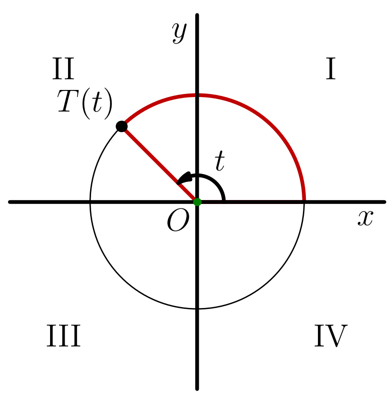
Trigonometrijske funkcije

September 5, 2008

1 Brojevna kružnica

1.1 Mjerenje kuteva

- pretpostavimo da se po kružnici jediničnog radijusa pomaknemo za kut t u smjeru suprotnom od kazaljke na satu



Slika 1: Definicija kuta pomoću jedinične kružnice

- kut t u radijanima po definiciji je jednak duljini prijeđenog luka
- ravninu dijelimo na četiri kvadranta
  - prvi kvadrant: $0 \leq x \leq \pi/2$
  - drugi kvadrant: $\pi/2 \leq x \leq \pi$
  - treći kvadrant: $\pi \leq x \leq 3\pi/2$
  - četvrti kvadrant: $3\pi/2 \leq x \leq 2\pi$

- ako obiđemo cijelu kružnicu, duljina prijeđenog luka iznosi 2π (opseg jedinične kružnice)
- stoga je kut $t + 2k\pi,\ k \in Z$ ekvivalentan kutu t tj. točke $T(t)$ i $T(t + 2k\pi)$ se poklapaju
- osim u radijanima, kuteve možemo mjeriti i u stupnjevima
- u tom slučaju krug dijelimo na 360 jednakih dijelova
- svaki dio odgovara kutu od 1^0
- puni krug odgovara kutu od 360^0
- kut izražen u radijanima pretvaramo u stupnjeve po formuli

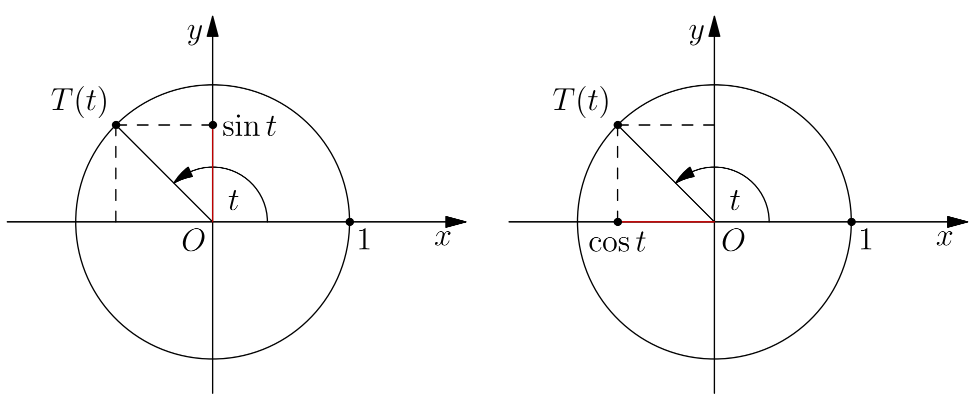
$$t \text{ (stupnjevi)} = \frac{360}{2\pi} \cdot t \text{ (radijani)} \tag{1}$$

$t\ (rad)$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$t\ (^0)$	0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0

2 Funkcije sinus i kosinus

2.1 Definicija i osnovna svojstva

- funkcije sinus i kosinus definiramo na brojevnoj kružnici
- funkcija sinus je ordinata, a funkcija kosinus apscisa točke $T(t)$ na brojevnoj kružnici



Slika 2: Definicije funkcija sinus i kosinus na brojevnoj kružnici

- apsolutna vrijednost obje funkcije mora biti manja od radijusa jedinične kružnice pa dolazimo do prvog važnog svojstva funkcija sinus i kosinus

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \text{i} \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \tag{2}$$

- koordinate točke $T(t)$: $(T_x, T_y) = (\cos t, \sin t)$

- točka $T(t) \equiv (\cos t, \sin t)$ pripada jediničnoj kružnici samo ako vrijedi (Pitagorin poučak)

