Funkcije

September 15, 2008

1 Definicija funkcije

- promatramo realne funkcije realne varijable
- za definiciju funkcije potrebna su nam dva podskupa skupa realnih brojeva
- označimo ih s A i B
- zadati funkciju znači zadati pravilo koje svakom elementu skupa A pridružuje jedan element skupa B
- takvu funkciju obično označavamo s

$$f : A \to B, f(a) = b \tag{1}$$

- skup A zovemo područje definicije funkcije f
- da bi zadali funkcije, moramo zadati
  - skup A s kojeg preslikavamo elemente
  - skup B na koji preslikavamo elemente
  - pravilo kojim bilo kojem elementu skupa A pridružujemo element skupa B

Primjer: kvadrat realnog broja

- želimo napisati funkciju koja će svakom realnom broju pridružiti njegov kvadrat
- funkcija je definirana za svaki realni broj pa je skup s kojeg preslikavamo elemente (tj. skup A ili područje definicije) cijeli skup realnih brojeva

- kvadriranjem realnih brojeva možemo dobiti samo pozitivne brojeve i nulu pa se skup B sastoji od pozitivnih realnih brojeva i nule
- konačno, moramo formulom zapisati pravilo preslikavanja
- potrebni su nam ime argumenta i ime funkcije
- uobičajen izbor za ime argumenta je x, ali možemo odabrati i bilo koje drugo slovo (npr. s, t, u,...)
- najčešći izbor za ime funkcije je f, ali možemo koristiti i g, h,...
- ako smo imena argumenta funkcije izabrali kao x i f, pravilo preslikavanja glasi
$$f(x) = x^2, \quad x \in \mathcal{R} \tag{2}$$
- da smo za ime argumenta odbrali t, a za ime funkcije g istu funkciju bi zapisali kao
$$g(t) = t^2, \quad t \in \mathcal{R} \tag{3}$$

1.1 Prirodno područje definicije

- ako područje definicije nije navedeno, onda podrazumjevamo prirodno područje definicije tj. skup svih realnih brojeva na kojima je funkcija definirana

Primjer:

- promotrimo funkciju zadanu formulom
$$f(x) = \frac{5x}{x-2} \tag{4}$$
- odmah možemo uočiti točku $x = 2$ za koju funkcija nije definirana jer nije dozvoljeno dijeliti s nulom
- dakle, prirodno područje definicije ove funkcije je skup realnih brojeva bez broja 2
$$A = \mathcal{R}\ \{2\} \tag{5}$$

Primjer:

- promotrimo funkciju zadanu formulom
$$f(x) = \sqrt{x-3} \tag{6}$$

- funkcija nije definirana ako je $x-3 < 0$ jer korijen negativnog broja ne pripada skupu realnih, nego kompleksnih brojeva
- prirodno područje definicije ove funkcije je skup

$$A = \{x \in \mathcal{R}; \quad x \geq 3\} \tag{7}$$

1.2 Jednakost funkcija

- da bi dvije funkcije
$$f : A \to B \quad \text{i} \quad g : C \to D \tag{8}$$
bile jednake moraju biti ispunjena tri uvjeta
  - područja definicija moraju biti jednaka: $A = C$
  - skupovi na koje preslikavamo elemente moraju biti jednaki: $B = D$
  - vrijednosti funkcije moraju biti jednake za svaki argument x iz područja definicije funkcije
$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in A = C \tag{9}$$

Primjer:

- promotrimo funkcije

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{i} g(x) = x + 2 \tag{10}$$

- funkciju f možemo napisati u obliku

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \tag{11}$$

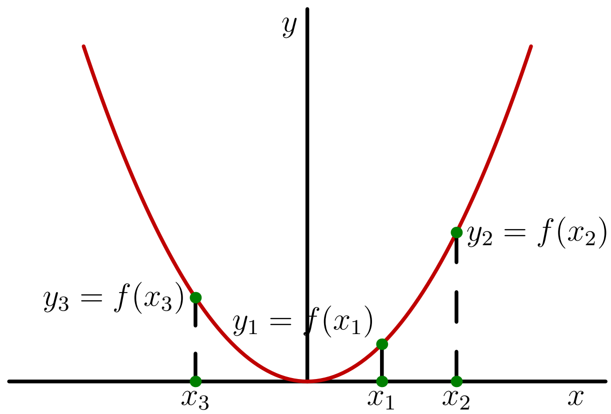
- funkcije f i g očito imaju iste vrijednosti, osim u slučaju $x = 2$ jer u toj točki funkcija f nije definirana
- područja definicije ove dvije funkcije nisu jednaka, pa ni same funkcije nisu jednake
$$f \neq g \tag{12}$$

1.3 Graf funkcije

- grafom funkcije f zovemo skup točaka u ravnini za koje vrijedi

$$G = \{(x, y) : \ y = f(x)\} \tag{13}$$

Primjer: graf funkcije $f(x) = x^2$

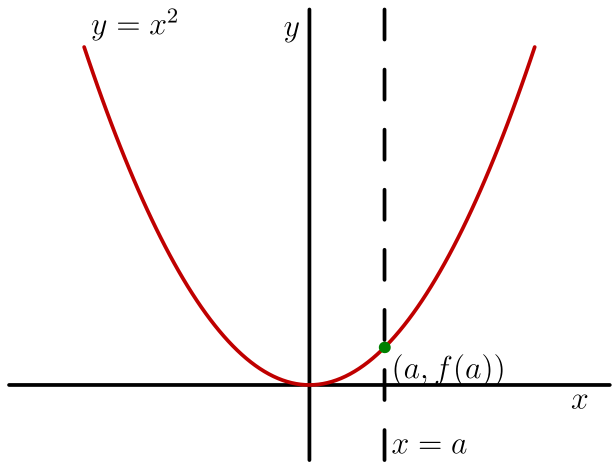


Slika 1: Graf funkcije $f(x) = x^2$.

