Kompleksni brojevi

September 5, 2008

1 Kompleksna ravnina

1.1 Pojam kompleksnog broja

- rješenja kvadratne jednadžbe

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

  možemo napisati u obliku

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

- ako za parametre kvadratne jednadžbe vrijedi

$$b^2 - 4ac < 0 \tag{3}$$

  rješenja se ne nalaze u skupu realnih brojeva

<u>Primjer</u>:

$$x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = -1 \Longrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-1} \tag{4}$$

<u>Primjer</u>:

$$x^2 + 4x + 7 = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \frac{\sqrt{16 - 28}}{2} = -2 \pm \sqrt{-3} \tag{5}$$

- kvadriranjem realnog broja nikako ne možemo dobiti negativne brojeve
- da bi obuhvatili sva rješenja kvadratne jednadže moramo proširiti skup realnih brojeva

- definiramo imaginarnu jedinicu

$$i^2 = -1 \tag{6}$$

- rješenje iz prvog primjera je imaginarni broj

$$x_{1,2} = \pm i \tag{7}$$

- rješenje iz drugog primjera je kompleksni broj jer ima realni i imaginarni dio

$$x_{1,2} = -2 \pm i\sqrt{3} \tag{8}$$

- iz definicije imaginarne jedinice slijedi

$$i^3 = i \cdot i^2 = -i \tag{9}$$

$$i^4 = \left(i^2\right)^2 = (-1)^2 = 1 \tag{10}$$

- standardni oblik kompleksnog broja

$$z = x + yi \quad \text{gdje su} \quad x, y \in \mathcal{R} \tag{11}$$

- broj x zovemo realni dio kompleksnog broja z

$$x = \mathrm{Re} z \tag{12}$$

- broj y zovemo imaginarni dio kompleksnog broja z

$$y = \mathrm{Im} z \tag{13}$$

- dva kompleksna broja

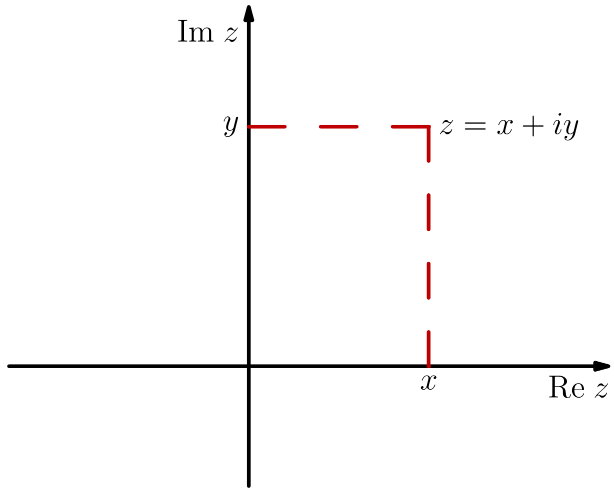
$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{i} \quad z_2 = x_2 + iy_2 \tag{14}$$

  su jednaka ako su im realni i imaginarni dijelovi jednaki

$$x_1 = x_2 \quad \text{i} \quad y_1 = y_2 \tag{15}$$

- kompleksne brojeve grafički predstavljamo u kompleksnoj ravnini tako da broj $z = x + yi$ idenitificiramo s točkom (x, y)

- kompleksnu ravninu ponekad zovemo i Gaussova ravnina

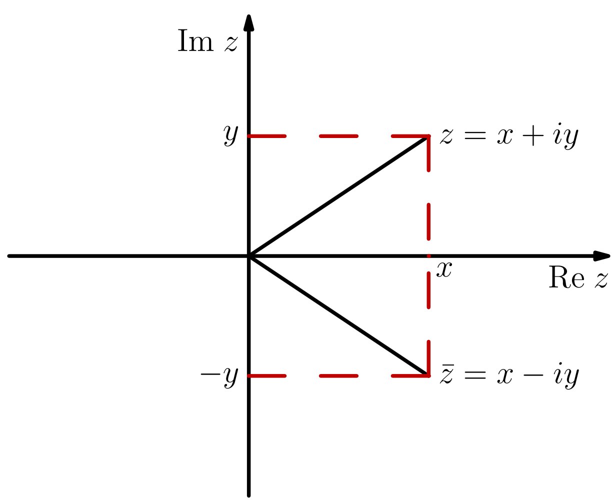


Slika 1: Prikaz kompleksnog broja u Gaussovoj ravnini

1.2 Kompleksna konjugacija

- ako je $z = x + iy$ kompleksni broj, sa $\bar{z}$ označavamo njemu konjugirani kompleksni broj