$$T_x^2 + T_y^2 = 1 \tag{3}$$

- drugo važno svojstvo funkcija sinus i kosinus

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \tag{4}$$

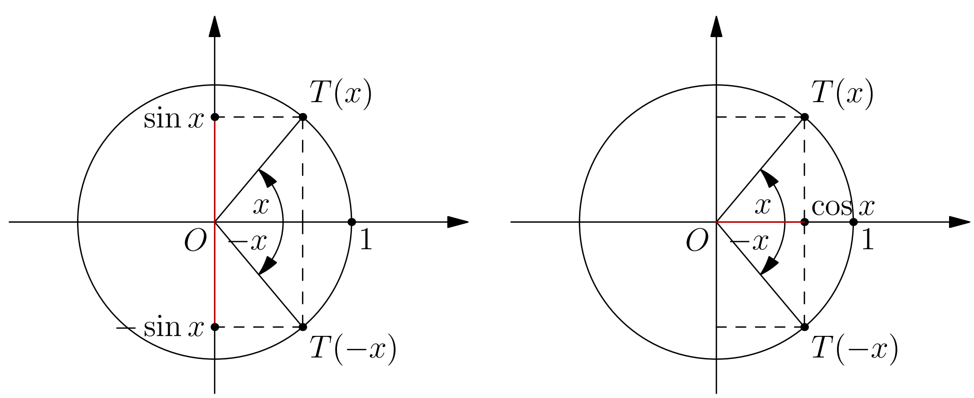
- točki $T(t)$ na brojevnoj kružnici pridruženi su svi realni brojevi $t + 2k\pi$, gdje je k cijeli broj

- sve točke $T(t + 2k\pi),\ k \in Z$ se poklapaju pa vrijedi

$$\begin{array}{r} \cos(t + 2k\pi) = \cos t \\ \sin(t + 2k\pi) = \sin t \end{array}, \quad k \in Z \tag{5}$$

- funkcije sinus i kosinus su periodične s periodom 2π

- prema konvenciji, kut t je pozitivan ako brojevnu kružnicu obilazimo u smjeru suprotonom od kazaljke na satu i negativan ako brojevnu kružnicu obilazimo u smjeru kazaljke na satu



Slika 3: Parnost funkcija sinus i kosinus

- sa slike vidimo da vrijedi

$$\sin(-t) = -\sin t \quad \text{i} \quad \cos(-t) = \cos t \tag{6}$$

- funkcija sinus je neparna, dok je funkcija kosinus parna
- funkcija sinus iščezava u točkama

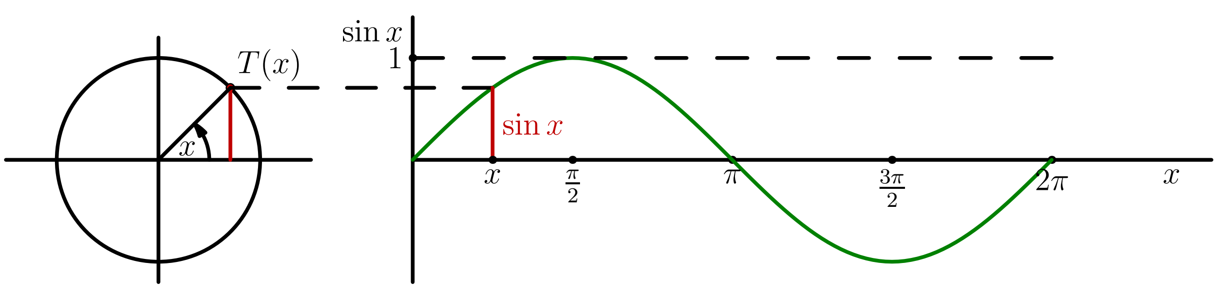
$$x = k\pi \ , \quad k \in Z \tag{7}$$

- funkcija kosinus iščezava u točkama

$$x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \ , \quad k \in Z \tag{8}$$

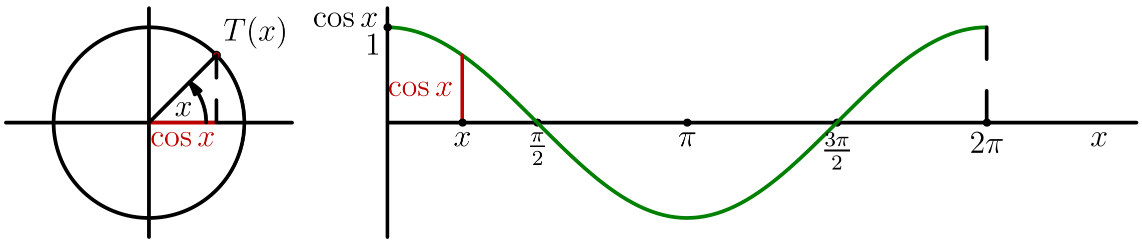
2.2 Grafički prikaz funkcija sinus i kosinus

- graf funkcije sinus konstruiramo pomoću brojevne kružnice
- na os x nanesemo kut u radijanima, dok na os y prenesemo ordinatu točke $T(x)$
- postupak ponavljamo dok ne obiđemo cijelu kružnicu



Slika 4: Konstrukcija grafa funkcije sinus

- period funkcije sinus iznosi 2π pa je dovoljno konstruirati graf na intervalu $[0, 2\pi]$
- na sličan način konstruiramo graf fukncije kosinus
- na os x nanesemo kut u radijanima, dok na os y prenesemo apscisu točke $T(x)$