- da bi neki skup točaka u ravnini bio graf funkcije, svakoj vrijednosti x mora pripadati najviše jedna vrijednost y
- to znači da pravac $x = a$ koji siječe skup točaka, to čini u točno jednoj točki

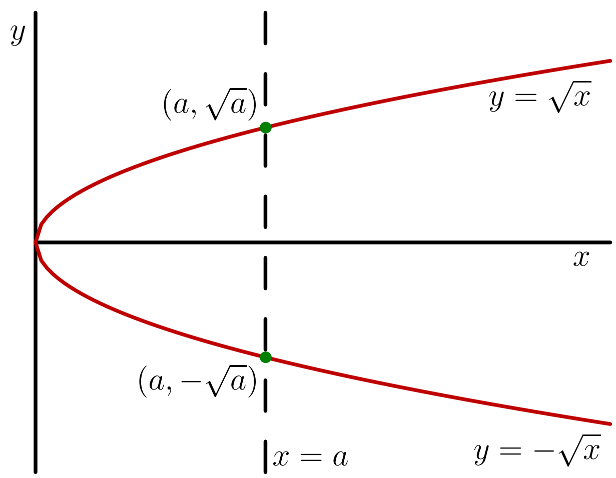
$$T = (a, f(a)) \tag{14}$$

- skup točaka na slici je graf funkcije jer svaki pravac $x = a$ siječe skup u točno jednoj točki



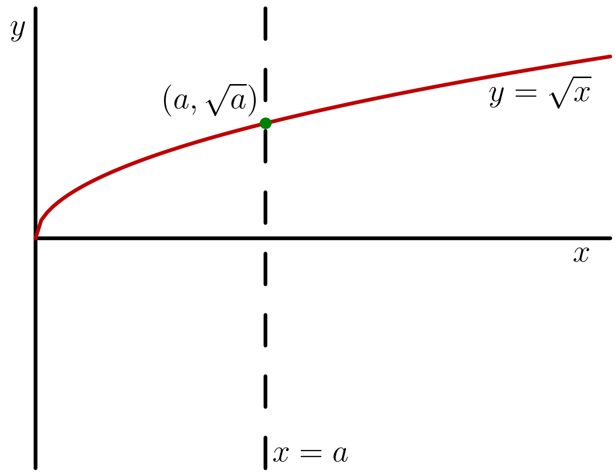
Slika 2: Skup točaka $\{(x, x^2)\}$ predstavlja graf funkcije $f(x) = x^2$.

- sljedeći skup točaka nije graf funkcije jer pravac $x = a$, $a > 0$ siječe skup u dvije točke



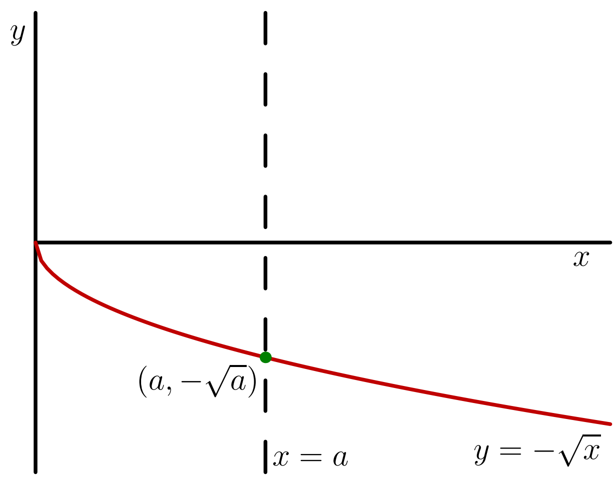
Slika 3: Skup točaka $\{(x, \pm\sqrt{x})\}$.

- ako u prethodnom slučaju skup ograničimo samo na pozitivne vrijednosti $y = \sqrt{x}$ dolazimo do grafa funkcije $f(x) = +\sqrt{x}$



Slika 4: Skup točaka $\{(x, +\sqrt{x})\}$.

- ako skup ograničimo samo na negativne vrijednosti $y = -\sqrt{x}$ dolazimo do grafa funkcije $f(x) = -\sqrt{x}$



Slika 5: Skup točaka $\{(x, -\sqrt{x})\}$.

