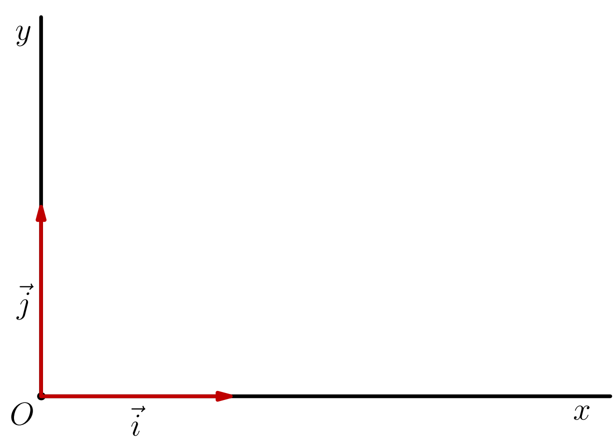
Analitička geometrija u ravnini

September 5, 2008

1 Vektori u koordinatnom sustavu

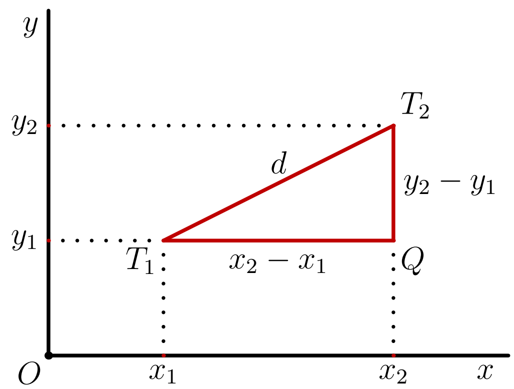
1.1 Udaljenost točaka u koordinatnom sustavu

- pravokutni koordinatni sustav potpuno je određen
  - ishodištem O
  - jediničnim vektorima $\vec{i}$ i $\vec{j}$



Slika 1: Pravokutni koordinatni sustav u ravnini.

- promotrimo dvije točke u ravnini: $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$



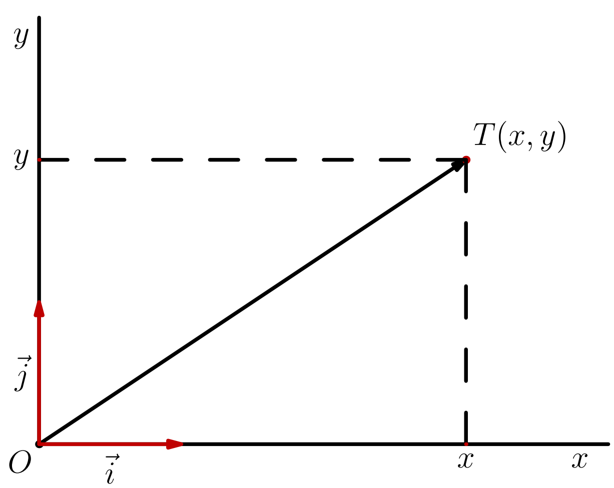
Slika 2: Udaljenost točaka T_1 i T_2 u ravnini.

- udaljenost d između točaka T_1 i T_2 možemo izračunati pomoću Pitagorinog teorema

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \Longrightarrow d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1}$$

1.2 Koordinate i duljine vektora u koordinatnom sustavu

- promatramo točku u ravnini $T(x, y)$

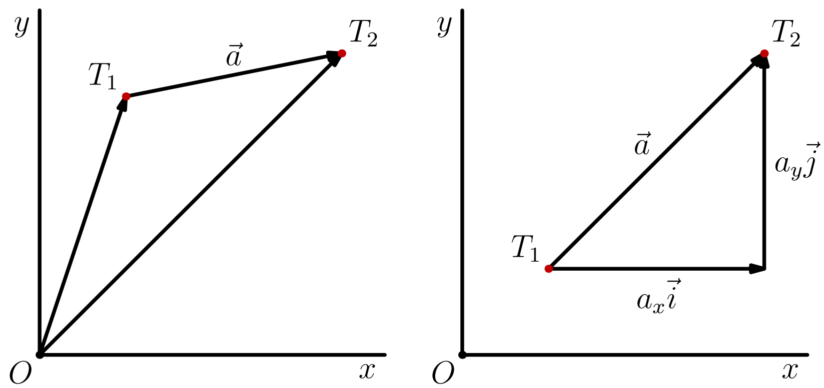


Slika 3: Vektor s hvatištem u ishodištu i krajem u točki O.

- povučemo vektor od ishodišta do točke T

$$\overrightarrow{OT} = x\vec{i} + y\vec{j} \tag{2}$$

- nešto složeniji problem dobijemo ako tražimo koordinate vektora između dvije proizvoljne točke u ravnini
- označimo s $\vec{a}$ vektor koji ima početak u točki $T_1(x_1, y_1)$ i kraj u točki $T_2(x_2, y_2)$



Slika 4: Vektor s hvatištem u točki T_1 i krajem u točki T_2.

- iz sl. 4 slijedi

$$\overrightarrow{OT_2} = \overrightarrow{OT_1} + \vec{a} \Longrightarrow \vec{a} = \overrightarrow{OT_2} - \overrightarrow{OT_1} \tag{3}$$

- u jedn. (3) uvrstimo poznate izraze

$$\overrightarrow{OT_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{OT_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} \tag{4}$$

$$\vec{a} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} - \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}\right) = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} \tag{5}$$

- vektor $\vec{a}$ također možemo rastaviti na komponente

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} \tag{6}$$

- izraze uz $\vec{i}$ i $\vec{j}$ možemo izjednačiti jer su vektori $\vec{i}$ i $\vec{j}$ linearno nezavisni

$$\Longrightarrow a_x = x_2 - x_1 \quad \text{i} \quad a_y = y_2 - y_1 \tag{7}$$

- komponentu a_x dobijemo tako da od x koordinate krajnje točke vektora oduzmemo x koordinatu njegove početne točke
- komponentu a_y dobijemo tako da od y koordinate krajnje točke vektora oduzmemo y koordinatu njegove početne točke
- vektor $\vec{a}$ možemo napisati u obliku

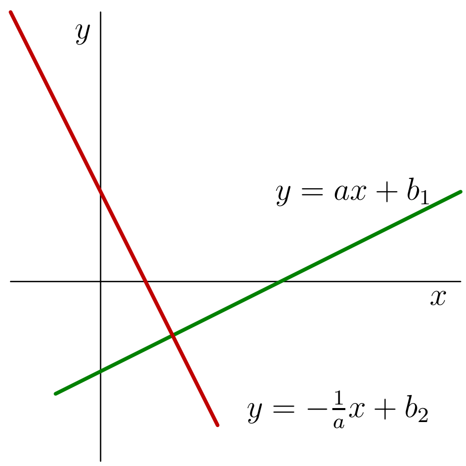
$$\vec{a} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} \tag{8}$$

- duljina vektora $\vec{a}$ jednaka je udaljenosti točaka T_1 i T_2

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{9}$$

1.3 Okomitost vektora

- želimo izvesti uvjet okomitosti vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$



Slika 5: Okomiti vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

- vektor $\vec{c}$ jednak je razlici vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \tag{10}$$

- ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ okomiti, vrijedi Pitagorin poučak

$$\vec{c}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 \tag{11}$$

- komponente vektora $\vec{c}$

$$c_x = a_x - b_x \quad \text{i} \quad c_y = a_y - b_y \tag{12}$$

- uvrstimo komponente vektora $\vec{c}$ u jednadžbu (11)

$$c_x^2 + c_y^2 = (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 = a_x^2 + b_x^2 - 2a_xb_x + a_y^2 + b_y^2 - 2a_yb_y \tag{13}$$

