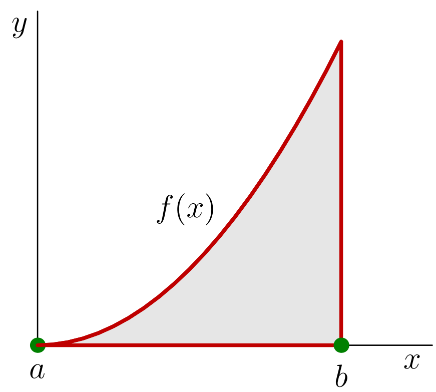
Osnove integralnog računa

September 12, 2008

1 Problem površine

- želimo izračunati površinu omeđenu grafom funkcije $f(x)$ između točaka $x = a$ i $x = b$



Slika 1: Površina omeđena grafom funkcije $f(x)$.

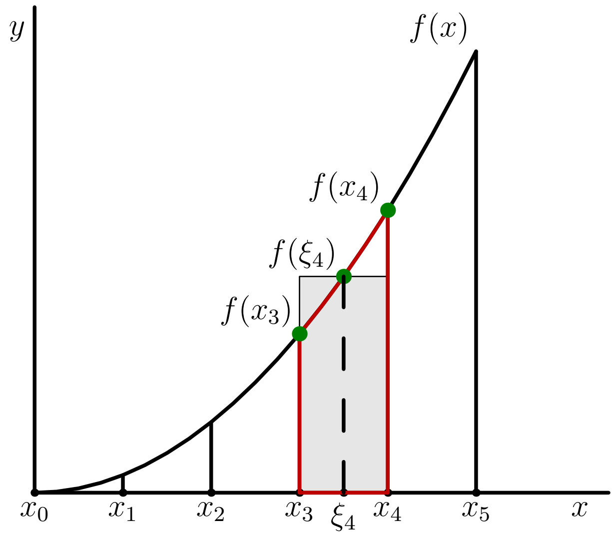
- interval $[a, b]$ podijelimo na n podintervala

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n] \tag{1}$$

- početna točka odgovara lijevoj, a krajnja desnoj granici intervala

$$x_0 = a \quad \text{i} \quad x_n = b \tag{2}$$

- na svakom podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ odaberemo proizvoljnu točku ξ_i



Slika 2: Primjer podjele intervala $[a, b]$ na pet podintervala.

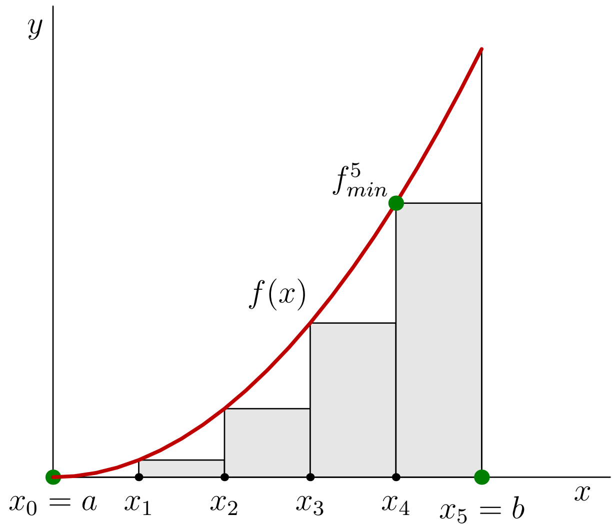
- površinu ispod grafa na podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ možemo približno zamijeniti s površinom pravokutnika širine $x_i - x_{i-1}$ i visine $f(\xi_i)$

$$S_i = [x_i - x_{i-1}] \cdot f(\xi_i) \tag{3}$$

- zbrajanje površina svih pravokutnika daje približnu vrijednost ukupne površine

$$S = \sum_i S_i = \sum_i [x_i - x_{i-1}] \cdot f(\xi_i) \tag{4}$$

- sumu S u jedn. (4) zovemo integralna suma
- u daljnjim razmatranjima koristit ćemo još i pojmove gornje i donje integralne sume
- donju integralnu sumu definiramo tako da za ξ_i odaberemo točku u kojoj funkcija postiže minimalnu vrijednost na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$
- označimo s f^i_{min} minimalnu vrijednost funkcije $f(x)$ na i-tom podintervalu



Slika 3: Donja integralna suma.

