

## Kolokvij Vol. 2 – Rješenja

(I) Numerički zadaci:

1. *Magnetohidrodinamika.*

(a) otpor je

$$R = \rho \frac{L}{S_0},$$

gdje je  $L$  udaljenost između elektroda, a  $S_0$  površina. Kako cijev ima kvadratni presjek, udaljenost je  $L = \sqrt{S} = 10$  cm. Uvrštavanjem otpornosti dobiva se  $R = 2 \cdot 10^{-5} \Omega$ .

(b) Koristeći otpor iz prethodnog zadatka, izlazi  $V = IR = 2$  mV.

(c) Sila je u smjeru cijevi ako je polje okomito i na struju i na cijev. Sila na struju je tada

$$F = BIL = 10 \text{ N}$$

(d) tlak je sila po površini, dakle  $p = F/S = 1000$  Pa, što je  $\approx 10$  mbar (*1 bod*)

2. *Ionski klasteri.*

(a) Naboji iona su očito  $e$  i  $-e$ . Potencijalna energija iona u beskonačnosti je nula, a kad ga približimo drugom ionu, postane

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2a} \approx -3.6 \text{ eV}$$

Dakle, sistem je vezan (kako i treba biti, s obzirom na suprotne predznake naboja) jer je energija negativna.

(b) za linearni lanac, parovi su  $\text{Br}_1\text{-K}$ ,  $\text{Br}_1\text{-Br}_2$  i  $\text{K-Br}_2$ . Energiju para  $\text{Br-K}$  smo našli u prethodnom zadatku, a energija para  $\text{Br-Br}$  je pozitivna (odbijaju se!) i iznosi

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{4a} \approx 1.8 \text{ eV}$$

Ukupna energija je dakle  $-3.6 + 1.8 - 3.6 = -5.4$  eV. Za trokut su parovi isti, ali je energija para  $\text{Br-Br}$  dvaput veća jer su dvaput bliže. Prema tome je ukupna energija  $-3.6$  eV, i lanac je stabilniji.

(c) energija vezanja je razlika energija stanja s dva i stanja s tri iona, odnosno  $-3.6 + 5.4 = 1.8$  eV. Troatomni klaster je prema tome slabije vezan od dvoatomnog.

(d) Parovi u lancu (s lijeva na desno, lanac je  $\text{K}_1\text{-Br}_1\text{-K}_2\text{-Br}_2$ ):  $\text{K}_1\text{-Br}_1$ ,  $\text{K}_1\text{-K}_2$ ,  $\text{K}_1\text{-Br}_2$ ,  $\text{Br}_1\text{-K}_2$ ,  $\text{Br}_1\text{-Br}_2$ ,  $\text{K}_2\text{-Br}_2$ . Energije su, redom,  $-3.6$  eV,  $1.8$  eV,  $-1.2$  eV,  $-3.6$  eV,  $1.8$  eV i  $-3.6$  eV, što za ukupnu energiju daje  $-8.4$  eV.

Parovi u kvadratu su isti kao u prethodnom slučaju, samo su energije različite: redom,  $-3.6$  eV,  $2.55$  eV (jer je udaljenost jednaka duljini dijagonale kvadrata,  $2a\sqrt{2}$ ),  $-3.6$  eV,  $-3.6$  eV,  $2.55$  eV i  $-3.6$  eV. Ukupna energija je prema tome  $-9.3$  eV.

I u tetraedru su parovi naravno isti, ali sve energije imaju isti iznos. Kad se pobroje parovi, izlazi da su četiri energije negativne a dvije pozitivne, što za ukupnu energiju daje  $-7.2$  eV.

Konfiguracije, od najmanje (najstabilnije!) energije do najveće su dakle kvadrat – lanac – tetraedar.

(e) S obzirom da je kvadrat najstabilniji, prijelazi će biti kvadrat – lanac i kvadrat – tetraedar. Koristeći energije iz prethodnog zadatka, dobivamo za razlike  $\Delta\mathcal{E}_{k-l} = 0.9 \text{ eV}$  i  $\Delta\mathcal{E}_{k-t} = 2.1 \text{ eV}$ . To znači da prvi foton nije u vidljivom području (infracrven je), a drugi jest (i to žut).

### 3. Elektromagnetska levitacija.

(a) ako čitav razlomak s desne strane množimo s  $a^2$  i ubacimo  $a^3$  u nazivniku pod eksponent  $3/2$ , dobiva se

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{I_\alpha a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

Sada je zanemarivanjem  $a$  u odnosu na  $z$  i množenjem čitave jednadžbe s  $\pi/\pi$  lako dobiti traženi oblik polja dipola.