- sada možemo izvesti uvjet okomitosti vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$a_x^2 + b_x^2 - 2a_xb_x + a_y^2 + b_y^2 - 2a_yb_y = a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2 \tag{14}$$

$$\Longrightarrow a_xb_x + a_yb_y = 0 \tag{15}$$

- u općenitom slučaju vektora u prostoru uvjet okomitosti glasi

$$\Longrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \tag{16}$$

- uvjet (16) ekvivalentan je uvjetu

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \tag{17}$$

2 Jednadžba pravca

2.1 Eksplicitni oblik jednadžbe pravca

- graf polinoma prvog stupnja

$$f(x) = ax + b \tag{18}$$

  predstavlja pravac u ravnini

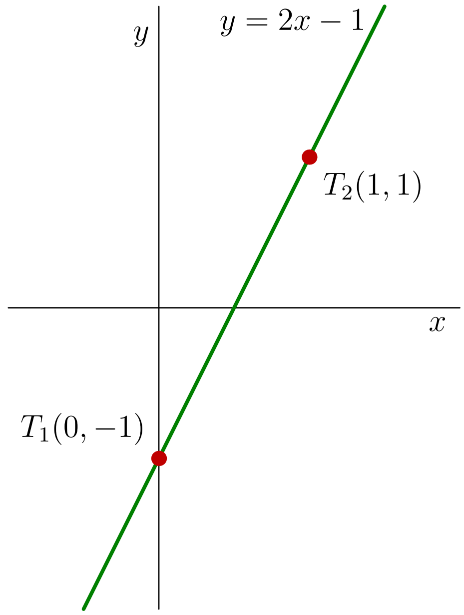
- da bi konstruirali graf funkcije (18) dovoljno je nacrtati dvije točke s koordinatama $T(x, f(x))$ i provući pravac kroz njih

Primjer: $f(x) = 2x - 1$

- potrebne su nam dvije točke za konstrukciju grafa: $T_1(x_1, f(x_1))$ i $T_2(x_2, f(x_2))$
- npr., možemo izabrati $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$

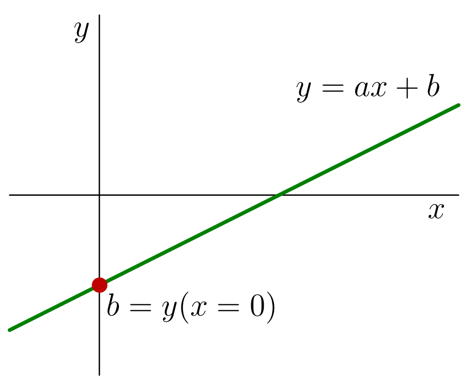
$$\Longrightarrow T_1(0, -1) \quad \text{i} \quad T_2(1, 1) \tag{19}$$

- kroz točke povučemo pravac



Slika 6: Konstrukcija pravca.

- jednadžbu
$$y(x) = ax + b \tag{20}$$
obično zovemo eksplicitni oblik jednadžbe pravca p
- parametar a zovemo koeficijent smjera pravca p
- koeficijent b odgovara odsječku pravca p na osi y
$$y(x = 0) = a \cdot 0 + b = b \tag{21}$$



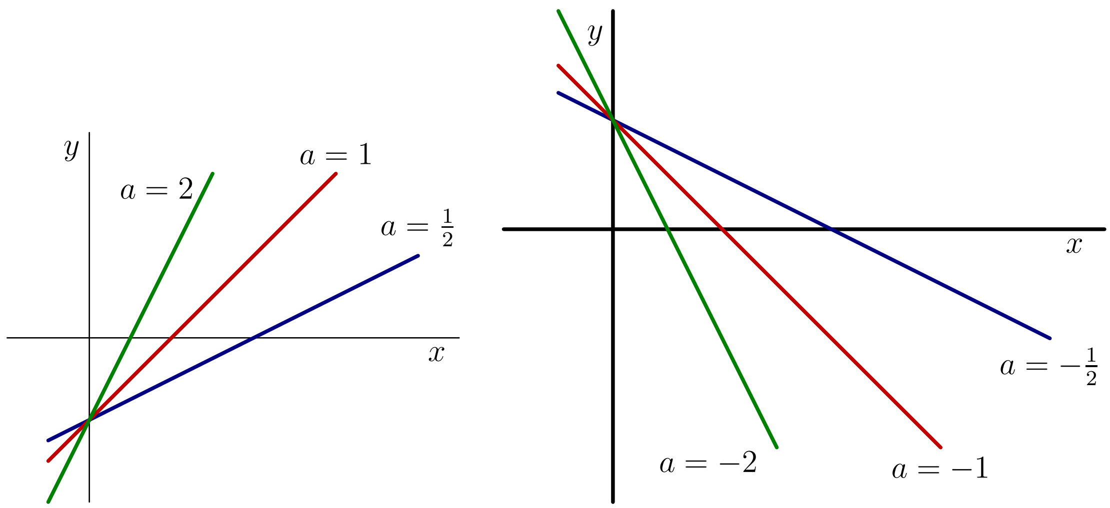
Slika 7: Odsječak pravca na osi y.

- koeficijent smjera mjeri nagib pravca
- ako je koeficijent smjera pozitivan funkcija $f(x) = ax + b$ je strogo rastuća

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \tag{22}$$

- ako je koeficijent smjera negativan funkcija $f(x) = ax + b$ je strogo padajuća

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2) \tag{23}$$



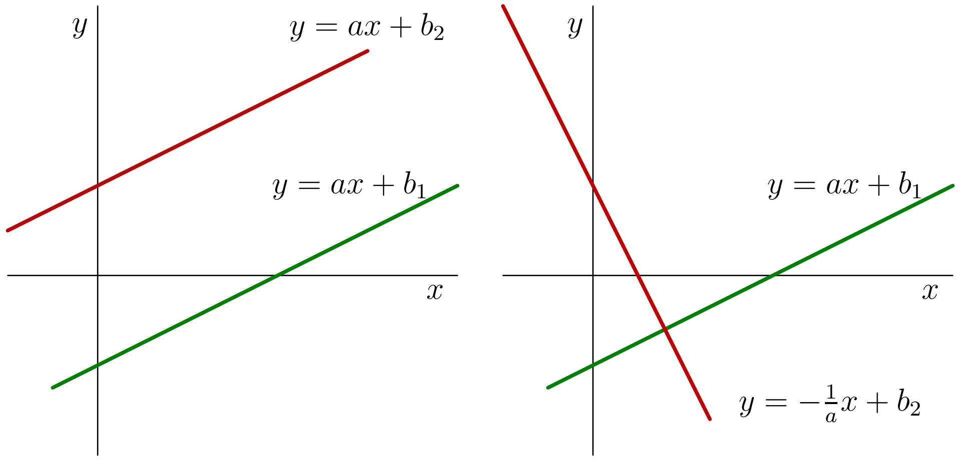
Slika 8: Primjeri pravaca s različitim koeficijentima smjera.

- što je apsolutna vrijednost koeficijenta smjera veća, pravac brže raste ili pada
- pravci $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ su paralelni ako su ima koeficijenti smjera jednaki tj. ako vrijedi

$$a_2 = a_1 \tag{24}$$

- pravci $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ su okomiti ako vrijedi

$$a_2 = -\frac{1}{a_1} \tag{25}$$



Slika 9: Primjer paralelnih i okomitih pravaca.

2.2 Implicitni oblik jednadžbe pravca

- prvo ćemo izvesti jednadžbu pravca za koji je zadan koeficijent smjera i jedna točka kroz koju pravac prolazi
- označimo zadanu točku s $T_1(x_1, y_1)$
- pravac prolazi kroz točku T_1 pa sigurno vrijedi

$$y_1 = ax_1 + b \Longrightarrow b = y_1 - ax_1 \tag{26}$$

- parametar b uvrstimo u jedn. 20 i dolazimo do jednadžbe pravca s koeficijentom smjera a koji prolazi kroz točku $T_1(x_1, y_1)$

$$y = ax + b \Longrightarrow y = ax + y_1 - ax_1 \Longrightarrow y - y_1 = a(x - x_1) \tag{27}$$

- u sljedećem koraku izvodimo jednadžbu pravca ako su nam zadane dvije točke kroz koje pravac prolazi $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$
- pravac prolazi kroz točke T_1 i T_2 pa sigurno vrijedi

$$y_1 = ax_1 + b \tag{28}$$

$$y_2 = ax_2 + b \tag{29}$$

- iz jedn. (28) izrazimo odsječak b

$$b = y_1 - ax_1, \tag{30}$$

i uvrstimo ga u jedn. (29)

$$y_2 = ax_2 + y_1 - ax_1 \Longrightarrow a(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 \tag{31}$$

- pod uvjetom da vrijedi $x_1 \neq x_2$ možemo napisati

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{32}$$

- jednadžba pravca koji prolazi kroz točke $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$ glasi