- površina i-tog pravokutnika iznosi

$$S_i = [x_i - x_{i-1}] \cdot f^i_{min} \tag{5}$$

- za bilo koju točku ξ_i na i-tom podintervalu vrijedi

$$f(\xi_i) \geq f^i_{min} \Longrightarrow f(\xi_i)[x_i - x_{i-1}] \geq f^i_{min}[x_i - x_{i-1}] \tag{6}$$

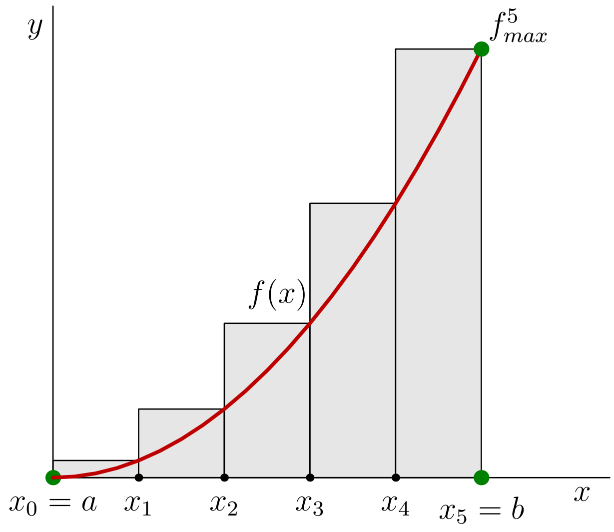
- sumacijom po svim podintervalima dolazimo do zaključka

$$\sum_i f(\xi_i)[x_i - x_{i-1}] \geq \sum_i f^i_{min}[x_i - x_{i-1}] \tag{7}$$

- površina omeđena grafom $f(x)$ sigurno je veća od donje integralne sume definirane izrazom

$$S_{min} = \sum_i f^i_{min}(x_i - x_{i-1}) \tag{8}$$

- označimo s f^i_{max} maksimalnu vrijednost funkcije $f(x)$ na i-tom podintervalu



Slika 4: Gornja integralna suma.

- za bilo koju točku ξ_i na i-tom podintervalu vrijedi

$$f(\xi_i) \le f^i_{max} \Longrightarrow f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le f^i_{max}(x_i - x_{i-1}) \tag{9}$$

- sumacijom po svim podintervalima dolazimo do zaključka

$$\sum_i f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_i f^i_{max}(x_i - x_{i-1}) \tag{10}$$

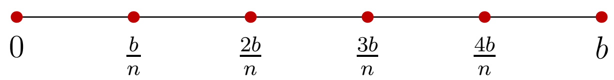
- površina omeđena grafom $f(x)$ sigurno je manja od gornje integralne sume definirane izrazom

$$S_{max} = \sum_i f^i_{max}(x_i - x_{i-1}) \tag{11}$$

Primjer: površina ispod grafa funkcije $f(x) = x^2$ na intervalu $[0, 1]$

- radi jednostavnosti koristimo podintervale jednake dužine

$$x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n} \tag{12}$$



Slika 5: Podjela intervala $[0, 1]$ na 5 podintervala.

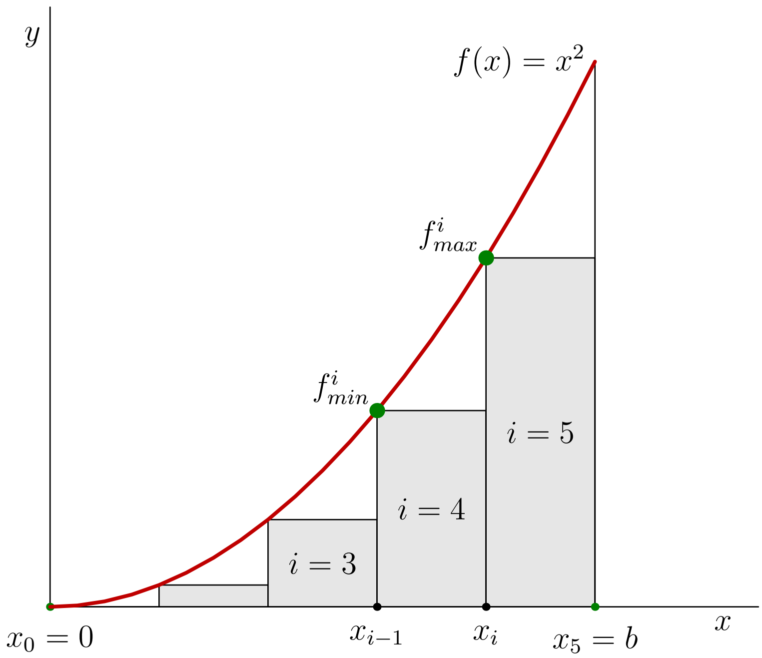
- točke kojima dijelimo interval $[0,1]$ na n podintervala