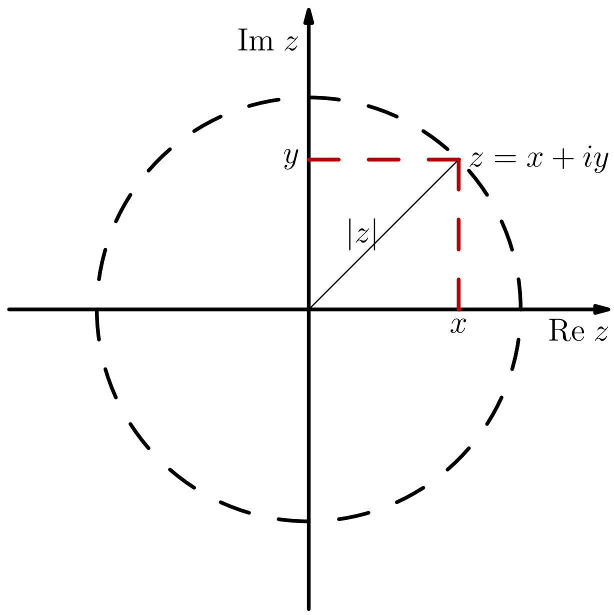
$$\bar{z} = x - iy \tag{16}$$



Slika 2: Kompleksni broj z i njemu konjugiranju kompleksni broj $\bar{z}$ u Gaussovoj ravnini

1.3 Apsolutna vrijednost kompleksnog broja

- apsolutnu vrijednost ili modul kompleksnog broja definiramo kao udaljenost točke $z = (x, y)$ od ishodišta kompleksne ravnine



Slika 3: Modul kompleksnog broja $z = x + iy$. Na kružnici radijusa $|z|$ nalaze se svi kompleksni brojevi s modulom $|z|$.

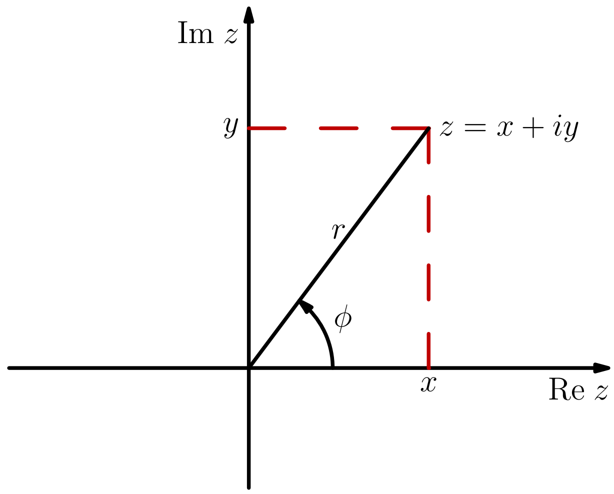
- iz Pitagorinog poučka slijedi

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{17}$$

1.4 Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

- neka je $z = x + iy$ proizvoljni kompleksni broj
- ako modul kompleksnog broja označimo s r, možemo napisati

$$x = r\cos\phi \quad \text{i} \quad y = r\sin\phi \tag{18}$$



Slika 4: Veličine potrebne za definiciju trigonometrijskog oblika kompleksnog broja

- kut ϕ možemo izračunati koristeći pravokutni trokut na sl. 4

$$\tan\phi = \frac{y}{x} \tag{19}$$

- svaki kompleksni broj možemo napisati u trigonometrijskom obliku

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \tag{20}$$

- kut ϕ obično zovemo argument kompleksnog broja

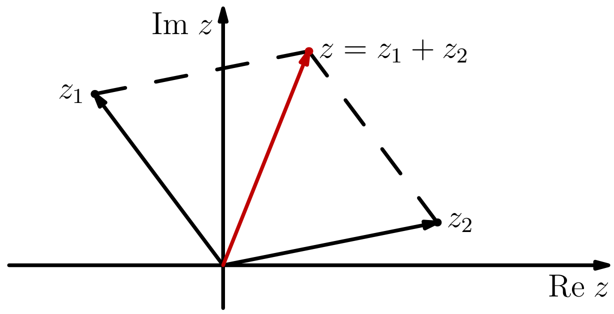
2 Osnovne operacije

2.1 Zbrajanje kompleksnih brojeva

- kompleksne brojeve $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$ zbrojimo tako da odvojeno zbrojimo realne i imaginarne dijelove