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \tag{33}$$

3 Krivulje drugog reda

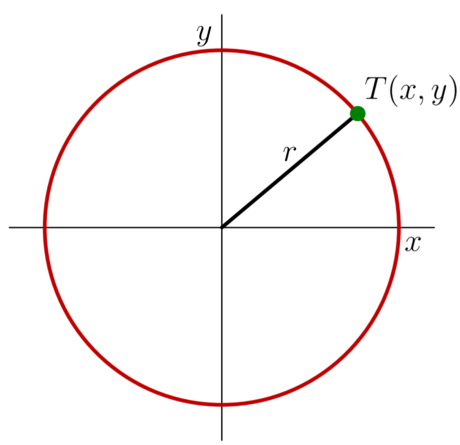
3.1 Kružnica

- pretpostavimo da u ravnini leži točka C i da je zadan realni broj r
- skup svih točaka u rvnini koje su od točke C udaljene za r zovemo kružnica radijusa r
- točka C je središte kružnice
- u najjednostavnijem slučaju kružnica ima središte u ishodištu
- udaljenost točke $T(x, y)$ od ishodišta O

$$d(T, O) = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{34}$$

- jednadžba kružnice radijusa r sa središtem u ishodištu glasi

$$d(T, O) = r \Longrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = r \Longrightarrow x^2 + y^2 = r^2 \tag{35}$$



Slika 10: Kružnica radijusa r sa središtem u ishodištu

3.2 Elipsa

3.2.1 Definicija elipse

- pretpostavimo da u ravnini leže dvije točke F_1 i F_2 udaljene za

$$d(F_1, F_2) \equiv 2c \tag{36}$$

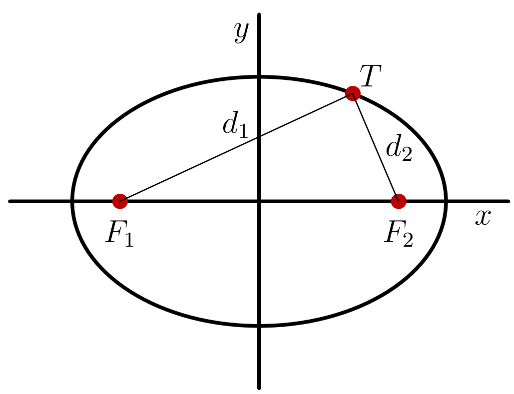
- neka je a realan broj za koji vrijedi

$$a > \frac{1}{2} d(F_1, F_2) \Longrightarrow a > c \tag{37}$$

- skup svih točaka ravnine za koje zbroj udaljenosti od točaka F_1 i F_2 iznosi $2a$

$$d(F_1, T) + d(F_2, T) \equiv d_1 + d_2 = 2a, \tag{38}$$

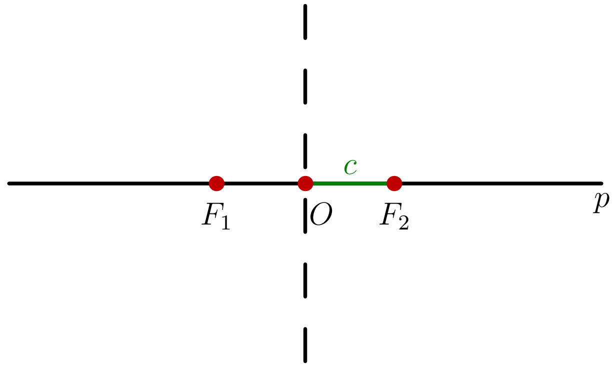
  zovemo elipsa



Slika 11: Primjer elipse

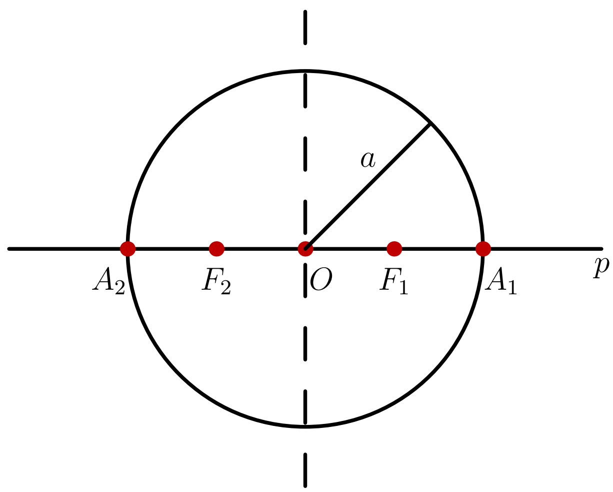
3.2.2 Konstrukcija elipse

- želimo konstruirati elipsu kojoj su zadani fokusi, kao i zbroj udaljenosti točke elipse od fokusa
- nacrtamo točke F_1 i F_2 u ravnini, pravac p koji prolazi kroz njih i točku O koja se nalazi na polovištu dužine $\overline{F_1 F_1}$
- udaljenost točaka F_1 i F_2 iznosi $2c$



Slika 12: Prvi korak pri konstrukciji elipse

- nacrtamo kružnicu radijusa a sa središtem u točki O
- kružnica siječe pravac p u točkama A_1 i A_2



Slika 13: Drugi korak pri konstrukciji elipse

- udaljenost točke A_1 od fokusa F_1

$$d(A_1, F_1) = |\overline{A_1F_1}| = |\overline{OA_1}| - |\overline{OF_1}| = a - c \tag{39}$$

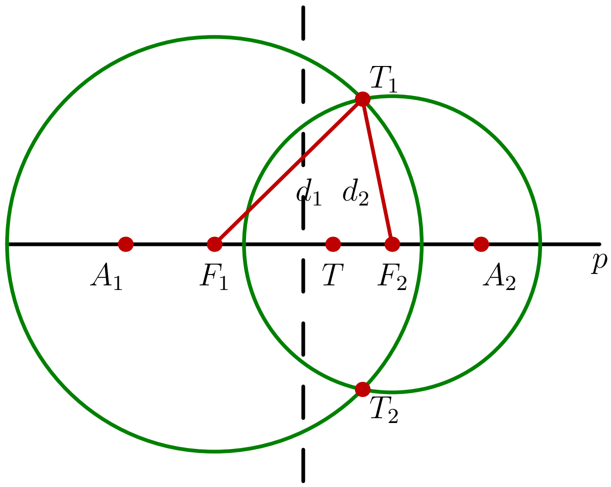
- udaljenost točke A_1 od fokusa F_2

$$d(A_1, F_2) = |\overline{A_1F_2}| = |\overline{OA_1}| + |\overline{OF_2}| = a + c \tag{40}$$

- zbroj udaljenosti točke A_1 od fokusa

$$d(A_1, F_1) + d(A_1, F_2) = a - c + a + c = 2a \tag{41}$$

- točka A_1 se očito nalazi na elipsi
- istim postupkom bi zaključili da se i točka A_2 nalazi na elipsi
- u sljedećem koraku odaberemo bilo koju točku T na dužini F_1F_2
- oko točke F_1 opišemo kružnicu radijusa $d_1 = d(A_1, T)$, a oko točke F_2 kružnicu radijusa $d_2 = d(A_2, T)$



Slika 14: Treći korak pri konstrukciji elipse

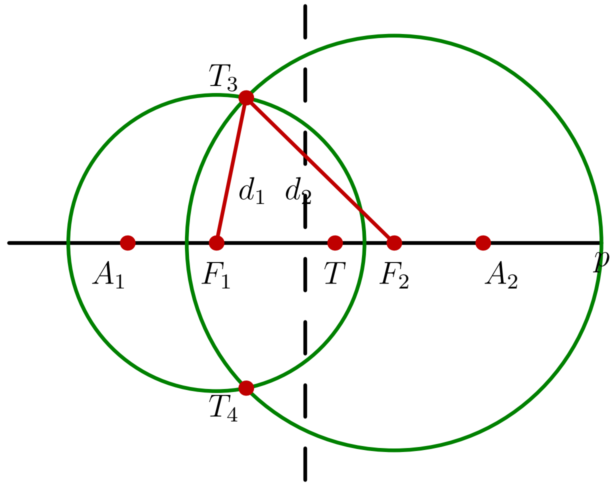
- dvije kružnice se sijeku u točkama T_1 i T_2
- promotrimo točku T_1
- zbroj udaljenosti točke T_1 od fokusa F_1 i F_2 iznosi

$$d(F_1, T_1) + d(F_2, T_1) = d_1 + d_2 = d(A_1, T) + d(A_2, T) = d(A_1, A_2) = 2a \quad (42)$$

- jednako tako vrijedi

$$d(F_1, T_2) + d(F_2, T_2) = d_1 + d_2 = d(A_1, T) + d(A_2, T) = d(A_1, A_2) = 2a \quad (43)$$