Slika 5: Konstrukcija grafa funkcije kosinus

- neke karakteristične vrijednosti funkcija sinus i kosinus

ϕ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin\phi$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos\phi$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1

Tablica 1: Karakteristične vrijednosti funkcija sinus i kosinus

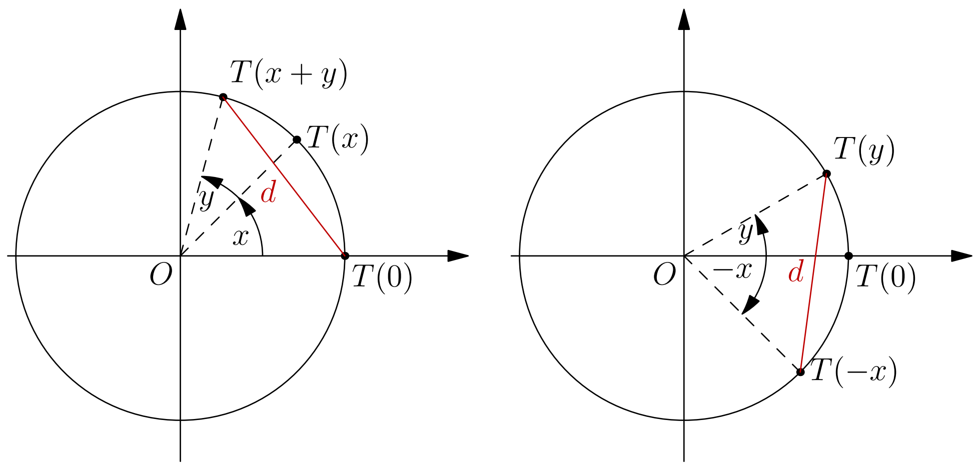
2.3 Adicione formule

- u primjenama trigonometrije često moramo izračunati vrijednost trigonometrijske funkcije za zbroj ili razliku dva kuta
- tada koristimo adicione formule

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \tag{9}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \tag{10}$$

- formulu (9) možemo izvesti promatrajući slike



Slika 6: Izvod adicionih formula

- na lijevoj slici smo označili tri točke:
  - $T(x+y) = (\cos(x+y), \sin(x+y))$
  - $T(x) = (\cos(x), \sin(x))$
  - $T(0) = (1, 0)$
- udaljenost između točaka $T(x+y)$ i T(0) iznosi

$$\begin{aligned} d^2 &= (\cos(x+y) - 1)^2 + (\sin(x+y) - 0)^2 \\ &= \cos^2(x+y) - 2\cos(x+y) + 1 + \sin^2(x+y) \\ &= \cos^2(x+y) + \sin^2(x+y) + 1 - 2\cos(x+y) \end{aligned}$$

- iskoristimo relaciju $\cos^2(x+y) + \sin^2(x+y) = 1$

$$d^2 = 2 - 2\cos(x+y) \tag{11}$$

- sada zarotiramo sve tri točke za kut x u smjeru kazaljke na satu (desna slika)
- udaljenost d između točaka $T(y)$ i $T(-x)$ ostaje nepromijenjena

$$\begin{aligned} d^2 &= (\cos y - \cos(-x))^2 + (\sin(y) - \sin(-x))^2 \\ &= (\cos y - \cos x)^2 + (\sin(y) + \sin x)^2 \\ &= \cos^2 y - 2\cos y\cos x + \cos^2 x + \sin^2 y + 2\sin y\sin x + \sin^2 x \\ &= \cos^2 y + \sin^2 y + \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x\sin y - 2\cos x\cos y \\ &= 2 + 2(\sin x\sin y - \cos x\cos y) \end{aligned} \tag{12}$$

- usporedbom izraza (11) i (12) dolazimo do zaključka

$$2 - 2\cos(x+y) = 2 + 2(\sin x \sin y - \cos x \cos y) \tag{13}$$

- adiciona formula za funkciju kosinus

$$\Longrightarrow \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \tag{14}$$

- odmah možemo izvesti formulu za kosinus razlike kuteva

$$\begin{aligned}\cos(x-y) &= \cos(x+(-y)) \\ &= \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) \\ &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned} \tag{15}$$

- primjenom adicione formule na slučaj $x = \pi/2$ možemo doći do veze između funkcija sinus i kosinus

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos y + \sin\frac{\pi}{2}\sin y \tag{16}$$

- iskoristimo poznate vrijednosti funkcija sinus i kosinus

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{i} \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1 \tag{17}$$

$$\Longrightarrow \sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \tag{18}$$

- ako napravimo supstituciju $x = \pi/2 - y$ dolazimo do formule

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \tag{19}$$

- došli smo do veze između funkcija sinus i kosinus

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{i} \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tag{20}$$

- sada možemo izvesti i adicione formule za funkciju sinus
- sinus razlike kuteva

$$\begin{aligned}\sin(x-y) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (x-y)\right] \\ &= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + y\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos y - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin y \\ &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \end{aligned} \tag{21}$$