1.4 Monotone funkcije

- neka je zadana funkcija $f : A \to \mathcal{R}$, $\quad A \subseteq \mathcal{R}$ i interval $[a, b]$
- za funkciju f kažemo da monotono raste na intervalu $[a, b]$ ako vrijedi

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \le f(x_2) \tag{15}$$

- za funkciju f kažemo da monotono pada na intervalu $[a, b]$ ako vrijedi

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \tag{16}$$

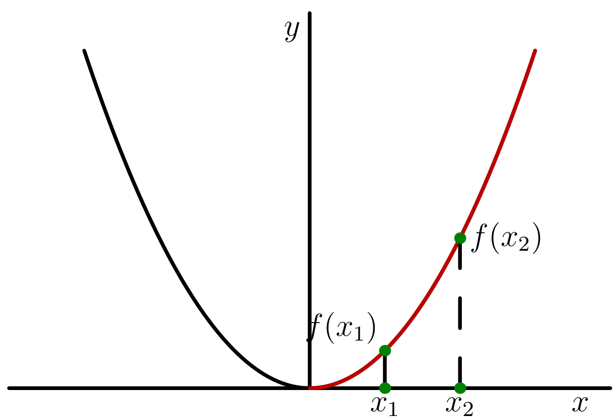
- za funkciju f kažemo da strogo raste na intervalu $[a, b]$ ako vrijedi

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \tag{17}$$

- za funkciju f kažemo da strogo pada na intervalu $[a, b]$ ako vrijedi

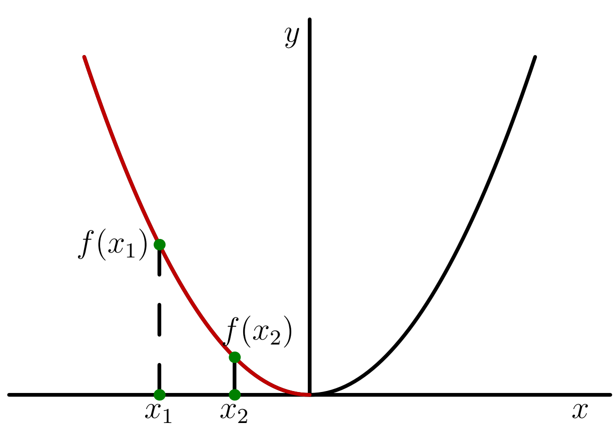
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2) \tag{18}$$

Primjer: funkcija $f(x) = x^2$ strogo raste na intervalu $[0, \infty\rangle$



Slika 6: Funkcija $f(x) = x^2$ strogo raste na intervalu $[0, \infty\rangle$.

Primjer: funkcija $f(x) = x^2$ strogo pada na intervalu $\langle -\infty, 0]$



Slika 7: Funkcija $f(x) = x^2$ strogo pada na intervalu $\langle -\infty, 0]$.

Primjedbe:

- interval $[a, b]$ uključuje oba kraja a i b (dvije uglate zagrade)
- interval $[a, b\rangle$ uključuje samo točku a, ali ne i točku b (jedna uglata zagrada)
- interval $\langle a, b]$ uključuje samo točku b, ali ne i točku a (jedna uglata zagrada)
- interval $\langle a, b\rangle$ ne uključuje ni točku a, ni točku b

1.5 Parne i neparne funkcija

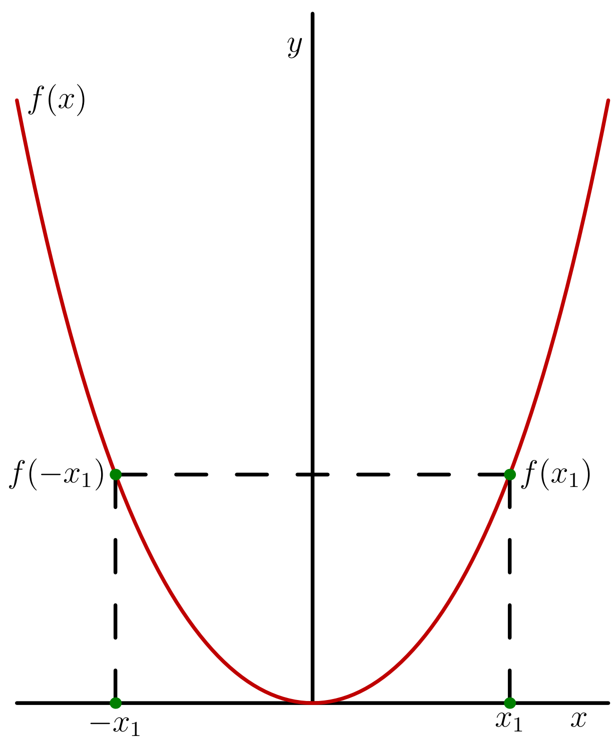
- neka je funkcija f zadana na simetričnom skupu $D \subseteq \mathcal{R}$
- za simetrični skup vrijedi