- točke T_1 i T_2 također pripadaju elipsi
- sada oko točke F_1 opišemo kružnicu radijusa $d(A_2, T)$, a oko točke F_2 kružnicu radijusa $d(A_1, T)$



Slika 15: Četvrti korak pri konstrukciji elipse

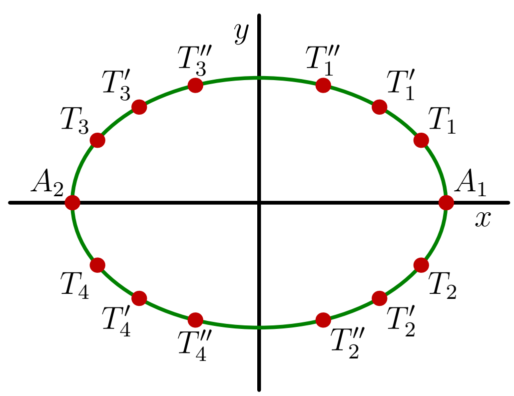
- dvije kružnice sijeku se u točkama T_3 i T_4
- promotrimo točku T_3
- zbroj udaljenosti točke T_3 od fokusa F_1 i F_2 iznosi

$$d(F_1, T_3) + d(F_2, T_3) = r_1 + r_2 = d(A_2, T) + d(A_1, T) = d(A_2, A_1) = 2a \quad (44)$$

- jednako tako vrijedi

$$d(F_1, T_4) + d(F_2, T_4) = r_1 + r_2 = d(A_2, T) + d(A_1, T) = d(A_2, A_1) = 2a \quad (45)$$

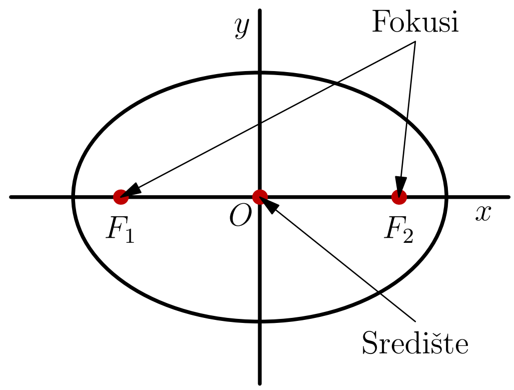
- točke T_3 i T_4 također pripadaju elipsi
- odabirom različitih točaka T možemo odrediti više točaka elipse i spojiti ih



Slika 16: Konstrukcija elipse.

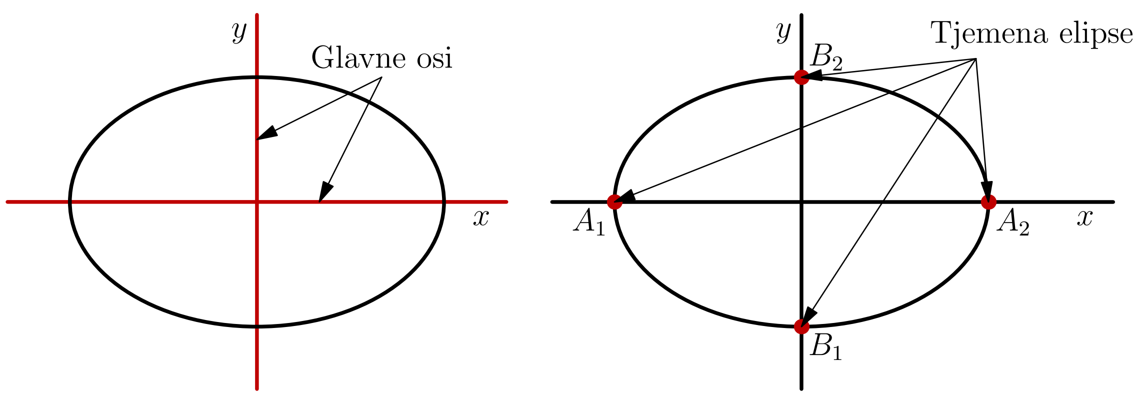
3.2.3 Svojstva elipse

- osnovni pojmovi vezani uz elipsu
  - fokusi ili žarišta elipse: točke F_1 i F_2
  - središte elipse: polovište O dužine $\overline{F_1F_2}$



Slika 17: Fokusi i središte elipse.

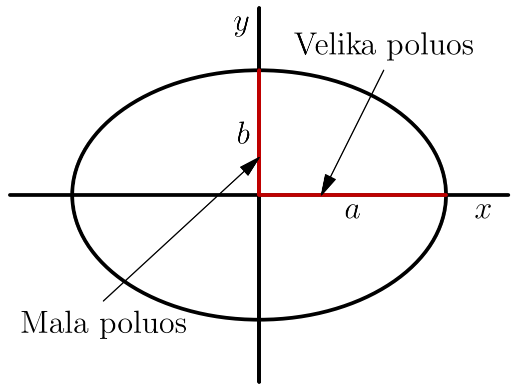
  - prva glavna os elipse: pravac kroz fokuse
  - druga glavna os elipse: pravac okomit na prvu glavnu os koji prolazi kroz središte elipse
  - tjemena ili vrhovi elipse: sjecišta elipse s glavnim osima



Slika 18: Glavne osi i tjemena elipse.

  - linearni ekscentricitet elipse: $c = d(F_1, F_2)/2$
  - velika poluos elipse: $a = d(O, A_1) = d(O, A_2)$

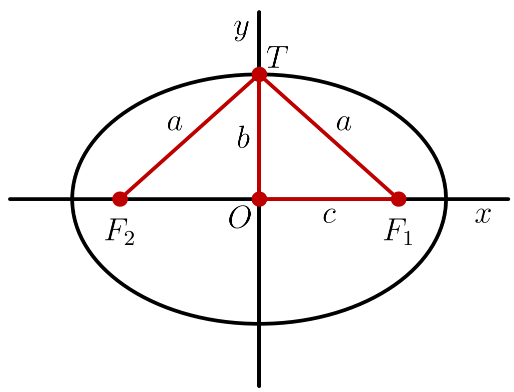
– mala poluos elipse: $b = d(O, B_1) = d(O, B_2)$



Slika 19: Velika i mala poluos elipse.

– numerički ekscentricitet elipse: $e = c/a$

- koristeći definiciju elipse možemo izvesti relaciju koja povezuje malu poluos, veliku poluos i udaljenost fokusa od ishodišta



Slika 20: Dokaz relacije $a^2 = b^2 + c^2$.

- promotrimo točku T na sl. 20
- trokut $\triangle F_1F_2T$ je jednakokračan, a zbroj udaljenosti točke T od fokusa iznosi $2a$
- duljina svakog kraka trokuta $\triangle F_1F_2T$ mora biti jednaka a
- sada primjenimo Pitagorin poučak na trokut $\triangle TOF_1$
- slijedi relacija između velike poluosi a, male poluosi b i koordinate fokusa c

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{46}$$

3.2.4 Jednadžba elipse

- ako su a i b poluosi elipse i ako se osi koordinatnog sustava poklapaju s glavnim osima elipse, tada jednadžba elipse glasi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{47}$$

- trebamo dokazati dvije tvrdnje

Tvrdnja 1: ako točka $T(x, y)$ pripada elipsi njezine koordinate zadovoljavaju jedn. (47)

- točka T prema pretpostavci pripada elipsi
- to znači da zbroj udaljenosti točke T od fokusa iznosi $2a$

$$d(T, F_1) + d(T, F_2) = 2a \tag{48}$$

- koordinate fokusa

$$F_1(-c, 0) \quad \text{i} \quad F_2(c, 0) \tag{49}$$

- udaljenost točke od fokusa

$$d(T, F_1) = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \quad \text{i} \quad d(T, F_2) = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \tag{50}$$

- jedn. (48) prelazi u

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a \tag{51}$$

- jedan od korijena prebacimo na desnu stranu jednadžbe

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \tag{52}$$

- kvadriramo gornju jednadžbu

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2 \tag{53}$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \tag{54}$$

$$2xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} - 2xc \tag{55}$$

$$4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc \tag{56}$$

$$a^2\left[(x - c)^2 + y^2\right] = (a^2 - xc)^2 \tag{57}$$

$$a^2\left[x^2 - 2xc + c^2 + y^2\right] = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \tag{58}$$

$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \tag{59}$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \tag{60}$$

