

Probni Kolokvij Vol. 1 – Rješenja

(I) Numerički zadaci:

1. *Dimenzionalna svaštara.*

(a) energija je

$$E \sim a_0^\alpha m_e^\beta \hbar^\gamma,$$

što kad uvrstimo jedinice daje

$$\text{kg m}^2\text{s}^{-2} = \text{m}^\alpha \text{kg}^\beta \text{kg}^\gamma \text{m}^{2\gamma} \text{s}^{-\gamma},$$

odnosno jednačbe za eksponente

$$\beta + \gamma = 1$$

$$\alpha + 2\gamma = 2$$

$$\gamma = 2$$

Iz toga slijedi $\alpha = -2$ i $\beta = -1$, dakle

$$E \sim \frac{\hbar^2}{m_e a_0^2}$$

(b) težina životinje ide s volumenom, dakle $\sim L^3$, gdje je L linearna dimenzija životinje. Mišićna masa također ide s L^3 , pa zaključujemo da je visina na koju skače životinja neovisna o njenoj dimenziji! Odnosno, i muha i mali slon mogu skočiti otprilike jednako (red veličine 1 m).

(c) polumjer je

$$R \sim G^\alpha M^\beta c^\gamma,$$

pa uvrštavanje jedinica daje

$$\text{m} = \text{m}^{3\alpha} \text{kg}^{-\alpha} \text{s}^{-2\alpha} \text{kg}^\beta \text{m}^{\gamma} \text{s}^{-\gamma}$$

i dobivamo jednačbe za eksponente

$$3\alpha + \gamma = 1$$

$$-\alpha + \beta = 0$$

$$-2\alpha - \gamma = 0$$

iz čega izlazi $\alpha = 1$, $\beta = 1$ i $\gamma = -2$, odnosno

$$R \sim \frac{GM}{c^2}$$

2. *Solarno jedro.*

(a) snaga je (energija jednog fotona) · (broj fotona u sekundi), sve po 1 m². Iz toga nakon pretvaranja eV u J odmah slijedi broj fotona,

$$n \approx 4 \cdot 10^{21} \text{ foton/s} \cdot \text{m}^2$$

(b) traženi broj fotona je broj po 1 m² pomnožen površinom jedra, koja je jednaka 10⁶ m². Dakle, broj fotona u sekundi je

$$n_{\text{jedro}} \approx 4 \cdot 10^{27} \text{ foton/s}$$

(c) impuls po fotonu za apsorbirajuće ogledalo će biti $\Delta p_{\text{foton}} = E/c$, a za reflektirajuće dvostruko veći, jer fotoni promjene smjer: $\Delta P = p - (-p) = 2p$.

(d) sila na jedro je

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = n_{\text{jedro}} \Delta p_{\text{foton}} = 2n_{\text{jedro}} \frac{E}{c},$$

što uvrštavanjem broja fotona n i njihove energije daje $F \approx 9 \text{ N}$. Akceleracija je $a = F/m$ i spada $a \approx 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$. Za reflektivnost 90% se preneseni impuls množi s 1.9 (a ne 1.8!), jer tada jedro apsorбира 10% fotona, koji prenesu E/c , a ostale reflektira bez gubitaka i oni prenesu $2E/c$. Sve skupa je onda $(0.1 + 2 \cdot 0.9) E/c = 1.9E/c$.

3. Rocheova granica.

(a) ako je $m \ll M$, mjesec približno kruži oko centra planeta i masa mjeseca neće ući u krajnji rezultat. Sile koje djeluju na mjesec u sistemu koji se vrti s mjesecom (kutnom brzinom ω) su gravitacijska od planeta u smjeru prema planetu i centrifugalna prema van, odnosno

$$F = -G \frac{Mm}{D^2} + m\omega^2 D.$$

U ravnoteži je ukupna sila na mjesec jednaka nuli, pa izlazi kutna brzina

$$\omega^2 = \frac{GM}{D^3}$$

(b) i (c) sile koje djeluju u rotirajućem sustavu su: gravitacijsko privlačenje planeta (prema planetu), gravitacijsko privlačenje mjeseca (prema mjesecu) i centrifugalna sila (isto prema mjesecu, odnosno prema van). Ukupna sila je dakle

$$F = -G \frac{M\mu}{(D-r)^2} + G \frac{m\mu}{r^2} + \mu\omega^2 (D-r)$$

(d) ne da se baš mnogo srediti, osim izlučivanja faktora $GM\mu$:

$$F = -GM\mu \left[\frac{1}{(D-r)^2} - \frac{D-r}{D^3} \right] + G \frac{m\mu}{r^2}$$

(e) u Rocheovoj granici je sila na komad mase μ jednaka nuli, pa jednostavno slijedi uvjet (u kojem se krati masa μ i G):

$$M \left[\frac{1}{(D_R - r)^2} - \frac{D_R - r}{D_R^3} \right] = \frac{m}{r^2}$$

(f) i (g) jedini član koji se može linearizirati je prvi član u uglatoj zagradi, koji daje

$$\frac{1}{(D_R - r)^2} \approx \frac{1}{D_R^2} \left(1 + 2 \frac{r}{D_R} \right),$$

pa nakon kraćenja izlazi pojednostavljen izraz za Rocheovu udaljenost,

$$D_R^3 = 3 \frac{M}{m} r^3$$

(h) masa planeta je $M = \frac{4}{3} \rho_p R^3$, analogno vrijedi za masu mjeseca. Uvrštavanje u jednadžbu za D_R i uzimanje trećeg korijena daje

$$D_R \approx 1.44R \left(\frac{\rho_p}{\rho_m} \right)^{1/3}$$

Uvrštavanje vrijednosti daje $D_R \approx 77000 \text{ km}$.

(II) Konceptualni zadaci:

1. Kad bi torpeda imao samo jedan propeler, zbog očuvanja kutne količine gibanja bi se počeo vrtjeti oko svoje osi (u smjeru suprotnom od rotacije propelera), što nije poželjno jer bi mu porastao otpor u vodi. Zato se ugrađuju dva kontrarotirajuća propelera na istoj osovini.
2. Dijamant, iako je najtvrdi poznati materijal (osim možda vurcitnog borovog karbida), je prilično krt, odnosno lako puca na udarac. Čelični čekić je, s druge strane, dosta elastičan i neće puknuti pri zabijanju čavala ili tome slično. Komad dijamanta možete lako razbiti čeličnim čekićem!
3. U bestežinskom stanju su zato što svemirska stanica kruži oko Zemlje, pa u sistemu stanice uz gravitacijsku postoji i centrifugalna sila (koja točno poništava ovu prvu). Razlog *nije* udaljenost stanice od Zemlje, odnosno pad gravitacijske sile s udaljenošću!
4. Lovac mora ciljati točno u majmuna, jer jednom kad ispali metak, i majmun i metak padaju u istom gravitacijskom polju (a akceleracija g ne ovisi o masi). Prema tome, koliko padne majmun, past će i metak. Zato je pogrešno gađati ispod majmuna da bi se kompenziralo za njegov pad.
5. Zamislimo tanker s jednim spremnikom kako se naginje. Površina nafte mora zbog gravitacije ostati paralelna s površinom mora, što znači da će se težište nafte pomaknuti s vertikalne osi simetrije tankera. Takav pomak može uzrokovati prevrtanje (da ne spominjemo pojave valova na nafti, opasnih rezonancija i tome slično). S mnogo malih spremnika takvi efekti su nemogući.