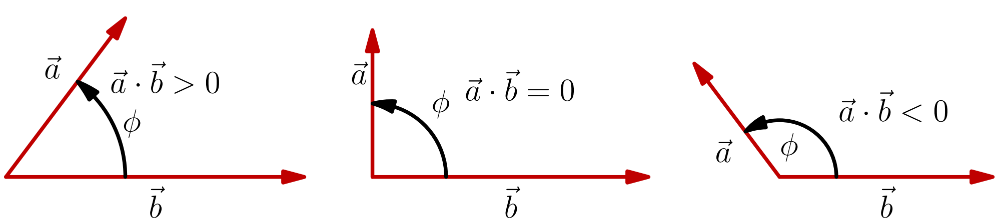
- osim komutativnosti vrijedi

$$(n\vec{a})\cdot\vec{b} = |n\vec{a}|\vec{b}|\cos\phi = n|\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi = n\vec{a}\cdot\vec{b} \tag{5}$$

- treće važno svojstvo je distributivnost

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c} \tag{6}$$

- iz formule (3) slijedi da skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ iščezava u tri slučaja
  - duljina vektora $\vec{a}$ je nula
  - duljina vektora $\vec{b}$ je nula
  - kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je $\phi = 90^0$ jer je $\cos 90^0 = 0$
- ovisno o kutu ϕ skalarni produkt može biti pozitivan $(0 \leq \phi \leq 90^0)$ ili negativan $(90^0 \leq \phi \leq 180^0)$
- u prvom slučaju je kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ šiljat, a u drugom tup



Slika 9: Primjer šiljatog, pravog i tupog kuta.

- jedinični vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ su međusobno okomiti pa vrijedi

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \tag{7}$$

- isto tako, kvadrat jediničnih vektora iznosi 1

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \tag{8}$$

- bilo koji vektor možemo napisati kao linearnu kombinaciju jediničnih vektora

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad \text{i} \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} \tag{9}$$

- skalarni produkt

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) \cdot \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) \\ &= a_xb_x\vec{i} \cdot \vec{i} + a_xb_y\vec{i} \cdot \vec{j} + a_xb_z\vec{i} \cdot \vec{k} \\ &= a_yb_x\vec{j} \cdot \vec{i} + a_yb_y\vec{j} \cdot \vec{j} + a_yb_z\vec{j} \cdot \vec{k} \\ &= a_zb_x\vec{k} \cdot \vec{i} + a_zb_y\vec{k} \cdot \vec{j} + a_zb_z\vec{k} \cdot \vec{k} \end{aligned} \tag{10}$$

- iskoristimo relacije (8) i (7)

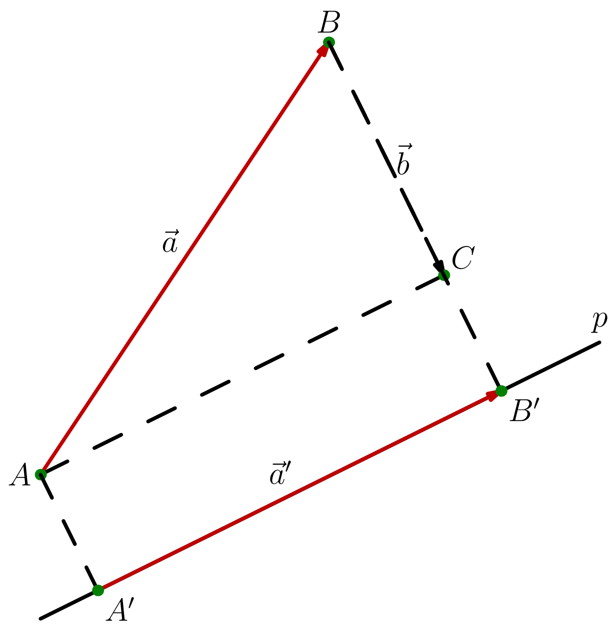
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \tag{11}$$

- ako su zadane komponente dva vektora, možemo izračunati kut između njih

$$\cos\phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \tag{12}$$

2.2 Ortogonalna projekcija vektora na pravac

- označimo projekciju vektora $\vec{a}$ na pravac p s $\vec{a}'$



Slika 10: Projekcija vektora $\vec{a}$ na pravac p.