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{2}{n}, \ldots, x_n = 1 \tag{13}$$

- funkcija $f(x) = x^2$ strogo raste pa na podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ postiže minimalnu vrijednost u točki x_{i-1}, a maksimalnu u točki x_i

$$f^i_{min} = f(x_{i-1}) = \left[\frac{i-1}{n}\right]^2 \tag{14}$$

$$f^i_{max} = f(x_i) = \left[\frac{i}{n}\right]^2 \tag{15}$$



Slika 6: Minimalna i maksimalna vrijednost funkcije na podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$.

- donja integralna suma glasi

$$S_{min} = \sum_{i=1}^{n} f^i_{min}[x_i - x_{i-1}] = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{i-1}{n}\right]^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 \tag{16}$$

- gornja integralna suma glasi

$$S_{max} = \sum_{i=1}^{n} f^i_{max}[x_i - x_{i-1}] = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{i}{n}\right]^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \tag{17}$$

- osim donje i gornje integralne sume, još možemo izračunati i običnu integralnu sumu
- točku ξ_i odaberemo kao polovište intervala $[x_{i-1}, x_i]$

$$\xi_i = x_{i-1} + \frac{1}{2}[x_i - x_{i-1}] = \frac{i-1}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}(2i+1) \tag{18}$$

- integralna suma glasi

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[x_i - x_{i-1}] = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{2i+1}{2n}\right]^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{4n^3}\sum_{i=1}^{n}(2i+1)^2 \tag{19}$$

- sumu prvih n cijelih brojeva i sumu kvadrata prvih n cijelih brojeva računamo koristeći formule

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \tag{20}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \tag{21}$$

- obje formule možemo dokazati matematičkom indukcijom
- primjenimo formulu (21) na donju i gornju integralnu sumu

$$S_{min} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \frac{1}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\right]$$

$$\Longrightarrow S_{min} = \frac{1}{6n^2}(n-1)(2n-1) \tag{22}$$

$$S_{max} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right]$$

$$\Longrightarrow S_{max} = \frac{1}{6n^2}(n+1)(2n+1) \tag{23}$$

- preostala nam je još integralna suma

$$S = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 \frac{1}{4n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{4n^3}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 \tag{24}$$

- kvadriramo izraz $2i - 1$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(4i^2 - 4i + 1\right) 4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \tag{25}$$

$$= \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n \tag{26}$$

$$= \frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1) \tag{27}$$

- integralna suma glasi

$$S = \frac{1}{12n^2}(2n+1)(2n-1) \tag{28}$$

- sada možemo usporediti sve tri integralne sume

$$S_{min} = \frac{1}{6n^2}(n-1)(2n-1) \tag{29}$$
$$S = \frac{1}{12n^2}(2n+1)(2n-1) \tag{30}$$
$$S_{max} = \frac{1}{6n^2}(n+1)(2n+1) \tag{31}$$

- povećavanjem broja podintervala (tj. broja n) očekujemo približavanje vrijednosti svih triju suma

n	S_{min}	S	S_{max}
3	0.185	0.324	0.519
5	0.240	0.330	0.44
9	0.280	0.332	0.391
15	0.301	0.333	0.367
50	0.323	0.333	0.343

Tablica 1: Usporedba vrijednosti integralnih suma za razne podjele intervala $[0, 1]$.