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{21}$$

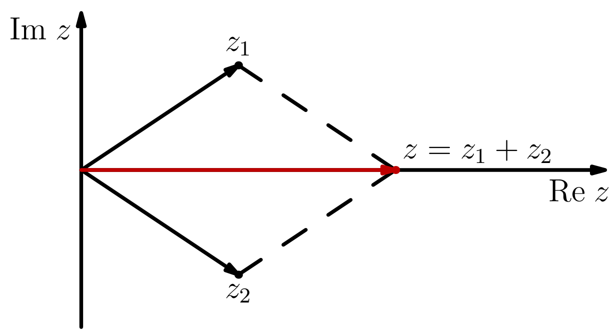
- zbrajanje kompleksnih brojeva u Gaussovoj ravnini jednako je zbrajanju vektora



Slika 5: Zbroj kompleksnih brojeva z_1 i z_2 u Gaussovoj ravini

- zbroj kompleksnog broja z i njemu konjugiranog broja $\bar{z}$ je realni broj

$$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x \tag{22}$$



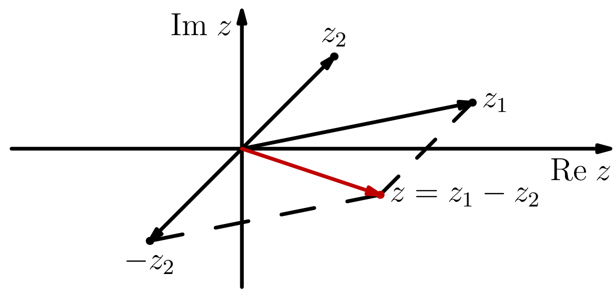
Slika 6: Zbroj kompleksnih brojeva z i $\bar{z}$ u Gaussovoj ravini

2.2 Oduzimanje kompleksnih brojeva

- kompleksne brojeve $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$ oduzimamo tako da odvojeno oduzimamo realne i imaginarne dijelove

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i \tag{23}$$

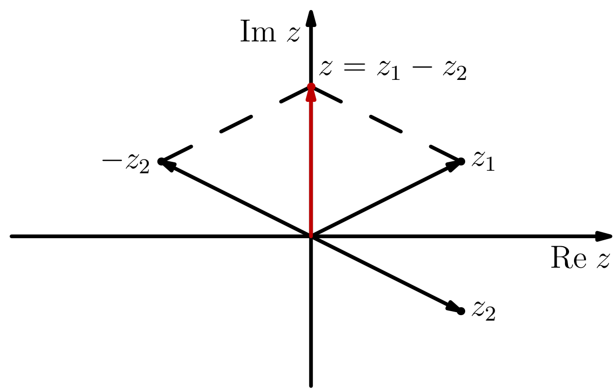
- oduzimanje kompleksnih brojeva u Gaussovoj ravnini jednako je oduzimanju vektora



Slika 7: Razlika kompleksnih brojeva z_1 i z_2 u Gaussovoj ravini

- razlika kompleksnog broja z i njemu konjugiranog broja $\bar{z}$ je imaginarni broj

$$z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy \tag{24}$$



Slika 8: Razlika kompleksnih brojeva z i $\bar{z}$ u Gaussovoj ravini

2.3 Množenje kompleksnih brojeva

- pri množenju kompleksnih brojeva

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{i} \quad z_2 = x_2 + iy_2 \tag{25}$$

u obzir uzimamo činjenicu $i^2 = -1$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 \\ z_1 \cdot z_2 &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned} \tag{26}$$

- umnožak kompleksnog broja z i njemu konjugiranog broja $\bar{z}$ jednak je kvadratu modula broja z