$$x \in D \Longrightarrow -x \in D \tag{19}$$

- funkcija f je parna ako vrijedi

$$f(-x) = f(x) \tag{20}$$

- graf parne funkcije je simetričan u odnosi na os y

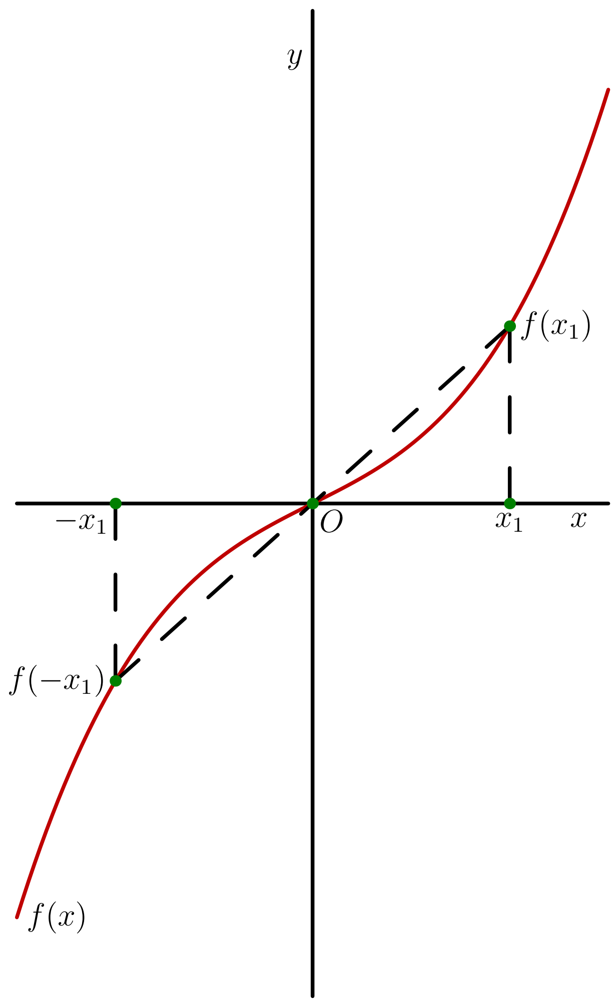


Slika 8: Graf parne funkcije simetričan je u odnosu na os y.

- funkcija f je neparna ako vrijedi

$$f(-x) = -f(x) \tag{21}$$

- graf neparne funkcije je simetričan u odnosu na ishodište



Slika 9: Graf neparne funkcije simetričan je u odnosu na ishodište.

2 Operacije s funkcijama

2.1 Algebarske operacije

- pretpostavimo da funkcije f i g preslikavaju podskup skupa realnih brojeva A na skup realnih brojeva $\mathcal{R}$

- definiramo sljedeće funkcije
  - zbroj funkcija f i g: $f+g$
  - razliku funkcija f i g: $f-g$
  - umnožak realnog broja c i funkcije f: cf
  - umnožak funkcija: $f \cdot g$
  - kvocijent funkcija: $\dfrac{f}{g}$
- područje definicije svih tih funkcija jednak je području definicije funkcija f i g (dakle skup A), osim u slučaju kvocijenta funkcija
- tada iz područja definicije moramo isključiti nultočke funkcije g jer ne smijemo dijeliti s nulom
- algebarskim operacijama djelujemo na vrijednosti funkcija
  - zbroj funkcija: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
  - razlika funkcija: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
  - umnožak realnog broja c i funkcije f: $(cf)(x) = c \cdot f(x)$
  - umnožak funkcija: $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$
  - kvocijent funkcija: $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Primjer: zbrajanje, oduzimanjem množenje i dijeljenje funkcija

- neka su zadane funkcije

$$f(x) = x^2 \quad \text{i} \quad g(x) = \frac{\sin x}{1+x^2} \tag{22}$$

- funkcije zbrajamo tako da zbrojimo vrijednosti funkcija

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + \frac{\sin x}{1+x^2} \tag{23}$$

- funkcije oduzimamo tako da oduzmemo vrijednosti funkcija

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - \frac{\sin x}{1+x^2} \tag{24}$$

- funkcije množimo tako da pomnožimo vrijednosti argumenata

$$(f \cdot g) = f(x)g(x) = \frac{x^2 \sin x}{1 + x^2} \tag{25}$$

- funkcije dijelimo tako da podijelimo vrijednosti argumenata pritom pazeći da iz područja definicije konačne funkcije izbacimo nultočke nazivnika

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2(1 + x^2)}{\sin x}\ , quad x \neq k\pi, k \in \mathcal{Z} \tag{26}$$

- nultočke funkcije $\sin x$ koje moramo eliminirati iz područja definicije funkcije $(f/g)(x)$

$$x_0 = k\pi\ , k \in \mathcal{Z} \tag{27}$$

<u>Primjer</u>: množenje funkcije realnim brojem

- neka je zadana funkcija $f(x) = \sin x$ i realni broj $c = 3$
- funkciju množimo realnim brojem tako da njezinu vrijednost pomnožimo tim brojem

$$(cf)(x) = cf(x) = 3 \sin x \tag{28}$$

2.2 Kompozicija funkcija

- zadane su dvije funkcije

$$f :\ A \rightarrow \mathcal{R} \quad \text{i} \quad g :\ B \rightarrow \mathcal{R} \tag{29}$$

- područja definicije obje funkcije su podskupovi skupa realnih brojeva

$$A,\ B \subseteq \mathcal{R} \tag{30}$$

- da bi objasnili što je kompozicija funkcija, trebamo uvesti pojam slike funkcije
- slika funkcije f je skup

$$f(A) = \{y \in \mathcal{R} :\ y = f(x) \text{ za neki } x \in A\} \tag{31}$$

- pretpostavimo da je slika funkcije f podskup skupa B

$$f(A) \subseteq B \tag{32}$$

- definiramo funkciju $h: \ A \to \mathcal{R}$ koja djeluje na element $x \in A$ na sljedeći način

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \tag{33}$$

- funkciju $h = f \circ g$ zovemo kompozicija funkcije f i g

Primjer

- neka su zadane funkcije

$$f(x) = x^2 \quad \text{i} \quad g(x) = \sin x \tag{34}$$

- želimo naći kompoziciju funkcija $g \circ f$
- funkcija f preslika broj x u broj x^2
- zatim funkcija g preslik broj x^2 u broj $\sin x^2$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sin x^2 \tag{35}$$

