Probni Kolokvij Vol. 2 – Rješenja

(I) Numerički zadaci:

1. *Vatra svetog Elma.*

(a) s obzirom da je kugla vodljiva, nabojs e jednoliko raspoređuje po njoj, i po Gaussovom zakonu električno polje izvan kugle je isto kao da je sav naboj u centru. Uzmimo da ne naboj na kugli Q – tada je polje na površini kugle

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a^2}$$

što moramo izjednačiti s kritičnim poljem od 1000 V/cm. Za naboj se tada dobiva $Q \approx 28$ nC. Naboj ne može biti veći, jer sav višak 'iscuri' u ionizirani zrak.

(b) Kuglu možemo zamisliti kao sferični kondenzator kapaciteta $C = 4\pi\epsilon_0 a$, što za napon daje

$$V = \frac{Q}{C} \approx 5 \text{ kV}$$

(c) Broj elektrona koji stižu na kuglu u sekundi je prema zadatku jednak n, što znači da je struja $I = ne$ (gdje je e naboj elektrona). Napon smo izračunali u prethodnom dijelu, pa je otpor

$$R = \frac{V}{I} = \frac{V}{ne} \approx 3 \text{ M}\Omega$$

(d) Po tekstu zadatka, da bi se vatra upalila mora $q = 0.9Q$. Otpor, kapacitet i napon smo sve izračunali u ranijim zadacima, pa ostaje naći vrijeme paljenja τ za koje je

$$0.9Q = VC\left(1 - e^{-\tau/RC}\right)$$

Jednostavnim prebacivanjem i logaritmiranjem dobiva se $\tau = -RC\ln\left(1 - \frac{0.9Q}{VC}\right)$, a $Q = VC$ pa izlazi $\tau \approx 40$ μs.

2. *Kako krasti struju.*

(a) polje žice (kaže Ampereov zakon) na udaljenosti R od žice je

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r\pi},$$

a zadano je da je struja izmjenična, $I = I_0\cos\omega t$ (uz $\omega/2\pi = 50$ Hz). To znači da je i polje izmjenično,

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2r\pi}\cos\omega t$$

Kad se uvrste brojke, za amplitudu polja se dobiva $\mu_0 I_0/2r\pi \approx 0.2$ mT. Smjer je tangencijalan na kružnicu polumjera R, po pravilu desne ruke.

(b) inducirani napon je po Faradayevom zakonu $V_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$, no kako je polje u smjeru tangencijalnom na namotaje zavojnice, ono uvijek leži u ravnini presjeka (zanemarujemo rubne efekte) i inducirani napon je nula.

(c) torus je najpovoljniji upravo zbog smjera polja; tok kroz jedan namotaj je

$$\Phi = \mu_r B(r) S = \frac{\mu_0\mu_r I_0 S}{2r\pi}\cos\omega t,$$

što za inducirani napon daje

$$V_{ind} = \frac{\mu_0\mu_r I_0 NS}{2r\pi}\omega\sin\omega t$$

(d) Izjednačavanjem amplitude induciranog napona i amplitude grada dobiva se $N \approx 25000$.

(e) ekvivalentni krug se sastoji od serijskog spoja izvora (inducirani napon), zavojnice induktiviteta L i otpornika R. Ako prijeđemo na kompleksne impedancije i uzmemo da je faza izvora nula, lako je iz kompleksnog Ohmovog zakona dobiti struju kroz krug:

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}_{ind}}{\hat{Z}},$$

uz $\hat{Z} = R + i\omega L$. Racionalizacijom i uzimanjem realnog dijela se za pravu (realnu) struju dobiva

$$I = V_{ind} \frac{R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Trenutna snaga je $I^2 R$, a srednje vrijednosti po periodu su $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$ i $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$, što za srednju snagu po periodu daje

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} V_{ind}^2 \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \approx 19 \text{ W}$$

(f) rezonantna frekvencija je približno

$$\omega^2 = \frac{1}{LC},$$

što znači da kapacitet mora biti $C = 1/\omega^2 L \approx 20\ \mu$F. U rezonanciji je struja u fazi s naponom, i disipacija je jednostavno $\frac{1}{2} V_{ind}^2 / R \approx 4.8$ kW. Dakle ovdje se i te kako isplati vratiti fazu na nulu pomoću kondenzatora!

3. *Promjenjivi kondenzator.*

(a) Kapacitet je

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{D},$$

gdje je S površina dijelova ploča koji se prekrivaju. U ovom slučaju je to segment kruga, površine $\frac{1}{2} R^2 (\pi - \theta)$, i za kapacitet ispada

$$C(\theta) = \frac{\epsilon_0}{2D} R^2 (\pi - \theta)$$

(b) rezonantna frekvencija je $\omega = 1/\sqrt{LC}$, što uvrštavanjem formule iz (a) daje

$$\omega(\theta) = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2D}{\epsilon_0 L}} \frac{1}{\sqrt{\pi - \theta}}$$

Za skicu je dovoljno primijetiti da za $\theta = 0$ frekvencija ima konačnu vrijednost $\frac{1}{R}\sqrt{\frac{2D}{\pi \epsilon_0 L}}$ i da za sve konačne θ raste dok ne izdivergira za $\theta \to \pi$.

(c) kao i u prethodnom dijelu, $\omega = 1/\sqrt{LC}$, pa uvrštavamo $\omega = \omega_0 (1 + K\theta)$ i izlazi

$$C(\theta) = \frac{1}{\omega_0^2 L} \frac{1}{(1 + K\theta)^2}$$

(d) promjena kapaciteta je proporcionalna promjeni površine koja se preklapa, ali s obzirom da se površina smanjuje ako kut naraste, bit će

$$dC = -\frac{\epsilon_0}{2D} r(\theta)^2 d\theta$$

(e) promjena frekvencije je

$$d\omega = \frac{d}{dC}\frac{1}{\sqrt{LC}}dC = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{LC^3}}dC$$

Uvrštavanje $C(\theta)$ i dC daje

$$d\omega = \frac{\epsilon_0 L\omega_0^3}{4D}(1+K\theta)^3 r(\theta)^2 d\theta,$$

i nakon izjednačavanja s $\omega_0 K d\theta$ i sređivanja izlazi za $r(\theta)$ jednadžba

$$r(\theta) = \sqrt{\frac{4DK}{\epsilon_0 L\omega_0^2}\frac{1}{(1+K\theta)^{3/2}}}$$

(f) funkcija $r(\theta)$ je spirala, koja kreće od relativno velikog $r(0)$ i pada prema centru kako kut raste.