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \tag{27}$$

- množenje kompleksnih brojeva je jednostavnije ako koristimo trigonometrijski oblik

$$z_1 = r_1 \cos\phi_1 + ir_1 \sin\phi_1 \Longrightarrow x_1 = r_1 \cos\phi_1 \quad \text{i} \quad y_1 = r_1 \sin\phi_1 \tag{28}$$

$$z_2 = r_2 \cos\phi_2 + ir_2 \sin\phi_2 \Longrightarrow x_2 = r_2 \cos\phi_2 \quad \text{i} \quad y_2 = r_2 \sin\phi_2 \tag{29}$$

- uvrstimo komponente x_1, y_1, x_2 i y_2

$$x_1 x_2 = r_1 r_2 \cos\phi_1 \cos\phi_2 \tag{30}$$

$$y_1 y_2 = r_1 r_2 \sin\phi_1 \sin\phi_2 \tag{31}$$

$$x_1 y_2 = r_1 r_2 \cos\phi_1 \sin\phi_2 \tag{32}$$

$$y_1 x_2 = r_1 r_2 \sin\phi_1 \cos\phi_2 \tag{33}$$

- realni dio produkta brojeva z_1 i z_2

$$x_1 x_2 - y_1 y_2 = r_1 r_2 (\cos\phi_1 \cos\phi_2 - \sin\phi_1 \sin\phi_2) = r_1 r_2 \cos(\phi_1 + \phi_2) \tag{34}$$

- imaginarni dio produkta brojeva z_1 i z_2

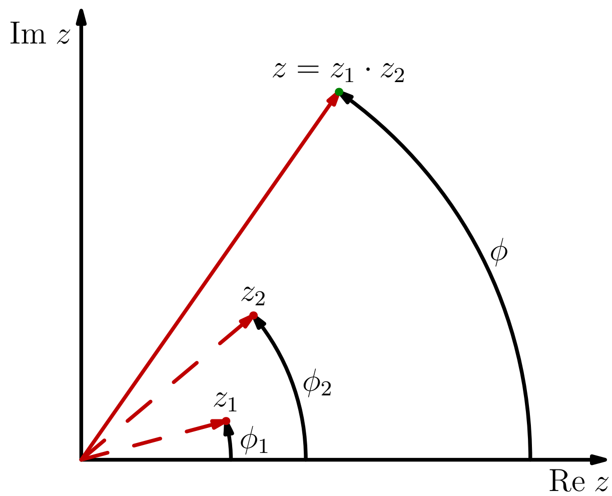
$$x_1 y_2 + x_2 y_1 = r_1 r_2 (\sin\phi_2 \cos\phi_1 + \cos\phi_2 \sin\phi_1) = r_1 r_2 \sin(\phi_1 + \phi_2) \tag{35}$$

- ukupni produkt brojeva z_1 i z_2

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)] \tag{36}$$

  je kompleksni broj z s modulom $|z| = r_1 r_2 \equiv r$ i argumentom $\phi_1 + \phi_2 \equiv \phi$

$$z_1 \cdot z_2 = r (\cos\phi + i \sin\phi) \tag{37}$$



Slika 9: Množenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku

2.4 Potenciranje kompleksnih brojeva

- promotrimo prvo kvadrat kompleksnog broja z

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \Longrightarrow z^2 = z \cdot z = r^2\left(\cos(2\phi) + i\sin(2\phi)\right), \tag{38}$$

  a zatim i treću potenciju istog broja

$$\begin{aligned} z^3 &= z^2 \cdot z = r^2 \cdot r\left(\cos(2\phi + \phi) + i\sin(2\phi + \phi)\right) \\ z^3 &= r^3\left(\cos(3\phi) + i\sin(3\phi)\right) \end{aligned} \tag{39}$$

- pri svakom sljedećem potenciranju bi modul još jednom pomnožili s r, a argumentu bi dodali još jedan kut ϕ
- n-ta potencija broja z

$$z^n = r^n\left[\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)\right] \tag{40}$$

- ako primjenimo prethodnu formulu na kompleksni broj s jediničnim modulom dolazimo do *de Moivre*-ovih formula
- prva *de Moivre*-ova formula

$$\left[\cos(\phi) + i\sin(\phi)\right]^n = \left[\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)\right] \tag{41}$$