2 Svojstva određenog integrala

2.1 Osnovna svojstva

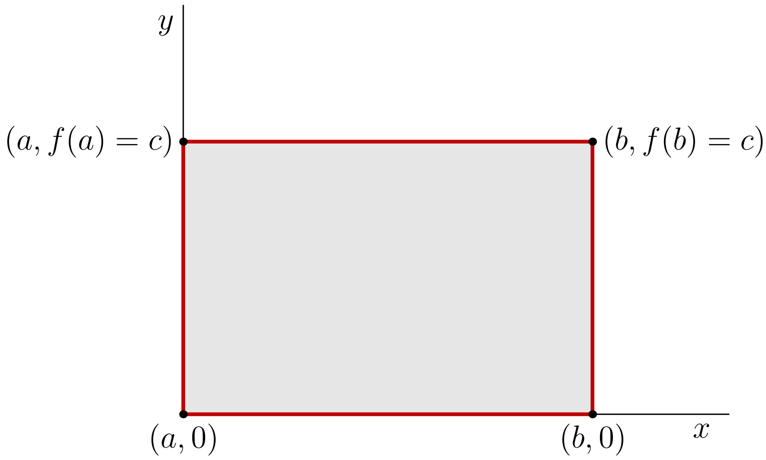
- iz definicije određenog integrala (površina pod krivuljom $f(x)$) slijedi

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \tag{32}$$

- ako se granice integracije poklapaju, površine nema pa integral iščezava
- ako zamijenimo granice integracije, integral mijenja predznak

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \quad a < b \tag{33}$$

- ovo svojstvo možemo ilustrirati na jednostavnom primjeru $f(x) = c$



Slika 7: Primjer kod zamjene granica integracije.

- površina pravokutnika iznosi $P = (b - a) \cdot c$
- računamo površinu integriranjem

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a) \cdot c \tag{34}$$

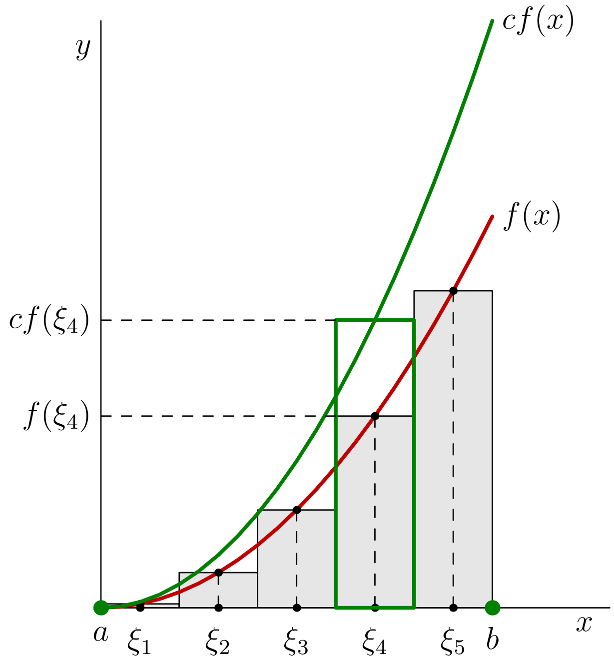
- sada zamjenimo granice integracije

$$\int_b^a f(x)dx = (a - b) \cdot c = -\int_a^b f(x)dx \tag{35}$$

- ako funkciju $f(x)$ pomnožimo konstantom c, površina ispod nove krivulje $cf(x)$ glasi

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \tag{36}$$

- ovo svojstvo možemo pokazati sljedećom slikom



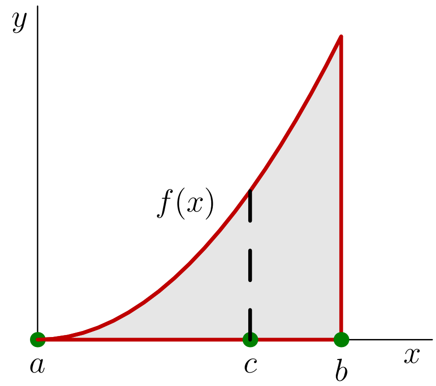
Slika 8: Graf funkcije $f(x)$ pomnožen konstantom c.