- iskoristimo relaciju između velike i male poluosi

$$b^2 = a^2 - c^2 \Longrightarrow x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2 \tag{61}$$

- podijelimo prethodnu jednadžbu s a^2b^2 i dolazimo do jednadžbe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{62}$$

koju smo trebali pokazati

Tvrdnja 2: ako koordinate točke $T(x, y)$ zadovoljavaju jedn. (47) onda točka pripada elipsi

- trebamo pokazati da zbroj udaljenosti točke T od fokusa iznosi $2a$
- udaljenost točke T od fokusa F_1

$$d(T, F_1)^2 = (x + c)^2 + y^2 = x^2 + 2xc + c^2 + y^2 \tag{63}$$

- koordinate točke zadovoljavaju jedn. (47)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \tag{64}$$

- udaljenost od fokusa

$$d(T, F_1)^2 = x^2 + 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 = x^2\frac{a^2 - b^2}{a^2} + 2xc + c^2 + b^2 \tag{65}$$

- iskoristimo relaciju $b^2 = a^2 - c^2$

$$d(T, F_1)^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2xc + a^2 = \left(\frac{c}{a}x + a\right)^2 \tag{66}$$

- jednakim postupkom bi došli do udaljenosti točke T od drugog fokusa

$$d(T, F_2)^2 = \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2 \tag{67}$$

- dakle, zbroj udaljenosti zaista iznosi $2a$

$$d(T, F_1) + d(T, F_2) = \left(a + \frac{c}{a}x\right) + \left(a - \frac{c}{a}x\right) = 2a \tag{68}$$

3.3 Hiperbola

3.3.1 Definicija hiperbole

- pretpostavimo da u ravnini leže dvije točke F_1 i F_2 udaljene za

$$d(F_1, F_2) = 2c \tag{69}$$

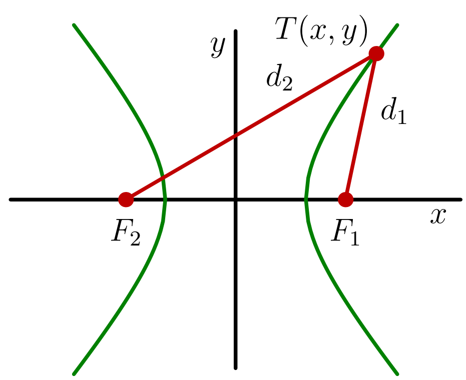
- neka je a realan broj za koji vrijedi

$$a < \frac{1}{2} d(F_1, F_2) \Longrightarrow a < c \tag{70}$$

- skup svih točaka ravnine za koje apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od točaka F_1 i F_2 iznosi $2a$

$$|d(F_1, T) - d(F_2, T)| = 2a, \tag{71}$$

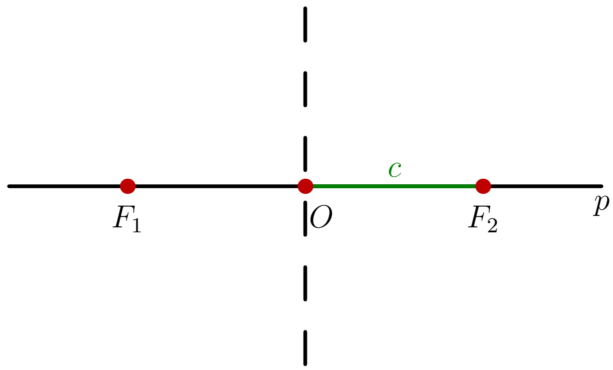
  zovemo hiperbola



Slika 21: Primjer hiperbole.

3.3.2 Konstrukcija hiperbole

- želimo konstruirati hiperbolu kojoj su zadani fokusi, kao i razlika udaljenosti točke hiperbole od fokusa
- nacrtamo točke F_1 i F_2 u ravnini, pravac p koji prolazi kroz njih i točku O koja se nalazi na polovištu dužine $\overline{F_1 F_1}$
- udaljenost točaka F_1 i F_2 iznosi $2c$



Slika 22: Prvi korak pri konstrukciji hiperbole

- nacrtamo kružnicu radijusa a sa središtem u ishodištu sustava
- kružnica siječe pravac p u točkama A_1 i A_2
- udaljenost točke A_1 od fokusa F_1

$$d(A_1, F_1) = d(O, F_1) - d(O, A_1) = c - a \tag{72}$$

- udaljenost točke A_1 od fokusa F_2

$$d(A_1, F_2) = d(O, F_2) + d(O, A_1) = c + a \tag{73}$$

- apsolutna vrijednost razlika udaljenosti

$$|d(A_1, F_1) - d(A_1, F_2)| = |c - a - c - a| = 2a \tag{74}$$

- točka A_1 očito pripada hiperboli
- jednakim postupkom bi pokazali da točka A_2 također pripada hiperboli
- sada odaberemo točku T koja leži na pravcu p, ali se nalazi izvan dužine $\overline{F_1F_2}$
- nacrtamo jednu kružnicu radijusa $d(T, A_1)$ sa središtem u fokusu F_1 i drugu kružnicu radijusa $d(T, A_2)$ sa središtem u fokusu F_2
- dvije kružnice se sijeku u točkama T_1 i T_2
- udaljenost točaka T_1 i T_2 od fokusa F_1 jednaka je radijusu prve kručnice

$$d(T, A_1) = d(O, T) - d(O, A_1) = d(O, T) - a \tag{75}$$

- udaljenost točaka T_1 i T_2 od fokusa F_2 jednaka je radijusu druge kručnice

$$d(T, A_2) = d(O, T) + d(O, A_2) = d(O, T) + a \tag{76}$$

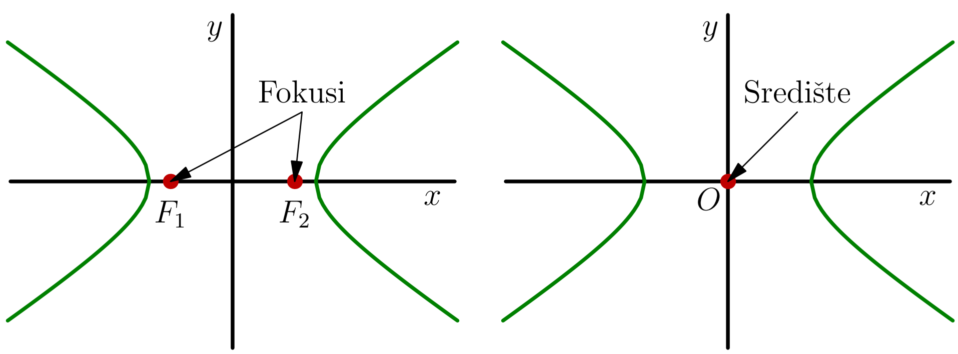
- apsolutna vrijednost razlike udaljenosti u oba slučaja iznosi

$$|d(T, A_1) - d(T, A_2)| = |d(T, O) - a - d(T, O) - a| = 2a \tag{77}$$

- točke T_1 i T_2 pripadaju elipsi
- u sljedećem koraku nacrtamo jednu kružnicu radijusa $d(T, A_1)$ sa središtem u fokusu F_2 i drugu kružnicu radijusa $d(T, A_2)$ sa središtem u fokusu F_1
- dvije kružnice se sijeku u točkama T_3 i T_4
- jednakim postupkom kao u prethodnom koraku pokazali da točke T_3 i T_4 pripadaju hiperboli
- ako postupak ponovimo za više točaka T doći ćemo do niza točaka koje pripadaju hiperboli, a time i do same hiperbole

3.3.3 Svojstva hiperbole

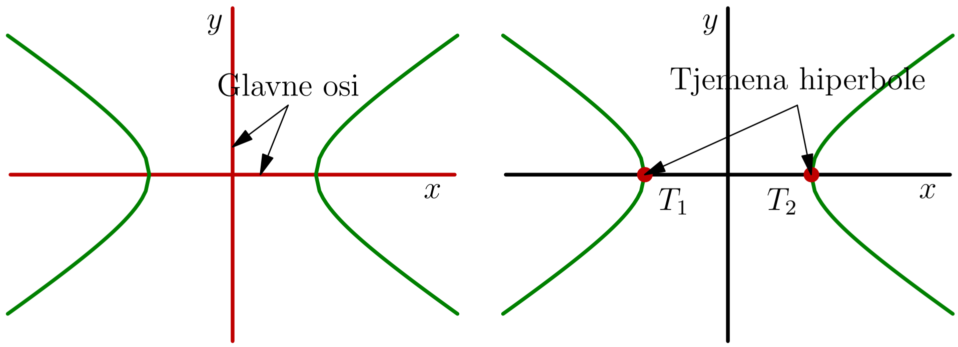
- osnovni pojmovi vezani uz hiperbolu
  - fokusi ili žarišta hiperbole: točke F_1 i F_2
  - središte hiperbole: polovište O dužine $\overline{F_1F_2}$



Slika 23: Fokusi i središte hiperbole.