- druga *de Moivre*-ova formula

$$\begin{aligned} \left[\cos(\phi) - i\sin(\phi)\right]^n &= \left[\cos(\phi) + i\sin(-\phi)\right]^n \\ &= \left[\cos(n\phi) + i\sin(-n\phi)\right] \\ &= \left[\cos(n\phi) - i\sin(n\phi)\right] \end{aligned} \tag{42}$$

2.5 Dijeljenje kompleksnih brojeva

- kompleksne brojeve

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{i} \quad z_2 = x_2 + iy_2 \tag{43}$$

dijelimo tako da racionalziramo nazivnik

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 - x_1y_2i + x_2y_1i}{x_2^2 - y_2^2i^2} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i \end{aligned} \tag{44}$$

- kao i u slučaju množenja, dijeljenje kompleksnih brojeva je jednostavnije ako koristimo trigonometrijski oblik

$$z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) \quad \text{i} \quad z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) \tag{45}$$

- uvrstimo komponente x_1, y_1, x_2 i y_2

$$x_1x_2 = r_1r_2\cos\phi_1\cos\phi_2 \tag{46}$$

$$y_1y_2 = r_1r_2\sin\phi_1\sin\phi_2 \tag{47}$$

$$x_1y_2 = r_1r_2\cos\phi_1\sin\phi_2 \tag{48}$$

$$y_1x_2 = r_1r_2\sin\phi_1\cos\phi_2 \tag{49}$$

- nazivnici u formuli (44)

$$x_2^2 + y_2^2 = r_2^2 \tag{50}$$

- brojnik realnog dijela kvocijenta

$$x_1x_2 + y_1y_2 = r_1r_2\left(\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2\right) = r_1r_2\cos\left(\phi_1 - \phi_2\right) \tag{51}$$

- brojnik imaginarnog dijela kvocijenta

$$x_2y_1 - x_1y_2 = r_1r_2\cos\phi_2\sin\phi_1 - r_1r_2\cos\phi_1\sin\phi_2 = r_1r_2\sin\left(\phi_1 - \phi_2\right) \tag{52}$$

- kvocijent brojeva z_1 i z_2 u trigonometrijskom obliku

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\phi_1 - \phi_2\right) + i\sin\left(\phi_1 - \phi_2\right)\right) \tag{53}$$

- modul broja
$$z = \frac{z_1}{z_2} = r(\cos\phi + i\sin\phi) \tag{54}$$
je kvocijent modula brojeva z_1 i z_2, a argument broja z je razlika argumenata brojeva z_1 i z_2
$$r = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{i} \quad \phi = \phi_1 - \phi_2 \tag{55}$$

2.6 Korjenovanje kompleksnih brojeva

- želimo izračunati n-ti korijen kompleksnog broja $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$
$$z_1 = \sqrt[n]{z} = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) \tag{56}$$
- n-ta potencija broja z_1 je upravo broj z
$$z_1^n = r_1^n\left(\cos\left(n\phi_1\right) + i\sin\left(n\phi_1\right)\right) = z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \tag{57}$$
- modul n-tog korijena broja z je n-ti korijen modula broja z
$$r_1 = \sqrt[n]{r} \Longrightarrow |\sqrt[n]{z}| = \sqrt[n]{|z|} \tag{58}$$
- pri određivanju argumenta n-tog korijena broja z moramo biti oprezniji
- očito rješenje $\phi_1 = \phi/n$ je samo jedno od mogućih
- prisjetimo se da argumentu kompleksnog broja z uvijek možemo dodati višekratnik broja 2π
- jednadžba za argument n-tog korijena zapravo glasi
$$n\phi_1 = \phi + 2k\pi \Longrightarrow \phi_1 = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \tag{59}$$
- još trebamo odrediti mogući raspon brojeva k
- ako vrijedi $k \geq n$ broju ϕ_1 dodajemo višekratnik broja 2π tj. ponavljamo jedno od prijašnjih rješenja
- dakle, broj k se nalazi u intervalu $0, 1, \ldots, n-1$
- takvim izborom našli smo svih n rješenja jednadžbe
$$z_1 = \sqrt[n]{z} \tag{60}$$