- iz pravokutnog trokuta ACB slijedi

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{b} \tag{13}$$

- vektor $\vec{a}$ smo rastavili na vektor $\vec{a}'$ koji leži na pravcu p i vektor $\vec{b}$ koji je okomit na pravac p
- neka je $\vec{u}$ jedinični vektor koji pripada pravcu p
- skalarni produkt $\vec{u} \cdot \vec{a}$ daje duljinu projekcije vektora $\vec{a}$ na pravac p
- ako pomonožimo duljinu projekcije s vektorom $\vec{u}$ dobit ćemo vektor $\vec{a}'$
- možemo pokazati da je vektor

$$\vec{b} = \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{u})\,\vec{u} \tag{14}$$

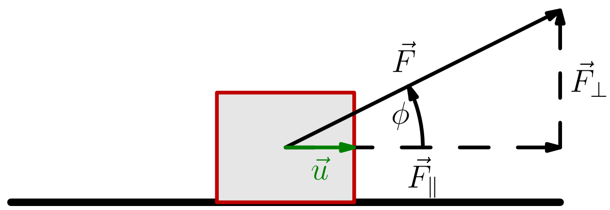
okomit na vektor $\vec{u}$

$$\vec{b} \cdot \vec{u} = \vec{a} \cdot \vec{u} - (\vec{a} \cdot \vec{u})\,(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 0 \tag{15}$$

- vektor $\vec{a}$ smo rastavili na sumu vektora $\vec{a}'$ paralelnog s pravcem p i vektora $\vec{b}$ okomitog na pravac p

Primjer

- vuçmo kvadar silom $\vec{F}$ pod kutem ϕ u odnosu na smjer gibanja (horizontalni)



Slika 11: Sila $\vec{F}$ koja djeluje na tijelo pod kutem ϕ.

- ako želimo izračunati rad, trebamo komponentu sile u smjeru puta
- u ovom slučaju je to komponenta

$$\vec{F}_\parallel = (\vec{F} \cdot \vec{u})\vec{u} \tag{16}$$

- pritom $\vec{u}$ označava jedinični vektor u smjeru puta (tj. u horizontalnom smjeru)
- kut između vektora $\vec{F}$ i $\vec{u}$ iznosi ϕ pa vrijedi

$$\vec{F}_\parallel = (\vec{F} \cdot \vec{u})\vec{u} = F \cos \phi \vec{u} \tag{17}$$

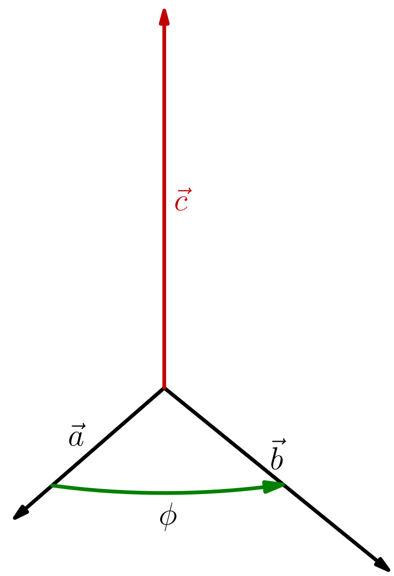
3 Vektorski produkt

- osim skalarnog, definiramo i vektorski produkt dva vektora

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \tag{18}$$

- duljina vektora $\vec{c}$ iznosi

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \phi \tag{19}$$

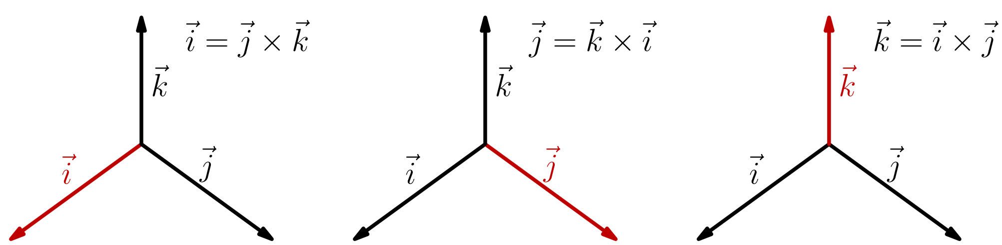


Slika 12: Vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

- smjer vektora $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ određujemo pravilom desne ruke: prsti pokazuju u smjeru od vektora $\vec{a}$ prema vektoru $\vec{b}$, a palac onda pokazuje smjer vektora $\vec{c}$
- odmah slijedi da je vektorski produkt antikomutativan

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \tag{20}$$

- vektorski produkti jediničnih vektora prikazani su na slici



Slika 13: Vektorski produkti jediničnih vektora.