- visina svakog pravokutnika se poveća za faktor c pa se i površina svakog pravokutnika poveća za faktor c
- ukupnu površinu dobijemo zbrajanjem svih pravokutnika što vodi na formulu (36)
- jednakim postupkom bi pokazali da vrijede sljedeće relacije

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \tag{37}$$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \tag{38}$$

- pretpostavimo, na kraju, da interval integracije $[a, b]$ podijelimo na dva dijela točkom c



Slika 9: Podjela intervala integracije na dva dijela točkom c.

- ukupna površina je suma površine koju dobijemo integriranjem od a do c i površine koju dobijemo integriranjme od c do b

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{39}$$

2.2 Teorem srednje vrijednosti

- promatramo integral funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$
- označimo minimalnu i maksimalnu vrijednost funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ s f_{min} i f_{max}
- iz definicije integrala slijedi procjena

$$f_{min} \cdot [b-a] \leq \int_a^b f(x)dx \leq f_{max} \cdot [b-a] \tag{40}$$

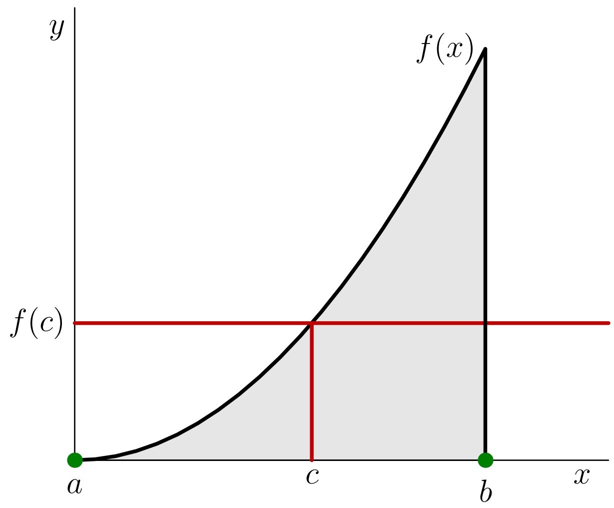
- podijelimo gornju jednadžbu s duljinom intervala

$$f_{min} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f_{max} \tag{41}$$

- funkcija $f(x)$ poprima sve vrijednosti između minimalne i maksimalne vrijednosti pa na intervalu $[a, b]$ sigurno postoji broj c za koji vrijedi

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx, \quad c \in [a, b] \tag{42}$$

- broj $f(c)$ zovemo srednja vrijednost funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$



Slika 10: Srednja vrijednost funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

3 Newton-Leibnizova formula

- ako za funkciju $f(t)$ postoji integral na intervalu $[a, b]$ možemo definirati funkciju

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{43}$$

- funkcije F i f vezane su sljedećom relacijom

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \tag{44}$$

- da bi dokazali prethodnu jednadžbu, koristimo definiciju derivacije

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \tag{45}$$

- iskoristimo jedn. (33) da bi promijenili granice integracije u desnom integralu

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt \tag{46}$$

- sada iskoristimo jedn. (37) da bi prethodni izraz sveli na jedan integral

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt \tag{47}$$

- na intervalu $[x, x + \Delta x]$ sigurno postoji broj c sa svojstvom (teorem srednje vrijednosti)

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta x \cdot f(c), \quad c \in [x, x + \Delta x] \tag{48}$$

- prema definiciji derivacije

$$\frac{d}{dx}F(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \tag{49}$$

- broj c se nalazi unutar intervala $[x, x + \Delta x]$
- ako interval dovoljno suzimo ($\Delta x \to 0$) broj c će se poklopiti s brojem x

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x) \tag{50}$$

- funkciju $F(x)$ sa svojstvom

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \tag{51}$$

  zovemo primitivna funkcija za funkciju $f(x)$

- primitivna funkcija je određena do na konstantu C

$$\frac{d}{dx}[F(x) + C] = \frac{dF}{dx} + \frac{dC}{dx} \tag{52}$$

- derivacija konstante ivščezava pa slijedi

$$\frac{d}{dx}[F(x) + C] = \frac{dF}{dx} = f(x) \tag{53}$$

- možemo zaključiti da je $F(x)+C$ jednako dobra primitivna funkcija kao i $F(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad \frac{dF}{dx} = f(x) \tag{54}$$