2.3 Inverzna funkcija

- da bi postojala inverzna funkcija od funkcije $f: \ A \to B$ nužne su dvije pretpostavke
  - funkcije f preslikava različite elemente skupa A u različite elemente skupa B
  - svaki element skupa B je slika nekog elementa skupa A
- u tom slučaju možemo definirati funkciju $g: \ B \to A$ tako da vrijedi

$$f(g(y)) = y \quad \forall y \in B \tag{36}$$

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in A \tag{37}$$

- ako za funkciju f postoji takva funkcija g, tada je njihova kompozicija identitet tj. funkcija koja preslikava svaki element u samog sebe

$$(f \circ g) = \mathbf{1}_B \quad \text{i} \quad (g \circ f) = \mathbf{1}_A \tag{38}$$

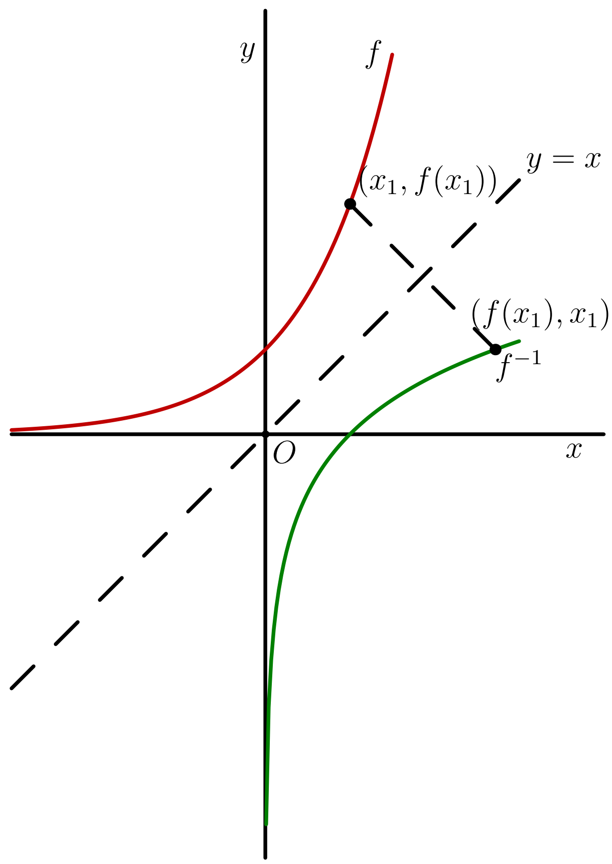
- zato funkciju g zovemo inverzna funkcija i koristimo oznaku f^{-1}

$$(f \circ f^{-1}) = \mathbf{1}_B \quad \text{i} \quad (f^{-1} \circ f) = \mathbf{1}_A \tag{39}$$

- graf inverzne funkcije f^{-1} je zrcalna slika grafa funkcije f u odnosu na pravac $y = x$
- ako je točka (x, y) element grafa funkcije $f(x)$

$$y = f(x) \Longrightarrow x = f^{-1}(y) \; , \tag{40}$$

pa je točka (y, x) element grafa funkcije f^{-1}



Slika 10: Graf funkcije f i pripadne inverzne funkcije f^{-1}

Primjer: inverz funkcije $f(x) = 2x - 1$

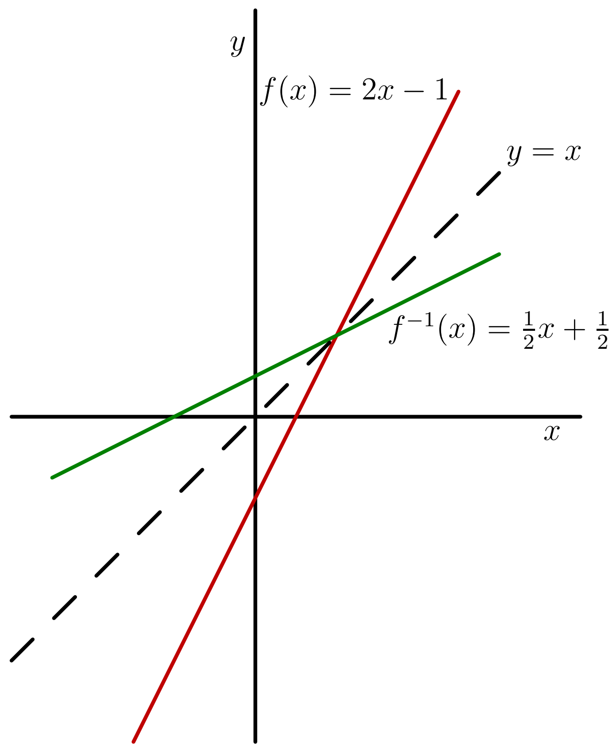
- područje definicije ove funkcije je cijeli skup realnih brojeva
- slika funkcije je također cijeli skup realnih brojeva
- za ovu funkciju je ispunjena i druga pretpostavka postojanja inverzne funkcije

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \tag{41}$$

- sve pretpostavke postojanja inverzne funkcije su ispunjene

$$f(x) = 2x - 1 \Longrightarrow y = 2x - 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \tag{42}$$

$$\Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \tag{43}$$



Slika 11: Graf funkcije $f(x) = 2x - 1$ i pripadne inverzne funkcije $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Primjer: inverz funkcije $f(x) = x^2$