- za vektorske produkte jediničnih vektora vrijede sljedeće relacije

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \tag{21}$$
$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \tag{22}$$
$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \tag{23}$$
$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \tag{24}$$
$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \tag{25}$$
$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \tag{26}$$
$$\vec{i} \times \vec{i} = 0 \tag{27}$$
$$\vec{j} \times \vec{j} = 0 \tag{28}$$
$$\vec{k} \times \vec{k} = 0 \tag{29}$$
$$\tag{30}$$

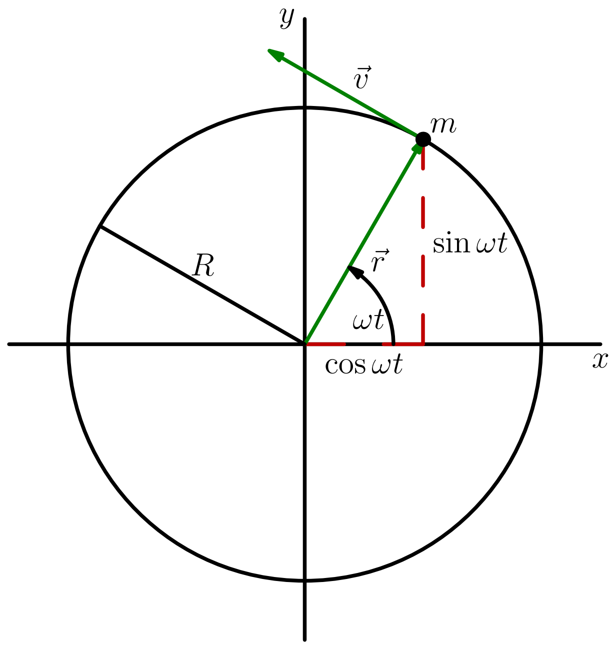
- sada možemo izračunati vektorski produkt dva proizvoljna vektora

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) \\
&= a_x b_x(\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y \vec{i} \times \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \times \vec{k} \\
&+ a_y b_x(\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y \vec{j} \times \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \times \vec{k} \\
&+ a_z b_x(\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y \vec{k} \times \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \times \vec{k} \\
&= a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} \\
&= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}
\end{aligned} \tag{31}$$

- umjesto krajnje formule (31) jednostavnije je zapamtiti kako glase vektorski produkti jediničnih vektora

Primjer: zakretni impuls čestice

- želimo izračunati zakretni impuls čestice mase m koja se giba konstatnom kutnom briznom ω po kružnici radijusa r



Slika 14: Čestica se giba po kružnici konstantnom kutnom brzinom ω

- položaj čestice

$$\vec{r} = R\cos\omega t\vec{i} + R\sin\omega t\vec{j} \tag{32}$$

- brzinu čestice možemo izračunati tako da deriviramo vektor $\vec{r}$ po vremenu

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -R\omega\sin\omega t\vec{i} + R\omega\cos\omega t\vec{j} \tag{33}$$

- zakretni impuls čestice

$$\vec{M} = m\vec{r} \times \vec{v} \tag{34}$$

- uvrstimo vektor položaja i brzine

$$\begin{aligned}\vec{r} \times \vec{v} &= \left(R\cos\omega t\vec{i} + R\sin\omega t\vec{j}\right) \times \left(-R\omega\sin\omega t\vec{i} + R\omega\cos\omega t\vec{j}\right)\\ &= -R^2\cos\omega t\sin\omega t(\vec{i} \times \vec{i}) - R^2\sin^2\omega t(\vec{j} \times \vec{i})\\ &+ R^2\sin\omega t\cos\omega t(\vec{j} \times \vec{j}) + R^2\omega\cos^2\omega t(\vec{i} \times \vec{j})\end{aligned} \tag{35}$$

- sada iskoristimo vektorske produkte jediničnih vektora

$$\vec{r} \times \vec{v} = R^2\omega\left(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t\right)\vec{k} = R^2\omega\vec{k} \tag{36}$$

- zakretni impuls čestice

$$\vec{M} = mR^2\omega\vec{k} \tag{37}$$

4 Zadaci za vježbu

Zadatak 1

Čestica mase m giba se po putanji

$$\vec{r} = a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}$$

Izračunajte zakretni impuls čestice.