- dakle, računanje određenog integrala se svodi na problem pronalaženja primitivne funkcije

Primjer 1: $\int_0^1 x^3 dx$

- koristimo jedn. (54)
$$\int_0^1 x^3 dx = F(1) - F(0), \tag{55}$$
gdje je $F(x)$ primitivna funkcija za funkciju $f(x) = x^3$

- koju funkciju trebamo derivirati da bi kao rezultat dobili funkciju $f(x) = x^3$

- prisjetimo se formule za derivaciju potencije
$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \Longrightarrow x^3 = \frac{1}{4}\frac{d}{dx}x^4 \tag{56}$$

- primitivna funkcija u ovom slučaju glasi
$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 \tag{57}$$

- vratimo se jedn. (55)
$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}1^4 - \frac{1}{4}0^4 = \frac{1}{4} \tag{58}$$

- neodređene integrale najčešće korištenih elementarnih funkcija možemo sažeti u sljedećoj tablici

$f(x)$	$\int f(x)dx$
0	c (konstanta)
1	$x + c$
x^a	$x^{a+1}/(a+1) + c, \quad a \neq -1, a \in \mathcal{R}$
$1/x$	$\ln\|x\| + c, \quad x \neq 0$
e^x	$e^x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$

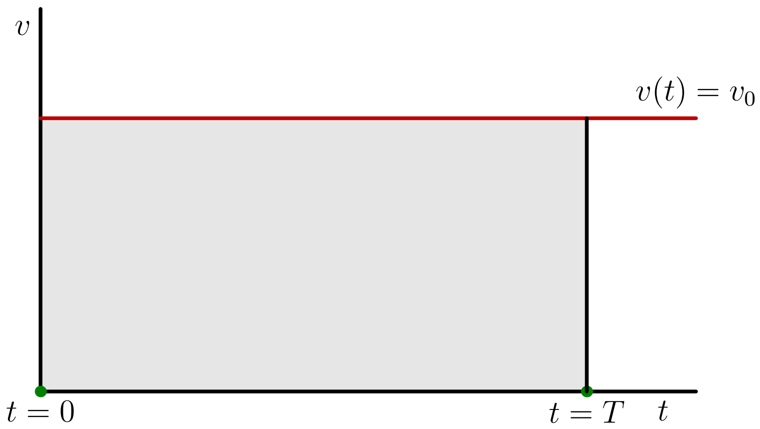
Tablica 2: Integrali elementarnih funkcija.

- općenito, integriranje je teže od deriviranja

4 Problem puta

- čestica se giba po pravcu brzinom $v(t)$
- poznati primjeri su
  - jednoliko gibanje: $v(t) = v_0$
  - jednoliko ubrzano gibanje: $v(t) = at$, gdje je a konstantno ubrzanje čestice
- tražimo put koji čestica prevali u prvih nakon vremena T
- ako je gibanje jednoliko, trebamo pomnožiti brzinu v_0 i vrijeme gibanja T

$$s(T) = v_0 T \tag{59}$$



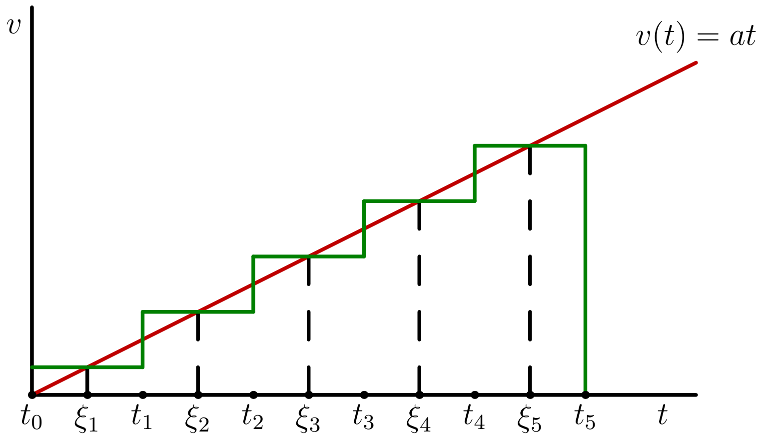
Slika 11: Ovisnost brzine o vremenu u slučaju jednolikog gibanja.