- sinus zbroja kuteva

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin[x-(-y)] \\ &= \sin x\cos y - \cos x\sin(-y) \\ &= \sin x\cos y + \cos x\sin y \qquad (22)\end{aligned}$$

- iz adicionih formula možemo izvesti i formule za zbroj i razliku funkcija sinus i kosinus
- polazimo od adicionih formula

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y \qquad (23)$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y \qquad (24)$$
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \qquad (25)$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y \qquad (26)$$

- zbrojimo formule (23) i (24)

$$2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y) \qquad (27)$$

- napravimo supstitucije

$$x+y=u \quad \text{i} \quad x-y=v \Longrightarrow x=\frac{u+v}{2} \quad \text{i} \quad y=\frac{u-v}{2} \qquad (28)$$

- slijedi formula za zbroj dva kosinusa

$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} \qquad (29)$$

- zbrojimo formule (25) i (26)

$$2\sin x\cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y) \qquad (30)$$

- napravimo supstitucije (28)
- slijedi formula za zbroj dva sinusa

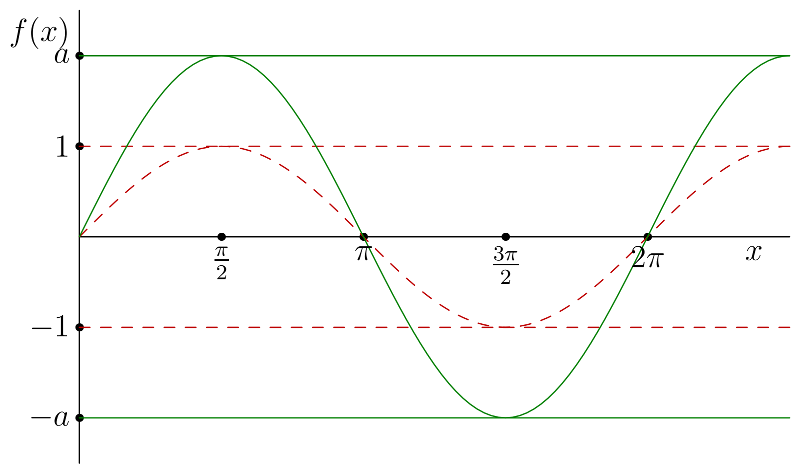
$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} \qquad (31)$$

-

2.4 Općeniti oblik funkcije sinus

Funkcija oblika: $f(x) = a \sin x$

- funkcija sinus poprima vrijednosti između -1 i 1
- stoga funkcija $f(x)$ poprima vrijednosti između $-a$ i a
- broj a zovemo amplituda



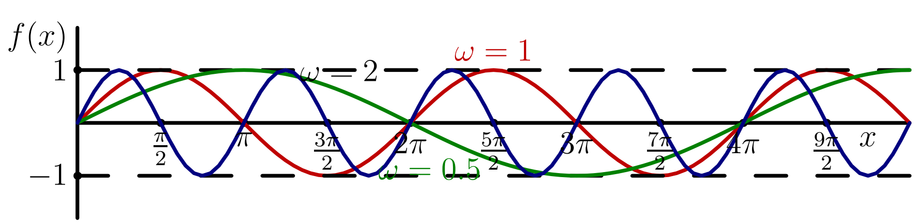
Slika 7: Graf funkcije $a \sin x$.

Funkcija oblika: $f(x) = \sin(\omega x)$

- period funkcije $\sin x$ iznosi 2π
- možemo izračunati period funkcije $f(x)$

$$\omega\tau = 2\pi \Longrightarrow \tau = \frac{2\pi}{\omega} \tag{32}$$

- ako je $\omega > 1$ period se skraćuje u odnosu na funkciju $\sin x$, a ako je $\omega < 1$ period se produžuje



Slika 8: Funkcije sinus s različitim periodima.

Funkcija oblika: $f(x) = \sin(x + \phi)$

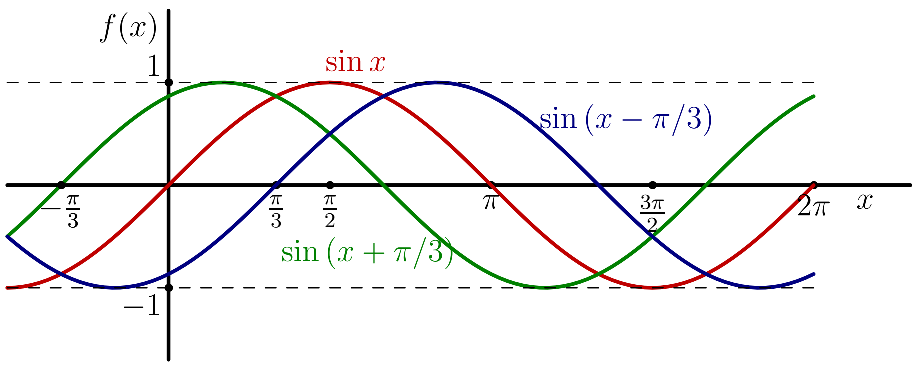
- nultočke funkcije $\sin x$

$$x_0 = (2k+1)\,\frac{\pi}{2}\,, \quad k \in Z \tag{33}$$

- nultočke funkcije $\sin(x + \phi)$

$$x_0 + \phi = (2k+1)\,\frac{\pi}{2}\,, \quad k \in Z \Longrightarrow x_0 = (2k+1)\,\frac{\pi}{2} - \phi \tag{34}$$