Primjer: četvrti korijen broja $z = r(\cos\phi + i\sin\pi)$

- jednadžba
$$z_1 = \sqrt[4]{z} \tag{61}$$
ima četiri rješenja

- modul svakog rješenja jednak je četvrtom korijenu modula broja z
$$|z_1| = \sqrt[4]{|z|} \tag{62}$$

- sva rješenja jednadžbe (61)

$$z_{1,1} = \sqrt[4]{|z|}\left(\cos\frac{\phi}{4} + i\sin\frac{\phi}{4}\right) \tag{63}$$

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \sqrt[4]{|z|}\left(\cos\frac{\phi+2\pi}{4} + i\sin\frac{\phi+2\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt[4]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\phi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right) \end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned} z_{1,3} &= \sqrt[4]{|z|}\left(\cos\frac{\phi+4\pi}{4} + i\sin\frac{\phi+4\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt[4]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\phi}{4}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{4}+\pi\right)\right) \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned} z_{1,4} &= \sqrt[4]{|z|}\left(\cos\frac{\phi+6\pi}{4} + i\sin\frac{\phi+6\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt[4]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\phi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)\right) \end{aligned} \tag{66}$$

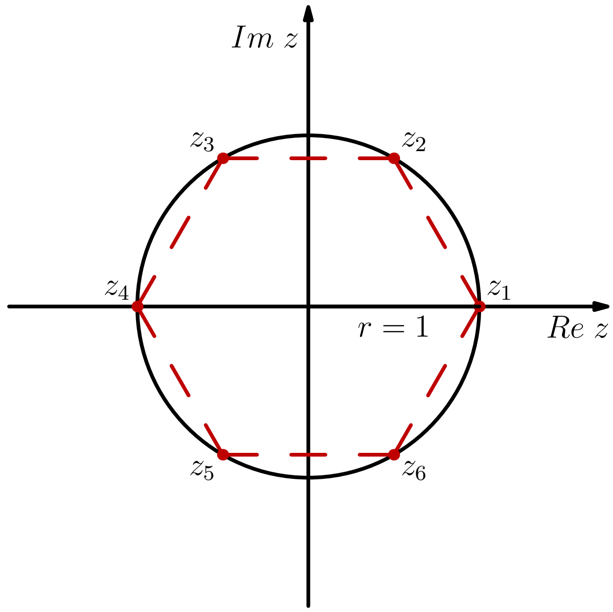
- ako bi još jednom povećali k broju $\phi/4$ bi dodali 2π, a to znači da bi ponovili prvo rješenje

Primjer: šesti korijen broja 1

- broj 1 napišemo u obliku
$$\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = e^{2k\pi i} = 1 \tag{67}$$

- šesti korijen broja 1
$$1^{1/6} = e^{k\pi i/3}\,, \quad k = 0, \dots 5 \tag{68}$$

- skica korijena u kompleksnoj ravnini



3 Eulerova formula

- svakom realnom broju t možemo pridružiti kompleksni broj

$$z = \cos t + i \sin t \tag{69}$$

- za takav broj koristimo posebnu notaciju

$$e^{it} \equiv \cos t + i \sin t \tag{70}$$

koju zovemo Eulerova formula

- iskoristimo prethodne rezultate za množenje kompleksnih brojeva

$$z_1 = \cos x + i \sin x = e^{ix} \quad \text{i} \quad z_2 = \cos y + i \sin y = e^{iy} \tag{71}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \cos(x+y) + i \sin(x+y) \Longrightarrow e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)} \tag{72}$$

- prethodni izraz se lako pamti jer se ekvivalentna formula pojavljuje kod svih eksponencijalnih funkcija

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \tag{73}$$

- funkcije sinus i kosinus možemo izraziti pomoću eksponencijalne funkcije (70)

$$e^{it} + e^{-it} = \cos t + i \sin t + \cos t + i \sin(-t) = 2 \cos t \tag{74}$$

$$\cos t = \frac{1}{2}\left[e^{it} + e^{-it}\right] \tag{75}$$

$$e^{it} - e^{-it} = \cos t + i \sin t - \cos t - i \sin(-t) = 2i \sin t \tag{76}$$

$$\sin t = \frac{1}{2i}\left[e^{it} - e^{-it}\right] \tag{77}$$