- put $s(T)$ jednak je površini ispod grafa brzine na vt dijagramu (4)
- kod složenijih primjera, kao npr. jednoliko ubrzano gibanje, problem rješavamo dijeljenjem vremenskog intervala $[0, T]$ na n podintervala točkama

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t \tag{60}$$

- dužinu pojedinog podintervala označimo s

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \tag{61}$$



Slika 12: Ovisnost brzine o vremenu u slučaju jednolikog ubrzanog gibanja.

- ako su podintervali dovoljno mali, gibanje na svakom od njih možemo aproksimirati jednolikim gibanjem
- odaberemo proizvoljnu točku ξ_i na podintervalu $[t_{i-1}, t_i]$
- brzinu na cijelom tom podintervali zamijenimo brzinom u točki ξ_i
- za svaki podinterval sada možemo izračunati prevaljeni put

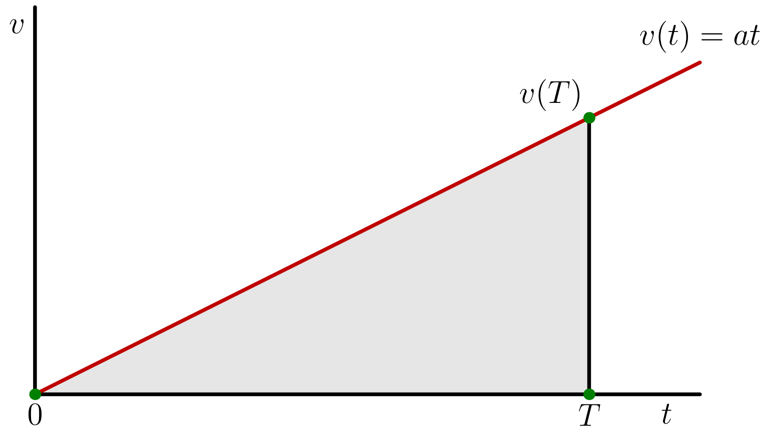
$$s_i = v(\xi_i)[t_{i-1} - t_i] \tag{62}$$

- zbrojimo doprinose svih podintervala

$$s(T) = \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)[t_{i-1} - t_i] \tag{63}$$

- opet smo došli do integralne sume
- put koji čestica prevali jednak je površini ispod krivulje $v(t)$ i za općenite slučajeve, a ne samo za jednoliko gibanje
- u općenitom slučaju moramo riješiti integral

$$s(T) - s(0) = \int_0^T v(t)dt \tag{64}$$



Slika 13: Prevaljeni put $s(T)$ jednak je površini ispod krivulje $v(t)$.

- u slučaju jednolikog ubrzanog gibanja krivulja $v(t)$ je pravac pa tražimo površinu pravokutnog trokuta s katetama T i $v(T)$

$$s(T) = \frac{1}{2}T \cdot v(T) = \frac{1}{2}aT^2 \tag{65}$$

- do istog rezultata bi došli rješavajući integral (64)

$$s(T) - s(0) = \int_0^T atdt \tag{66}$$

- akceleracija je konstantna pa je možemo izvući izvan integrala
- prema pretpostavci, u početnom trenutku čestica se nalazi u ishodištu $\Longrightarrow$ $s(0) = 0$

$$s(T) = a\int_0^T tdt = \frac{a}{2}\, t^2\Big|_0^T = \frac{a}{2}\left[T^2 - 0^2\right] = \frac{a}{2}T^2 \tag{67}$$

5 Zadaci za vježbu

Zadatak 1

Izračunajte sljedeće integrale:

- $\int_0^1 x^3 dx$
- $\int_0^1 x^n dx$

- $\int_{-1}^{1} x^3 dx$
- $\int_{-1}^{1} x^2 dx$
- $\int_{0}^{\pi} \sin x dx$
- $\int_{0}^{\pi} \cos x dx$
- $\int_{0}^{2\pi} \sin x dx$
- $\int_{0}^{2\pi} \cos x dx$

Zadatak 2

Čestica se giba po pravcu jednoliko ubrzano akceleracijom a s početnom brzinom v_0. Napišite izraz za brzinu i pomoću integrala nađite put koji čestica prijeđu u vremenskom intervali $[0, T]$.