- graf funkcije $\sin(x + \phi)$ dobije se translacijom grafa funkcije $\sin x$ duž osi x za ϕ



Slika 9: Funkcije sinus s različitim početnim fazama ϕ.

3 Funkcije tangens i kotangens

- funkciju tangens definiramo kao omjer funkcija sinus i kosinus

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \tag{35}$$

- tangens nije definiran u nul-točkama funkcije kosinus

$$x_0 = (2k+1)\,\frac{\pi}{2}\,, \quad k \in Z \tag{36}$$

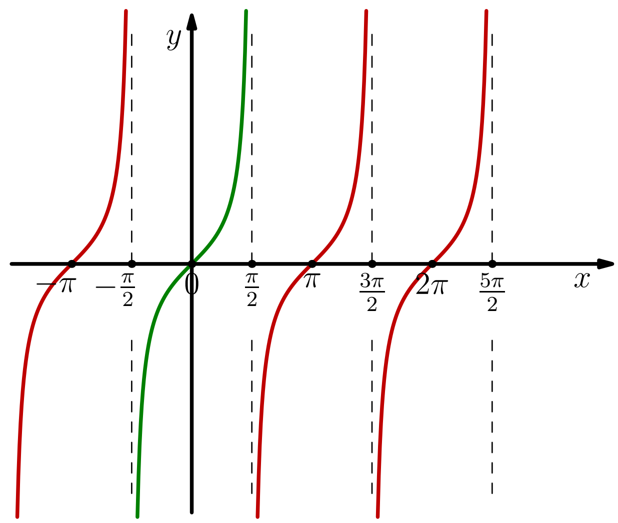
- tangens je periodička funkcija s periodom π

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x \tag{37}$$

- tangens je neparna funkcija

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x \tag{38}$$

- graf funkcije tangens



Slika 10: Graf funkcije tangens.

- funkciju kotangens definiramo kao omjer funkcija kosinus i sinus

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \tag{39}$$

- kotangens nije definiran u nul-točkama funkcije sinus

$$x_0 = k\pi \ , \quad k \in Z \tag{40}$$

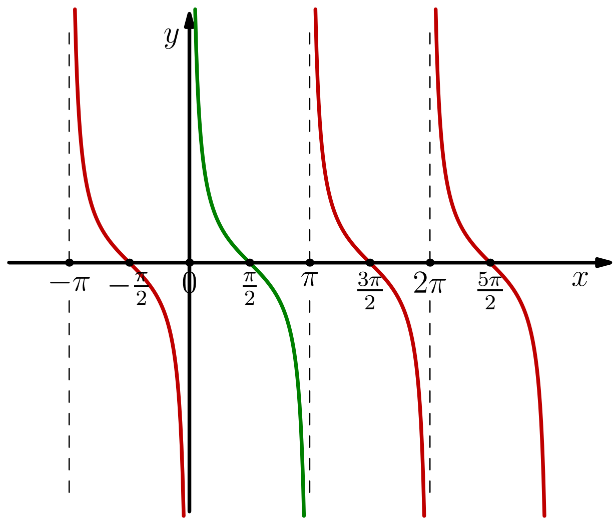
- kotangens je periodička funkcija s periodom π

$$\cot(x+\pi) = \frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \cot x \tag{41}$$

- kotangens je neparna funkcija

$$\cot(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x \tag{42}$$

- graf funkcije kotangens



Slika 11: Graf funkcije kotangens.

4 Harmonijska gibanja

- harmonijska gibanja možemo opisati funkcijama oblika

$$f(t) = A \sin(\omega t + \phi) \tag{43}$$

- pritom koristimo sljedeće pojmove
  - amplituda: A
  - kružna frekvencija: ω
  - početna faza: ϕ
- period gibanja dan je s

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \tag{44}$$

- superpozicija harmonijskih gibanja iste kružne frekvencije ω ponovno je harmonijsko gibanje kružne frekvencije ω

$$\begin{aligned} f(t) &= A_1 \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega t + \phi_2) \\ &= A_1 \sin \omega t \cos \phi_1 + A_1 \cos \omega t \sin \phi_1 + A_2 \sin \omega t \cos \phi_2 + A_2 \cos \omega t \sin \phi_2 \\ &= (A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2) \sin \omega t + (A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2) \cos \omega t \end{aligned}$$