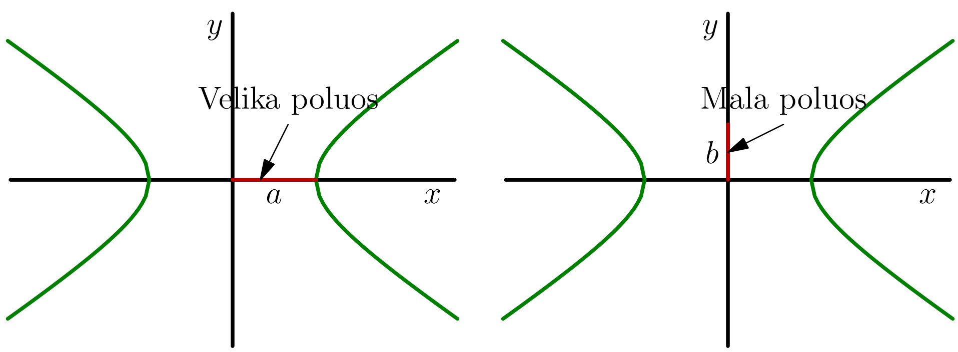
  - prva glavna os hiperbole: pravac kroz fokuse

- druga glavna os hiperbole: pravac okomit na prvu glavnu os koji prolazi kroz središte hiperbole
- tjemena ili vrhovi hiperbole: sjecišta hiperbole s glavnim osima



Slika 24: Glavne osi i tjemena hiperbole.

- linearni ekscentricitet hiperbole: $c = d(F_1, F_2)/2$
- velika poluos hiperbole: $a = d(O, A_1) = d(O, A_2)$
- mala poluos hiperbole: $b = d(O, B_1) = d(O, B_2)$



Slika 25: Velika i mala poluos hiperbole.

- numerički ekscentricitet hiperbole: $e = c/a$

3.3.4 Jednadžba hiperbole

- pretpostavimo da se osi koordinatnog sustava poklapaju s glavnim osima hiperbole i da fokusi hiperbole pritom leže na osi x

- jednadžba hiperbole tada glasi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{78}$$

- trebamo pokazati dvije tvrdnje

Tvrdnja 1: ako točka $T(x, y)$ pripada hiperboli, njezine koordinate vezane su jednadžbom (78)

- točka T prema pretpostavci pripada hiperboli pa vrijedi

$$|d(F_1, T) - d(F_2, T)| = 2a \tag{79}$$

- koordinate fokusa: $F_1 = (c, 0)$ i $F_2 = (-c, 0)$
- udaljenost točke $T(x, y)$ od fokusa iznosi

$$d(F_1, T) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{i} \quad d(F_2, T) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \tag{80}$$

- pretpostavimo prvo da vrijedi $d(F_1, T) > d(F_2, T)$

$$d(F_1, T) - d(F_2, T) = 2a \Longrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \tag{81}$$

- prebacimo jedan od korijena na drugu stranu jednadžba i kvadriramo je

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2a && (82)\\
(x-c)^2 + y^2 &= (x+c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4a^2 && (83)\\
x^2 - 2xc + c^2 &= x^2 + 2xc + c^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4a^2 && (84)\\
-4xc - 4a^2 &= 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} && (85)\\
xc + a^2 &= a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} && (86)\\
x^2c^2 + 2a^2xc + a^4 &= a^2(x+c)^2 + a^2y^2 && (87)\\
x^2c^2 + 2a^2xc + a^4 &= a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 && (88)\\
x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) && (89)\\
x^2b^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 && (90)\\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 && (91)
\end{aligned}$$

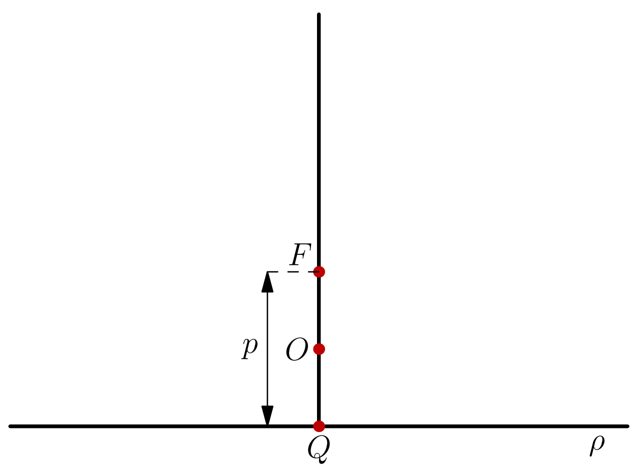
3.4 Parabola

3.4.1 Definicija parabole

- pretpostavimo da u ravnini leže točka F i pravac p
- skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od točke F i pravca p zovemo parabola

3.4.2 Konstrukcija parabole

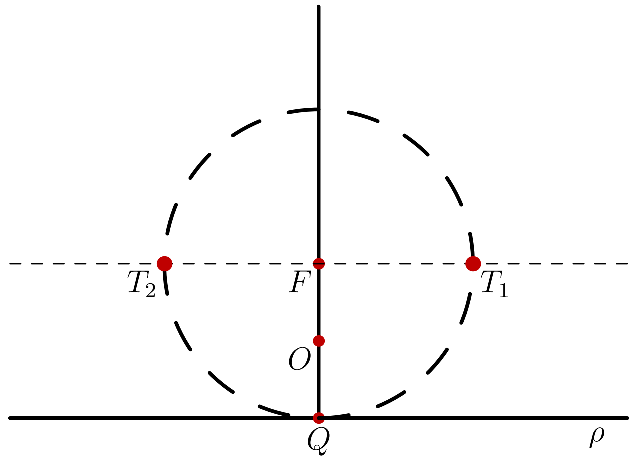
- želimo konstruirati parabolu kojoj su zadani fokus F i direktrisa ρ
- pritom udaljenost fokusa od direktrise iznosi p
- prvi korak je da povučemo okomicu na direktrisu ρ koja prolazi kroz fokus F



Slika 26: Prvi korak konstrukcije parabole

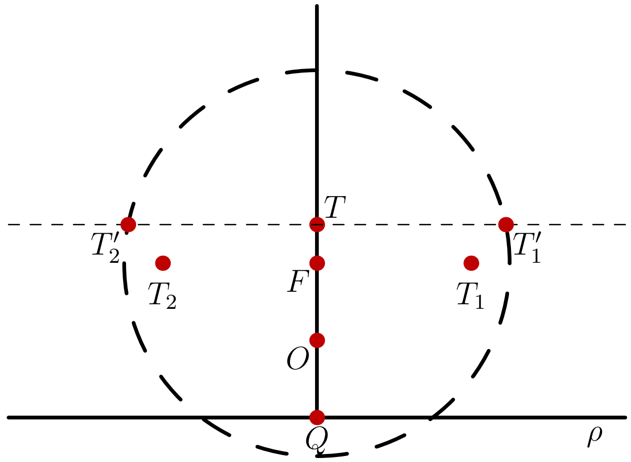
- točka O koja se nalazi na polovištu dužine $\overline{FQ}$ jednako je udaljena od fokusa i direktrise (za $p/2$) pa se sigurno nalazi na paraboli
- u drugom koraku kroz fokus povučemo paralelu s direktrisom (označimo je s t) i nacrtamo kružnicu radijusa p sa središtem u fokusu F
- kružnica siječe pravac t u točkama T_1 i T_2
- obje točke su udaljene za p od fokusa jer se nalaze na kružnici
- istovremeno su obje udaljene za p od direktrise jer se nalaze na pravcu t