(b) tok polja je  $B(z)S = \frac{\pi}{2} \frac{\mu_0 I_\alpha a^4}{z^3}$

(c) po Faradayevom zakonu, inducirani napon je  $V_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$ , što uvrštavanjem struje u polje i polja u tok, deriviranjem po vremenu daje

$$V_{ind} = \frac{\pi}{2} \frac{\mu_0 a^4}{z^3} I_0 \omega \sin \omega t$$

Kompleksna struja je jednostavno  $\hat{I} = I_0 e^{i\omega t}$ , a napon  $\hat{V}_{ind} = \frac{\pi}{2} \frac{\mu_0 a^4}{z^3} I_0 i \omega e^{i\omega t}$

(d) ekvivalentni krug je serijski spoj izvora, idealne zavojnice induktiviteta  $L$  i otpornika otpora  $R$ .

(e) Kompleksnu struju ćemo u oba slučaja dobiti upotrebom kompleksnog Ohmovog zakona. Ako je  $R = 0$ , on glasi

$$\hat{V}_{ind} = i\omega L \hat{I}_{ind},$$

iz čega slijedi struja

$$\hat{I}_{ind} = \frac{\pi}{2} \frac{\mu_0 I_0 a^4}{L z^3} e^{i\omega t},$$

i ta struja je u fazi sa strujom kroz prsten  $\alpha$ . Ako je  $L = 0$ , kompleksni Ohmov zakon kaže

$$\hat{V}_{ind} = R \hat{I}_{ind},$$

pa izlazi

$$\hat{I}_{ind} = i\omega \frac{\pi}{2} \frac{\mu_0 I_0 a^4}{R z^3} e^{i\omega t}$$

Realne dijelove je u oba slučaja lako dobiti raspisivanjem  $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ , pa ispadaju magnetski momenti u dva slučaja: za  $R = 0$ ,

$$\mu_\beta = \frac{\pi^2}{2} \frac{\mu_0 a^6 I_0}{L z^3} \cos \omega t$$

i za  $L = 0$ ,

$$\mu_\beta = \frac{\pi^2}{2} \frac{\mu_0 a^6 I_0}{R z^3} \omega \sin \omega t$$

(f) sila je u slučaju zanemarivog otpora jednaka

$$F_{dip} = \frac{3\pi^2}{8} \frac{\mu_0^2 I_0^2 a^8}{L z^7} \cos^2 \omega t,$$

a za zanemariv induktivitet ispada

$$F_{dip} = \frac{3\pi^2}{8} \frac{\mu_0^2 I_0^2 a^8}{Rz^7} \omega \sin \omega t \cos \omega t.$$

Kako je srednja vrijednost  $\sin \omega t \cos \omega t$  po periodu jednaka nuli, prsten koji ima veliki otpor neće levitirati. U slučaju kad je otpor zanemariv, upotrebljavamo da je srednja vrijednost  $\cos^2 \omega t$  po periodu jednaka  $1/2$ , pa za silu ispada

$$F_{dip} = \frac{3\pi^2}{16} \frac{\mu_0^2 I_0^2 a^8}{Lz^7}$$

(g) ako prsten levitira, magnetska sila uravnotežuje gravitacijsku, odnosno  $mg = F_{dip}$ . Rješavanjem te jednadžbe po  $z$  izlazi visina levitacije

$$z = \left( \frac{3\pi^2}{16} \frac{\mu_0^2 I_0^2 a^8}{mgL} \right)^{1/7} \approx 6 \text{ cm}$$

Aproksimacija baš i nije bila opravdana, jer nije ispalo da je  $a \ll z$ .

## (II) Konceptualni zadaci:

1. Zato što veći naponi omogućavaju prijenos jednake snage kao niži naponi, ali uz manju struju. Pošto su gubici u žicama  $I^2 R$ , povoljno je imati što manju struju, pa zato visoki napon.
2. Ptice su uglavnom od vode, pa dosta dobro vode struju. Oko žica koje provode velike struje postoji magnetsko polje, koje će u ptici inducirati dovoljno struje da joj naškodi (a bez da ptica mora biti uzemljena). Također može biti opasno i veliko električno polje oko visokonaponske žice
3. Induktivni detektor detektira vodljive predmete. Ako je tlo mokro, dobro vodi struju i smanjuje razliku u vodljivosti između tla i same mine, pa detektor ima problem.
4. Veći je na hladnom, jer dielektrična konstanta polarnog materijala raste kako temperatura pada. Razlog tomu je što se dipoli lakše usmjeravaju prema polju na nižoj temperaturi, s obzirom da ih manje 'bombardiraju' susjedi – što je viša temperatura, to je viša termička energija, pa je i nered (odnosno nemogućnost usmjeravanja) veći.
5. Igla bi titrala oko smjera polja, uz frekvenciju oscilacija proporcionalnu iznosu polja