- koristimo oznake

$$B_1 \equiv A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2 \quad \text{i} \quad B_2 \equiv A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2 \tag{45}$$

$$\Longrightarrow f(t) = B_1 \sin\omega t + B_2 \cos\omega t \tag{46}$$

- ako je bar jedan od brojeva B_1 i B_2 različit od nule možemo naći realne brojeve A i ϕ sa svojstvom

$$B_1 = A\sin\phi \quad \text{i} \quad B_2 = A\cos\phi \tag{47}$$

- funkcija $f(t)$ svodi se na

$$f(t) = A\sin\phi\cos\omega t + A\cos\phi\sin\omega t = A\sin(\omega t + \phi) \tag{48}$$

Primjer:

- prikažite u obliku $A\sin(\omega t + \phi)$ sumu funkcija

$$f(t) = 5\sin(3t + \pi/6) + 3\sin(3t - \pi/3) \tag{49}$$

- prvo iskoristimo adicione formule

$$\begin{aligned} \sin(3t + \pi/6) &= \sin 3t\cos(\pi/6) + \cos 3t\sin(\pi/6) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3t + \frac{1}{2}\cos 3t \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} \sin(3t - \pi/3) &= \sin 3t\cos(\pi/3) - \cos 3t\sin(\pi/3) \\ &= \frac{1}{2}\sin 3t - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3t \end{aligned} \tag{51}$$

- sada računamo zbroj (49)

$$\begin{aligned} f(t) &= 5\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3t + \frac{5}{2}\cos 3t + \frac{3}{2}\sin 3t - 3\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3t \\ &= \frac{1}{2}\left(5\sqrt{3} + 3\right)\sin 3t + \frac{1}{2}\left(5 - 3\sqrt{3}\right)\cos 3t \end{aligned} \tag{52}$$

- tražimo amplitudu A i fazu ϕ tako da vrijedi

$$f(t) = A\sin(3t + \phi) = A\sin 3t\cos\phi + A\cos 3t\sin\phi \tag{53}$$

- usporedba s izrazom (52)

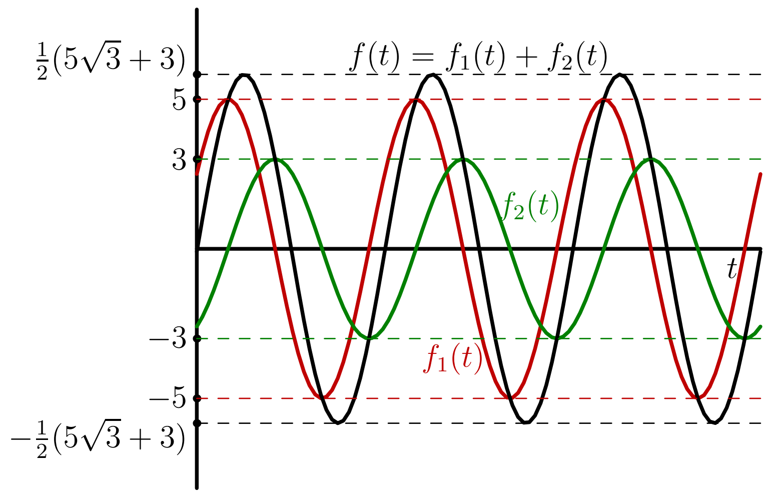
$$A\cos\phi = \frac{1}{2}\left(5\sqrt{3} + 3\right) \quad \text{i} \quad A\sin\phi = \frac{1}{2}\left(5 - 3\sqrt{3}\right) \tag{54}$$

- podijelimo $A \sin \phi$ s $A \cos \phi$

$$\Longrightarrow \tan \phi = \frac{5 - 3\sqrt{3}}{5\sqrt{3} + 3} = 0.016822 \Longrightarrow \cos \phi \approx 1 \tag{55}$$

- amplituda

$$A = \frac{1}{2}\left(5\sqrt{3} + 3\right) \tag{56}$$



Slika 12: Zbroj funkcija $f_1(t) = 5\sin(3t + \pi/6)$ i $f_2(t) = 3\sin(3t - \pi/3)$.