- stoga obje točke pripadaju paraboli



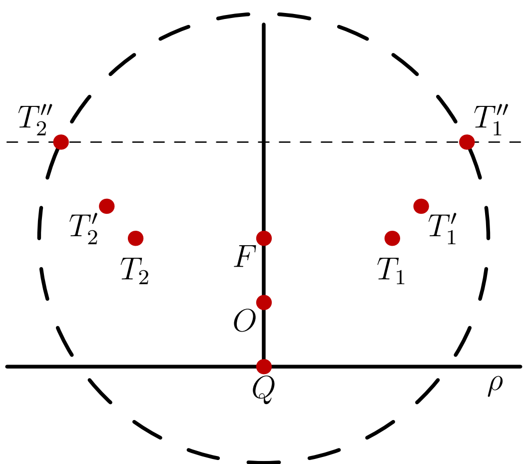
Slika 27: Drugi korak konstrukcije parabole

- treći korak konstrukcije parabole započinjemo odabirom proizvoljne točke T koja je smještena na okomici, ali iznad fokusa
- kroz točku T provučemo paralelu s direktrisom (označimo je s t) i nacrtamo kružnicu radijusa $d(T, Q)$
- kružnica siječe pravac t u točkama T_1' i T_2'
- točke T_1' i T_2' su udaljene za $d(T, Q)$ od fokusa jer se nalaze na kružnici
- istovremeno su udaljene za $d(T, Q)$ od direktrise jer se nalaze na pravcu t
- zaključujemo da se i točke T_1' i T_2' nalaze na paraboli



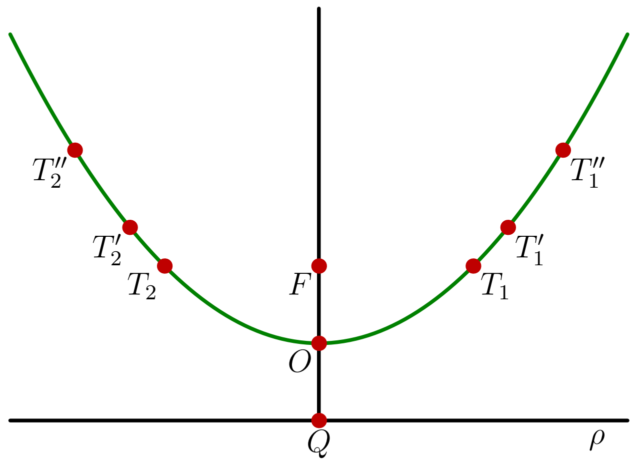
Slika 28: Treći korak konstrukcije parabole

- ako postupak ponovimo s drugačijim odabirom točke T dolazimo do još dvije točke parabole



Slika 29: Četvrti korak konstrukcije parabole

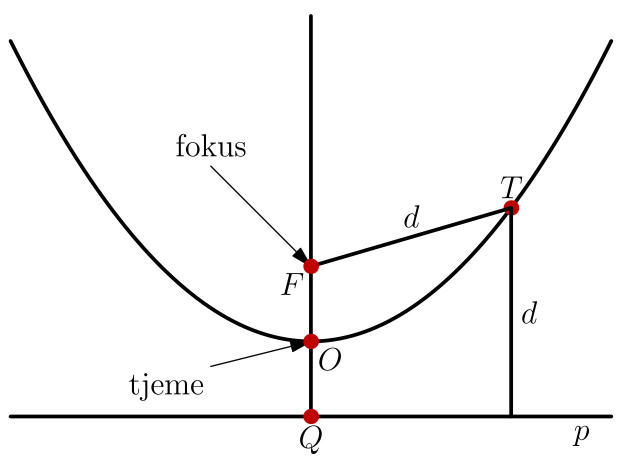
- na kraju točke spojimo u parabolu



Slika 30: Dovršetak konstrukcije parabole

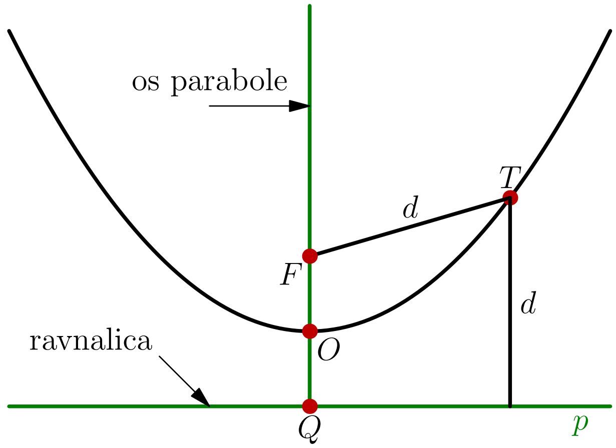
3.4.3 Elementi parabole

- fokus i tjeme parabole
- fokus je točka iz definicije parabole: sve točke koje leže na paraboli su jednako udaljene od fokusa i ravnalice ili direktrise
- tjeme je točka koja je najbliže fokusu, a time i ravnalici



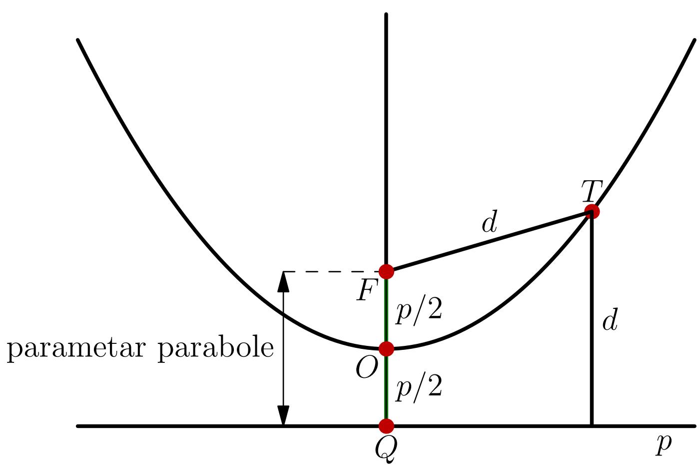
Slika 31: Fokus i tjeme parabole.

- os parabole: pravac koji dijeli parabolu na dva jednaka dijela
- ravnalica ili direktrisa: sve točke koje leže na paraboli su jednako udaljene od fokusa i ravnalice ili direktrise



Slika 32: Fokus i tjeme parabole.

- parametar parabole: udaljenos fokusa od ravnalice (direktrise)
- parametar parabole obično označavamo s p
- odmah slijedi da je udaljenost fokusa od tjemena $p/2$, kao i udaljenost tjemena od ravnalice

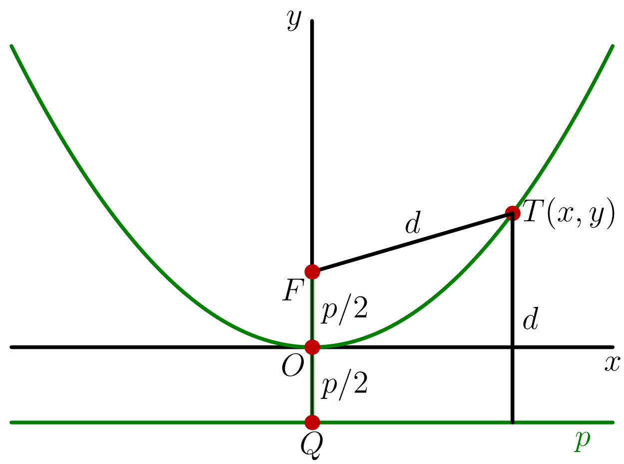


Slika 33: Parametar parabole.

3.4.4 Jednadžba parabole

- ako je ishodište koordinatnog sustava u tjemenu parabole, a os parabole leži na osi y, parabola ima jednadžbu oblika

$$y = \frac{1}{2p}x^2 \tag{92}$$



Slika 34: Izvod jednadžbe parabole.

