Prošli put:

- Binomni pokus
- Primjeri: galtonova daska; bacanje *n* novčića

- Binomna slučajna varijabla $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$
  X = broj uspjeha u n pokušaja

Binomna raspodjela vjerojatnosti

Ako imamo binomni eksperiment i binomnu slučajnu varijablu $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, njezinu raspodjelu vjerojatnosti $p(x)$ nazivamo **binomna raspodjela** i označavamo ju s

$b(x;n,p)$

http://atsosxdev.doit.wisc.edu/~blongoria/gasp/galton_board/

slučajna varijabla x	putevi	vjerojatnost
0	LLLL	q^4
1	LLLD LLDL LDLL DLLL	$p \cdot q^3$
2	LLDD LDLD LDDL DLLD DLDL DDLL	$p^2 \cdot q^2$
3	LDDD DLDD DDLD DDDL	$p^3 \cdot q$
4	DDDD	p^4

$$b(x;n,p) = \begin{Bmatrix} \text{broj} \quad \text{ishoda} \\ \text{koji} \quad \text{imaju} \\ x \quad \text{uspjeha} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \text{vjerojatnost} \\ \text{svakog} \quad \text{takvog} \\ \text{ishoda} \end{Bmatrix} = K_n^x p^x q^{n-x}$$

Binomna raspodjela vjerojatnosti je

$$b(x;n,p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & \text{za} \quad x = 0,1,2,\dots,n \\ 0 & \text{in ace} \end{cases}$$

Funkcija raspodjele

$$F(x)=B(x;n,p)=\sum_{y=0}^{x} b(y;n,p)$$

Rekurzivna formula

$$b(x;n,p) = \frac{n-x+1}{x} \cdot \frac{p}{q} \cdot b(x-1;n,p)$$

Za koju vrijednost x_M slučajne varijable X je vjerojatnost najveća? Mora vrijediti:

$$b(x_M-1;n,p) \le b(x_M;n,p) \ge b(x_M+1;n,p)$$

$$np-q \le x_M \le np+p$$

Binomna raspodjela:

Očekivanje i varijanca

$$E(X) = np$$

$$V(X) = npq$$

Funkcija izvodnica

Prilagođavanje empirijskih podataka binomnoj raspodjeli

link

Poissonova raspodjela (zakon rijetkih događaja)

Rijetki događaji:

- Geiger-Müllerov brojač
- dolasci na bankomat u nedjelju

Jako nepošten novčić $p<<1$, puno bacanja ($n>>1$)

PPPPPPPPPPPGPPPPPPPPPPPPPPPPPPPPPPGPPPPPPPPPPPPPPPPPPPGPPPPPPPPPPPPPPPPPPP...

$$b(x;n,p) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0,1,2,....,n$$

Aproksimacije: 1. $(1-p)^{n-x} \approx e^{-np}$ 2. $\frac{n!}{(n-x)!} \approx n^x$

$$p(x;n,p) \approx \frac{e^{-np}(np)^x}{x!}$$

stavimo: $np = \lambda =$ const.

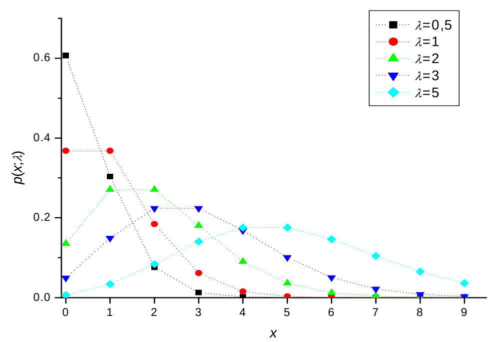
Def:
Diskretna slučajna varijabla je **Poissonova** ako joj je raspodjela vjerojatnosti dana s

$$p(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x = 0,1,2,....$$

za neki $\lambda > 0$.

Poissonovu slučajnu varijablu označavamo:

$$X \sim Po(\lambda)$$



Očekivanje i varijanca

$$\boxed{E(X)=\lambda}$$

$$E(X^2)=\lambda+\lambda^2$$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

$$\boxed{V(X)=\lambda}$$

Rekurzivna formula

$$p(x;\lambda)=\frac{\lambda}{x}\,p(x-1;\lambda)$$

Najvjerojatnija vrijednost

$$\lambda-1\le x_M\le\lambda$$

Funkcija raspodjele

$$F(x;\lambda)=\sum_{y=0}^{x}e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!}$$

Funkcija izvodnica

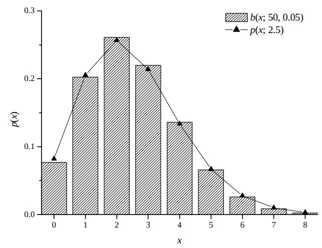
Primjena Poissonove raspodjele

A. Poissnova raspodjela kao granični slučaj binomne

vidjeli smo: $\lim\limits_{n\to\infty} b(x;n,p)=p(x;\lambda)$

Praktično:

$n\ge 50$; $p\le 0{,}1$



B. Poissonova raspodjela kao zakon malih brojeva

Rijetki događaji

vremenski ili prostorni intervali

Poissonovi procesi :
Vjerojatnost događaja proporcionalna je veličini intervala.

Prilagođavanje empirijskih podataka Poissonovoj raspodjeli