- često susrećemo i superpoziciju harmonijskih funkcija različitih frekvencija
- promotrimo najjednostavniji primjer superpozicije dva titranja jednakih amplituda i početnih faza $\phi_1 = \phi_2 = 0$

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = A \sin \omega_1 t + A \sin \omega_2 t \tag{57}$$

- iskoristimo formulu za zbroj sinusa (31)

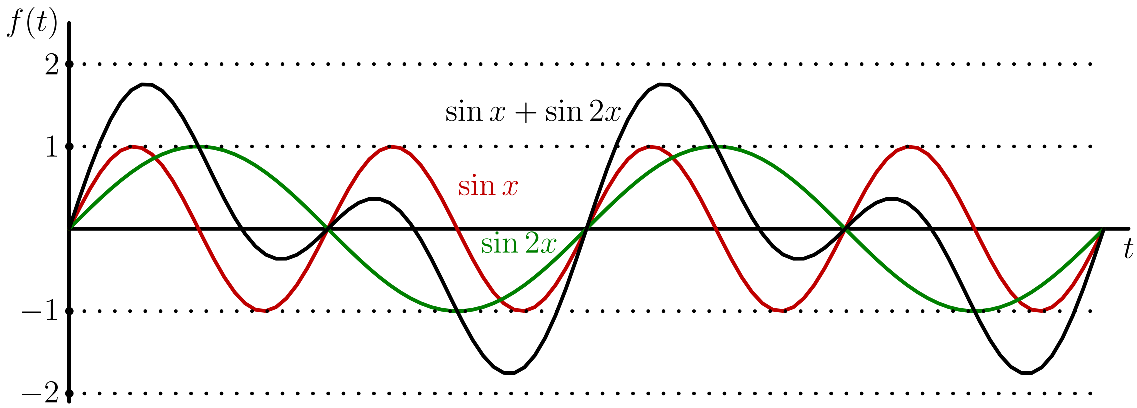
$$f(t) = 2A \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \tag{58}$$

Primjer: superpozicija funkcija $\sin x$ i $\sin 2x$

- primjenimo formulu za zbroj sinusa (31)

$$\sin 2x + \sin x = 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} \tag{59}$$

- dobivena funkcija ima period 2π



Slika 13: Zbroj funkcija $f(t) = \sin t + 2\sin 2t$

Primjer: udari

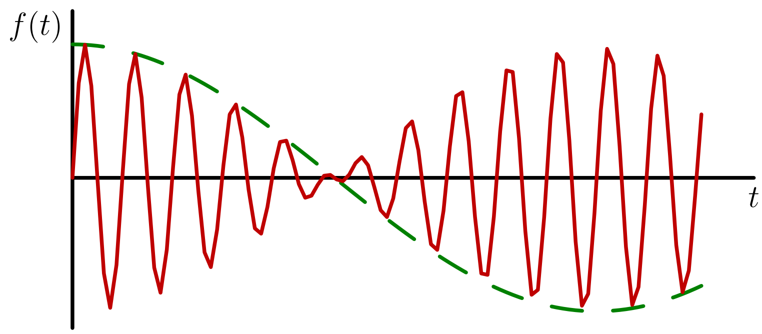
- posebno je zanimljiv primjer kada su frekvencije ω_1 i ω_2 približno jednake

$$\omega_1 \approx \omega_2 \Longrightarrow \omega_1 \equiv \omega \quad \text{i} \quad \omega_2 \equiv \omega + \epsilon \tag{60}$$

- superpozicija takve dvije funkcije

$$f(t) = 2A\sin(\omega t)\cos\left(\frac{\epsilon}{2}t\right) \tag{61}$$

- radi se o titranju frekvencije ω čija se amplituda sporo mijenja
- promjenu (modulaciju) amplitude daje faktor $\cos\left(\frac{\epsilon}{2}t\right)$
- superpoziciju titranja bliskih frekvencija zovemo udari
- na slici je superpozicija dva sinusa bliskih frkvencija (crvena linija) i linija koja prikazuje promjenu amplitude (zelena linija)



Slika 14: Grafički prikaz udara.

5 Ciklometrijske funkcije

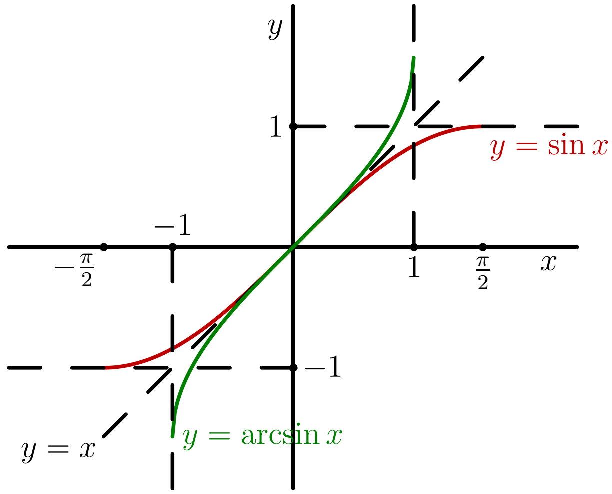
- ciklometrijske funkcije su inverzne funkcije trigonometrijskih funkcija

5.1 Funkcija arcsin(x)

- funkcija $\sin x$ preslikava interval $[-\pi/2, \pi/2]$ na interval $[-1, 1]$
- definiramo inverznu funkciju $\arcsin x$ za koju vrijedi

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \forall x \in [-\pi/2, \pi/2] \tag{62}$$
$$\sin(\arcsin x) = x \quad \forall x \in [-1, 1] \tag{63}$$