- trebamo dokazati dvije tvrdnje

Tvrdnja 1: ako točka $T(x, y)$ pripada paraboli tj. ako je njena udaljenost od fokusa F jednaka udaljenosti od direktrise p, za koordinate točke vrijedi

$$y = \frac{1}{2p}x^2 \tag{93}$$

- točka $T(x, y)$ prema pretpostavci pripada paraboli pa je udaljenost točke od fokusa jednaka udaljenosti točke od direktrise

$$d(F, T) = d(\rho, T) \tag{94}$$

- ishodište sustava se nalazi u tjemenu parabole pa jednadžba direktrise glasi

$$y = -\frac{p}{2}, \tag{95}$$

dok su koordinate fokusa

$$F \equiv \left(0, \frac{p}{2}\right) \tag{96}$$

- udaljenost točke $T(x, y)$ od direktrise

$$d(\rho, T) = |y + \frac{p}{2}| \tag{97}$$

- udaljenost točke $T(x, y)$ od fokusa

$$d(F, T) = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} \tag{98}$$

- uvjet (94) svodi se na

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = |y + \frac{p}{2}| \tag{99}$$

- kvadriramo prethodnu jednadžbu

$$x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 \tag{100}$$

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4} \tag{101}$$

$$x^2 = 2py \tag{102}$$

- koordinate točke $T(x, y)$ zaista su vezane relacijom

$$y = \frac{1}{2p}x^2 \tag{103}$$

<u>Tvrdnja 2</u>: ako za točku $T(x, y)$ vrijedi

$$y = \frac{1}{2p}x^2 \tag{104}$$

onda je točka T element parabole

- udaljenost točke od fokusa (vidi sliku 34) iznosi

$$d_1^2 = x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 \tag{105}$$

- uvrstimo vezu između x i y (104) i kvadriramo izraz u zagradi

$$d_1^2 = 2py + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 \tag{106}$$

- udaljenost točke T od ravnalice (vidi sliku 34) iznosi

$$d_2 = y + \frac{p}{2} \tag{107}$$

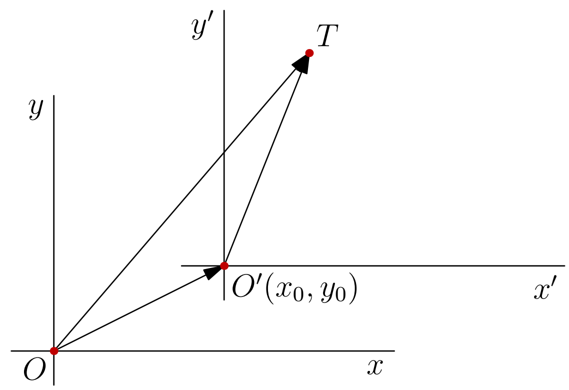
- udaljenosti d_1 i d_2 su jednake
- točka T je jednako udaljena od fokusa i ravnalice pa se nalazi na paraboli

4 Transformacije koordinatnog sustava

4.1 Translacija koordinatnog sustava

- pretpostavimo da u ravnini leže koordinatni sustavi S i S'
- položaj ishodišta sustava S' u sustavu S određen je vektorom

$$\overrightarrow{OO'} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} \tag{108}$$



Slika 35: Translacija koordinatnog sustava.

- položaj točke T u sustavu S određen je vektorom

$$\overrightarrow{OT} = x\vec{i} + y\vec{j} \tag{109}$$

- položaj iste točke u sustavu S' određen je vektorom

$$\overrightarrow{OT'} = x'\vec{i} + y'\vec{j} \tag{110}$$

- za svaku točku T vrijedi

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OT'} \tag{111}$$

- uvrstimo jednadžbe (108), (109) i (110) u prethodni izraz

$$x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + x_0\vec{i} + y_0\vec{j} \tag{112}$$

- jedinični vektori su linearno nezavisni pa možemo izjednačiti izraze uz $\vec{i}$ i $\vec{j}$

$$x = x' + x_0 \quad \text{i} \quad y = y' + y_0 \tag{113}$$

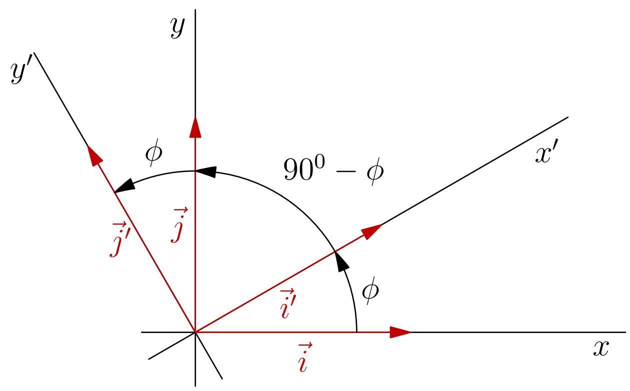
- našli smo formule za transformacije koordinata pri translaciji koordinatnog sustava

$$x' = x - x_0 \quad \text{i} \quad y' = y - y_0 \tag{114}$$
$$x = x' - x_0 \quad \text{i} \quad y = y' - y_0 \tag{115}$$

- formule (114) i (115) omogućuju povezivanje koordinata točke T u novom (S') i starom sustavu (S)

4.2 Rotacija koordinatnog sustava

- pretpostavimo da koordinatni sustavi S i S' leže u istoj ravnini, imaju zajedničko ishodište i da kut između osi x i x' (tj. y i y') iznosi ϕ



Slika 36: Rotacija koordinatnog sustava u ravnini.

- točka T ima koordinate (x, y) u sustavu S, dok su njene koordinate u sustavu S' (x', y')
- želimo povezati koordinate u sustavima S i S'
- skalarni produkt jediničnih vektora u sustavima S i S'

$$\vec{i} \cdot \vec{i}' = \cos\phi \tag{116}$$
$$\vec{j} \cdot \vec{j}' = \cos\phi \tag{117}$$
$$\vec{i} \cdot \vec{j}' = \cos(90^0 + \phi) = -\sin\phi \tag{118}$$
$$\vec{j} \cdot \vec{i}' = \cos(90^0 - \phi) = \sin\phi \tag{119}$$

- za općeniti vektor $\vec{a}$ vrijedi

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{a} \cdot \vec{j})\vec{j} \tag{120}$$

- primjenimo prethodnu formulu na jedinične vektore $\vec{i}'$ i $\vec{j}'$

$$\vec{i}' = (\vec{i}' \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{i}' \cdot \vec{j})\vec{j} = \cos\phi\vec{i} + \sin\phi\vec{j} \tag{121}$$
$$\vec{j}' = (\vec{j}' \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{j}' \cdot \vec{j})\vec{j} = -\sin\phi\vec{i} + \cos\phi\vec{j} \tag{122}$$

- točki T u sustavu S pridružene su koordinate (x, y), a točki T' koordinate (x', y')

- vektor s hvatištem u ishodištu i krajem u točki T možemo napisati u oba sustava

$$\overrightarrow{OT} = x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' \tag{123}$$

- pomnožimo jednadžbu (123) s jediničnim vektorom $\vec{i}'$

$$x' = x\vec{i} \cdot \vec{i}' + y\vec{j} \cdot \vec{i}' = x\cos\phi + y\sin\phi \tag{124}$$

- pomnožimo jednadžbu (123) s jediničnim vektorom $\vec{j}'$

$$y' = x\vec{i} \cdot \vec{j}' + y\vec{j} \cdot \vec{j}' = -x\sin\phi + y\cos\phi \tag{125}$$

- jednadžbe transformacije

$$x' = x\cos\phi + y\sin\phi \tag{126}$$
$$y' = -x\sin\phi + y\cos\phi \tag{127}$$

  možemo invertirati

$$x = x'\cos\phi - y'\sin\phi \tag{128}$$
$$y = x'\sin\phi + y'\cos\phi \tag{129}$$

5 Zadaci za vježbu

Zadatak 1:
Neka sustav S' nastaje iz sustava S translacijom ishodišta za vektor $2\vec{i} + \vec{j}$ i onda rotacijom za kut $\phi = 60^0$. U sustavu S' nađi jednadžbu pravca

$$x + 2y + 3 = 0.$$

Rješenje: $(2\sqrt{3} + 1)x' + (2 - \sqrt{3})y' + 14 = 0$

Zadatak 2:
Neka sustav S' nastaje iz sustava S translacijom ishodišta za vektor $2\vec{i} + \vec{j}$ i onda rotacijom za kut $\phi = 60^0$. U sustavu S' nađi jednadžbu kružnice

$$(x-1)^2 + (y+3)^2.$$

Rješenje:

$$\left(x' + \frac{4\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 + \left(y' + \frac{4-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4$$

Zadatak 3:

Neka sustav S' nastaje iz sustava S translacijom ishodišta za vektor $2\vec{i} + \vec{j}$ i onda rotacijom za kut $\phi = 60^0$. U sustavu S' nađi jednadžbu elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Zadatak 4:

Neka sustav S' nastaje iz sustava S translacijom ishodišta za vektor $2\vec{i} + \vec{j}$ i onda rotacijom za kut $\phi = 60^0$. U sustavu S' nađi jednadžbu hiperbole

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Zadatak 5:
Neka sustav S' nastaje iz sustava S translacijom ishodišta za vektor $2\vec{i} + \vec{j}$ i onda rotacijom za kut $\phi = 60^0$. U sustavu S' nađi jednadžbu parabole

$$y = 2x^2.$$