- područje definicije ove funkcije je cijeli skup realnih brojeva
- slika funkcije je podskup skupa realnih brojeva

$$f(\mathcal{R}) = \{x \in \mathcal{R} : x \geq 0\} \tag{44}$$

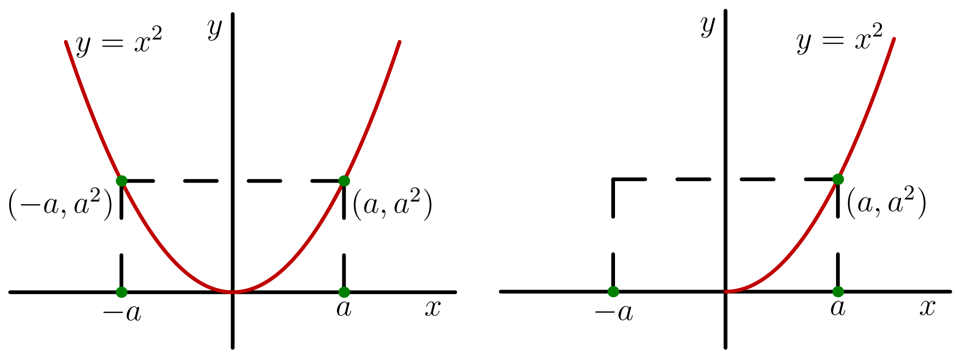
koji sadrži samo pozitivne realne brojeve i nulu

- svaki element slike funkcije $f(\mathcal{R})$ je slika nekog elementa područja definicije $\mathcal{R}$

- druga pretpostavka postojanja inverzne funkcije nije ispunjena jer se različiti elementi područja definicije mogu preslikati u isti element slike funkcije, npr. $f(-3) = f(3)$
- ovako definirana funkcija $f(x) = x^2$ nema inverznu funkciju
- ograničimo sada područje definicije na realne brojeve $x \geq 0$

$$f: \{x \in \mathcal{R} : x \geq 0\} \to \{x \in \mathcal{R} : x \geq 0\} \tag{45}$$

- ograničavanjem područja definicije, uklonili smo problem



Slika 12: Graf funkcije $f(x) = x^2$ s cijelim skupom realnih brojeva kao područjem definicije (lijevo) i sa ograničenim područjem definicije $\{x \in \mathcal{R}\ , x \geq 0\}$ (desno).

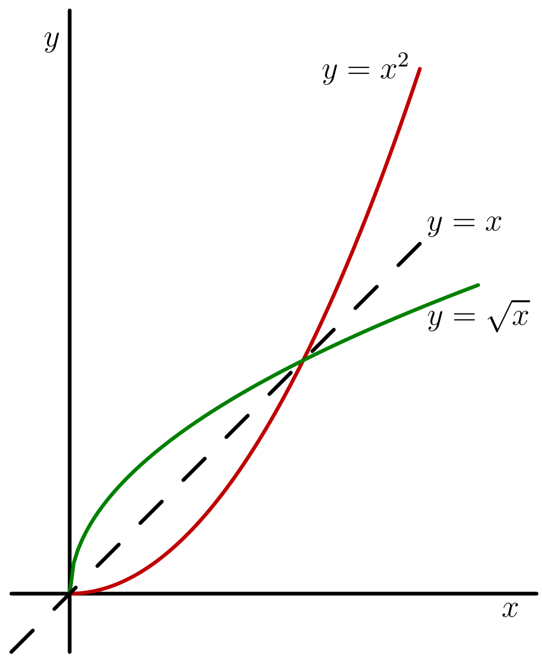
- za funkciju

$$f: \{x \in \mathcal{R} : x \geq 0\} \to \{x \in \mathcal{R} : x \geq 0\}\ , \quad f(x) = x^2 \tag{46}$$

  bez problema možemo naći inverz

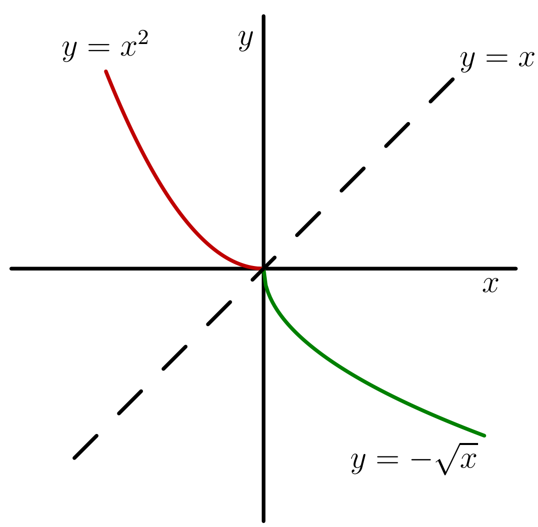
$$y = x^2 \Longrightarrow x = +\sqrt{y} \tag{47}$$

- izabrali smo pozitivan predznak jer smo područje definicije ograničili na $x \geq 0$



Slika 13: Funkcija $f(x) = x^2$ s područjem definicije $\{\mathcal{R} : x \geq 0\}$ i njezina inverzna funkcija $f^{-1} = \sqrt{x}$

- da smo napravili ograničenje $x \leq 0$ izabrali bi negativan predznak



Slika 14: Funkcija $f(x) = x^2$ s područjem definicije $\{\mathcal{R} : x \leq 0\}$ i njezina inverzna funkcija $f^{-1} = -\sqrt{x}$