- bitno je uočiti da je funkcija $\sin x$ definirana za svaki $x \in R$, dok je funkcija $\arcsin x$ definirana samo na intervalu $[-1, 1]$ jer $\sin x$ poprima vrijednosti samo u tom intervalu
- graf funkcije arcsin dobijemo zrcaljenjem grafa funkcije sin s obzirom na pravac $y = x$



Slika 15: Graf funkcije arcsin.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\arcsin x$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$

Tablica 2: Nekoliko vrijednosti funkcija sinus i arcsin

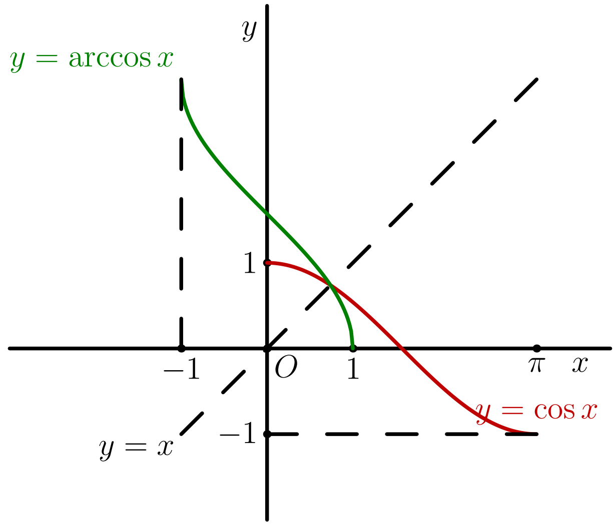
5.2 Funkcija arccos(x)

- funkcija $\cos x$ također preslikava interval $[-\pi/2, \pi/2]$ na interval $[-1, 1]$
- opet definiramo inverznu funkciju $\arccos x$ za koju vrijedi

$$\arccos(\cos x) = x \quad \forall x \in [-\pi/2, \pi/2] \tag{64}$$

$$\cos(\arccos x) = x \quad \forall x \in [-1, 1] \tag{65}$$

- kao i u prethodnom slučaju, funkcija $\cos x$ definirana je za svaki $x \in R$, dok je funkcija $\arccos x$ definirana samo na intervalu $[-1, 1]$
- graf funkcije arccos dobijemo zrcaljenjem grafa funkcije cos s obzirom na pravac $y = x$



Slika 16: Graf funkcije arccos.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$pi/2$
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\arccos x$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$

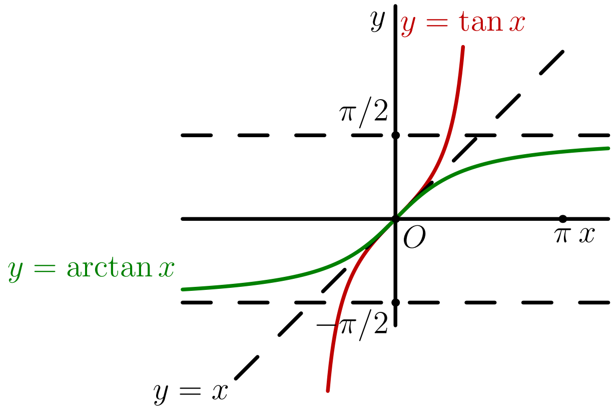
Tablica 3: Nekoliko vrijednosti funkcija cos i arccos

5.3 Funkcija arctan(x)

- funkcija $\tan x$ preslikava interval $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ na interval $\langle -\infty, \infty \rangle$
- definiramo inverznu funkciju $\arctan x$ za koju vrijedi

$$\arctan(\tan x) = x \quad \forall x \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle \tag{66}$$
$$\tan(\arctan x) = x \quad \forall x \in \langle -\infty, \infty \rangle \tag{67}$$

- za razliku od funkcija $\cos x$ i $\sin x$ funkcija $\tan x$ nije ograničena pa je funkcija $\arctan x$ definirana na cijelom skupu realnih brojeva
- graf funkcije arctan dobijemo zrcaljenjem grafa funkcije tan s obzirom na pravac $y = x$



Slika 17: Graf funkcije arctan.

- na isti način bi definirali i funkciju arccot

6 Zadaci za vježbu

Zadatak 1
Dokažite sljedeće relacije

$$(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x) = \cos 2x$$

$$(\sin 2x - \cos 3x)\cos 5x = \frac{1}{2}(\sin 7x - \sin 3x - \cos 2x - \cos 8x)$$

$$(\sin x + \cos x)(\sin 2x + \cos 2x) = \sin 3x + \cos x$$

Zadatak 2
Dokažite da za $x \in [0, \pi/2]$ vrijede sljedeće relacije

$$\sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} \quad \text{i} \quad \cos x = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

Zadatak 3
Dokažite da za $x \notin \{\pi/2 + m\pi, m \in Z\}$ vrijedi sljedeća relacija

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$