Izvodi uz predavanje o harmonijskom oscilatoru

1. Dokaz da je $\int_0^T \cos^2(\omega_0 t + \varphi)\,dt = \int_0^T \sin^2(\omega_0 t + \varphi)\,dt = \frac{T}{2}$.

Koristeći trigonometrijsku relaciju $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}[1 + \cos 2\alpha]$, možemo pisati:

$$\int_0^T \cos^2(\omega_0 t + \varphi)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]\,dt = \frac{1}{2}t\Big|_0^T + \int_0^T \cos 2(\omega_0 t + \varphi) dt$$

Uvedimo supstituciju $w = 2\omega_0 t + 2\varphi$. Tada je $dt = \frac{dw}{2\omega_0}$, a mijenjaju se i granice integracije. Znajući da vrijedi $\omega_0 = 2\pi/T$, naš integral postaje:

$$= \frac{1}{2}T + \int_{-2\varphi}^{4\pi-2\varphi} \cos w dw = \frac{1}{2}T + \sin w|_{-2\varphi}^{4\pi-2\varphi} = \frac{1}{2}T.$$

Drugi integral računamo analogno, koristeći trigonometrijsku relaciju $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}[1 - \cos 2\alpha]$.

2. Gubitak potencijalne energije gušenog harmonijskog oscilatora u jednom periodu.

Pretpostavimo da u $t = 0$ harmonijski oscilator puštamo iz mirovanja, tj. da je $\varphi = 0$. U tom trenutku cjelokupna energija harmonijskog oscilatora je potencijalna. Početna amplituda je x_0, a period oscilacija je $T = 2\pi/\omega'$.

$$E(t = 0) = E_p(t = 0) = \frac{1}{2}Kx_0^2 \quad .$$

Nakon jednog perioda ($t = T$), ponovno je sva energija potencijalna (oscilator miruje). Otklon u tom trenutku je $x(t = T) = x_0 e^{-T/2\tau}$. Energija u tom trenutku je

$$E(t = T) = E_p(t = T) = \frac{1}{2}Kx(T)^2 = \frac{1}{2}Kx_0^2 e^{-T/\tau} \quad .$$

Energija izgubljena u jednom periodu je $\Delta E = E_0\left(1 - e^{-T/\tau}\right)$. Za slabo gušenje vrijedi $\tau \gg T$. Eksponencijalna funkcija može se za male vrijednosti y pisati $e^y \approx 1 + y$ pa za izgubljenu energiju vrijedi

$$\Delta E = E_0\left(1 - e^{-T/\tau}\right) \approx E_0\frac{T}{\tau}$$

Faktor dobrote definiran je kao $Q = 2\pi\frac{E_0}{\Delta E}$ pa za mala gušenja vrijedi

$$Q = \frac{2\pi E_0}{E_0\frac{T}{\tau}} = \frac{2\pi}{T}\tau = \omega'\tau \approx \omega_0\tau \quad .$$

3. Amplituda i faza tjeranih oscilacija.

Jednadžba gibanja glasi:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_v t$$

Stacionarno rješenje je oblika $x(t) = C \cdot \cos(\omega_v t + \varphi)$.
Nađimo amplitudu C i fazu φ! Koristimo trigonometrijsku relaciju $\cos(\omega_v t + \varphi) = \cos\omega_v t \cos\varphi - \sin\omega_v t \sin\varphi$.

$$x(t) = C \cdot \cos\omega_v t \cos\varphi - C \cdot \sin\omega_v t \sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\omega_v C \cdot \sin\omega_v t \cos\varphi - \omega_v C \cdot \cos\omega_v t \sin\varphi$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega_v^2 C \cdot \cos\omega_v t \cos\varphi + \omega_v^2 C \cdot \sin\omega_v t \sin\varphi$$

Uvrstimo to u jednadžbu gibanja i grupiramo članove uz $\cos\omega_v t$ i uz $\sin\omega_v t$:

$$\begin{aligned} &C \cdot \left[-\omega_v^2 \cos\varphi - \frac{\omega_v}{\tau}\sin\varphi + \omega_0^2\cos\varphi\right]\cos\omega_v t + \\ &+C \cdot \left[\omega_v^2 \sin\varphi - \frac{\omega_v}{\tau}\cos\varphi + \omega_0^2\sin\varphi\right]\sin\omega_v t = \tfrac{F_0}{m}\cos\omega_v t \end{aligned}$$

Da bi jednadžba vrijedila u svakom trenutku moraju se izjednačiti članovi uz $\cos\omega_v t$ i uz $\sin\omega_v t$ pa imamo dvije jednadžbe:

$$C \cdot \left[-\omega_v^2 \cos\varphi - \frac{\omega_v}{\tau}\sin\varphi + \omega_0^2\cos\varphi\right] = \frac{F_0}{m}$$

$$\omega_v^2 \sin\varphi - \frac{\omega_v}{\tau}\cos\varphi + \omega_0^2\sin\varphi = 0$$

Rješenja ovih jednadžbi su:

$$C = \frac{F_0}{m\left[\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_v^2)^2 + \left(\frac{\omega_v}{\tau}\right)^2}\right]}$$

i

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\frac{\omega_v}{\tau}}{\omega_0^2 - \omega_v^2}.$$