3 Elementarne funkcije

- u primjenama matematičke analize često susrećemo pojam elementarnih funkcija
- osnovne elementarne funkcije obuhvaćaju
  - polinomi
  - racionalne funkcije
  - eksponencijalne funkcije
  - logaritamske funkcije
  - opća potencija
  - trigonometrijske funkcije
  - ciklometrijske funkcije
- sve složene elementarne funkcije možemo dobiti iz osnovnih elementarnih funkcija primjenom konačnog broja aritmetičkih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje) i konačnog broja kompozicija funkcija

Primjer:

- trigonometrijske funkcije i polinomi su osnovne elementarne funkcije

$$f(x) = \sin x \quad \text{i} \quad g(x) = x^2 + 2x - 7 \tag{48}$$

- kompozicija $g \circ f$ je složena elementarna funkcija

$$g(f(x)) = (\sin x)^2 + 2(\sin x) - 7 = \sin^2 x + 2\sin x - 7 \tag{49}$$

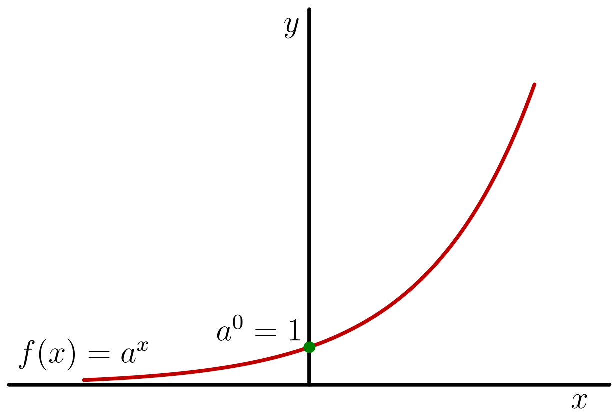
3.1 Eksponencijalne funkcije

- eksponencijalnu funkciju s bazom a zapisujemo na sljedeći način

$$f(x) = a^x \quad (a > 0) \tag{50}$$

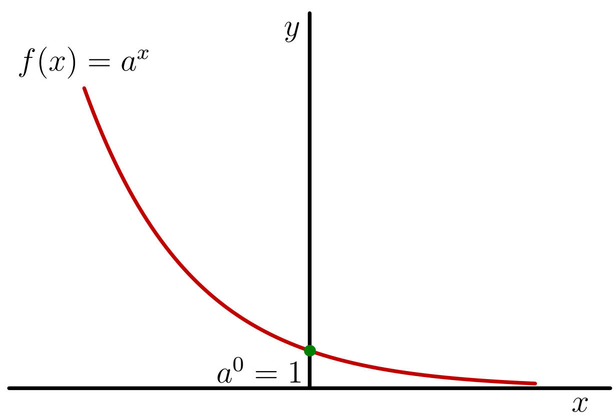
- navedimo neka svojstva eksponencijalnih funkcija
  - područje definicije eksponencijalne funkcije je cijeli skup realnih brojeva
  - eksponencijalna funkcija poprima samo pozitivne vrijednosti
  - $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$

- $a^{x_1-x_2} = a^{x_1}/a^{x_2}$
- $a^0 = 1$
- $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$
- ako je $a > 1$ funkcija a^x je strogo rastuća



Slika 15: Primjer rastuće eksponencijalne funkcije (a=2).

- ako je $a < 1$ funkcija a^x je strogo padajuća



Slika 16: Primjer padajuće eksponencijalne funkcije (a=1/2).

- slučaj $1^x = 1$ ne smatramo eksponencijalnom funkcijom

3.2 Logaritamska funkcija

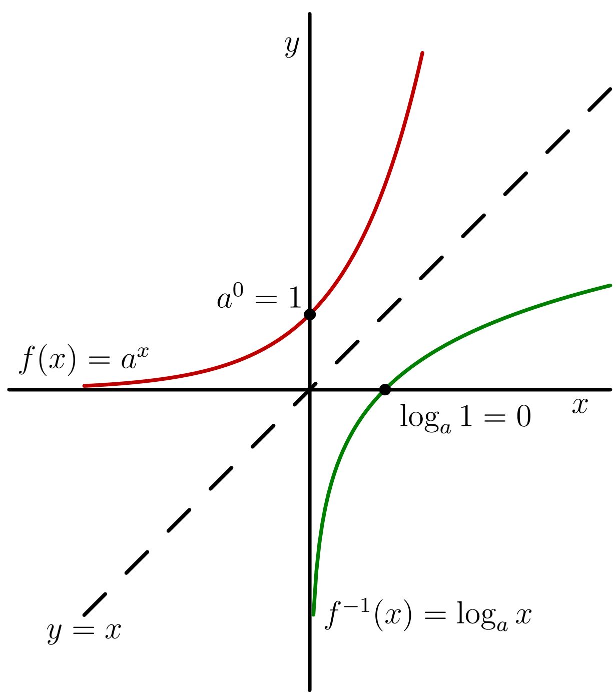
- eksponencijalna funkcija $f(x) = a^x$ zadovoljava uvjete postojanja inverzne funkcije

  – za svaki pozitivni broj y možemo naći realni broj x tako da vrijedi $y = a^x$
  – ako je $x_1 \neq x_2$ tada je $a^{x_1} \neq a^{x_2}$ (pravac $x = a$ siječe graf eksponencijalne funkcije u samo jednoj točki)

- inverznu funkciju eksponencijalne funkcije zovemo logaritamska funkcija

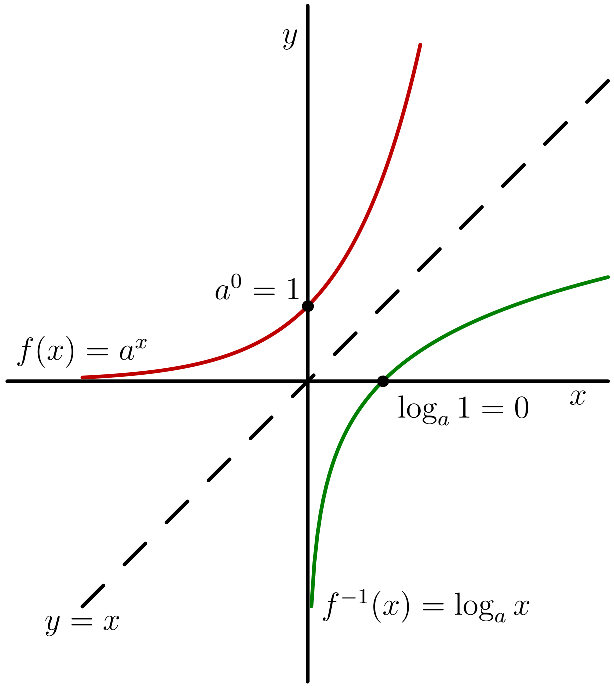
$$y = a^x \Longrightarrow x = \log_a y \tag{51}$$

- područje definicije logaritamske funkcije je skup pozitivnih realnih brojeva (bez nule)
- logaritamska funkcija poprima vrijednosti na cijelom skupu realnih brojeva
- graf logaritamske funkcije dobijemo zrcaljenjem grafa eksponencijalne funkcije s obzirom na pravac $y = x$
- logaritamska funkcije strogo raste ako je $a > 1$



Slika 17: Strogo rastuća logaritamska funkcija.

- logaritamska funkcija strogo pada ako je $0 < a < 1$



Slika 18: Strogo padajuća logaritamska funkcija.

- uz pretpostavku $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$ vrijedi

$$\log_a x_1 \cdot x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2 \tag{52}$$

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2 \tag{53}$$

$$\log_a 1 = 0 \tag{54}$$

- možemo izvesti i vezu izmđu logaritama s različitim bazama
- pretpostavimo da vrijedi

$$a^{x_1} = y \Longrightarrow x_1 = \log_a y \tag{55}$$

$$b^{x_2} = y \Longrightarrow x_2 = \log_b y \tag{56}$$

- eksponencijalna i logaritamska funkcija su inverzne

$$b^{\log_b a} = a \Longrightarrow a^x = \left(b^{\log_b a}\right)^x = b^{x \log_b a} \Longrightarrow \log_b a^x = x \log_b a \tag{57}$$

- iskoristimo jedn. (55)

$$\log_b a^{x_1} = x_1 \log_b a \Longrightarrow \log_b y = x_1 \log_b a \tag{58}$$

- sada iskoristimo jedn. (56)

$$\log_b y = x_2 \Longrightarrow x_2 = x_1 \log_b a \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{\log_b a} x_2 \tag{59}$$

- opet koristimo jedn. (55) i (56)

$$\log_a y = \frac{1}{\log_b a} \log_b y \tag{60}$$

Primjer: veza prirodnih i dekadsih logaritama

- prirodni logaritam kao bazu ima iracionalni broj e

$$e = 2.7182818\ldots \tag{61}$$

- za prirodni logaritam koristimo i posebnu oznaku

$$\log_e x \equiv \ln x \tag{62}$$

- dekadski logaritam kao bazu ima broj 10
- za dekadski logaritam koristimo oznaku bez baze

$$\log_{10} x \equiv \log x \tag{63}$$

- veza dekadskog i prirodnog logaritma

$$\log x = \frac{1}{\ln 10} \ln x \tag{64}$$

4 Zadaci za vježbu

Zadatak 1

Izračunajte $g \circ f$ i $f \circ g$ ako je $f(x) = x^2$ i $g(x) = \sin x$.

Zadatak 2

Izračunajte $g \circ f$ i $f \circ g$ ako je $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ i $g(x) = x^2 + 2x + 1$.

Zadatak 3

Izračunajte $g \circ f$ i $f \circ g$ ako je $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = \sin x$.

Zadatak 4

Nađite inverznu funkciju funkcije $f(x) = \sqrt{x} + 1$.

Zadatak 5

Nađite inverznu funkciju funkcije $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

Zadatak 6

Nađite inverznu funkciju funkcije $f(x) = \sqrt{x-2}$.

Zadatak 7

Pokažite da je zbroj dviju parnih funkcija parna funkcija.

Zadatak 8

Pokažite da je produkt parne i neparne funkcije neparna funkcija.

Zadatak 9

Pokažite da je produkt dviju parnih funkcija parna funkcija.

Zadatak 10

Pokažite da je produkt dviju neparnih funkcija parna funkcija.

Zadatak 11

Izvedite sljedeće relacije

$$\log_a x^n = n \log_a x \quad \text{i} \quad \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$